

RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

PAULA DE OLIVEIRA

Dérivabilité de l'erreur par rapport à la triangulation dans les méthodes d'éléments finis

RAIRO. Analyse numérique, tome 14, n° 3 (1980), p. 291-308

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1980__14_3_291_0

© AFCET, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉRIVABILITÉ DE L'ERREUR PAR RAPPORT A LA TRIANGULATION DANS LES MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS (*)

by Paula de OLIVEIRA ⁽¹⁾

Communique par P G CIARLET

Resume — On étudie la dérivabilité par rapport à la triangulation T de l'erreur $\|u - u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2$, où u est la solution d'un problème elliptique continu du deuxième ordre et $u(T)$ la solution du problème approché résolu dans un espace d'éléments finis. Ceci permet d'établir les conditions nécessaires d'optimalité et d'envisager l'application de méthodes de gradient pour le calcul du maillage optimal.

Abstract — The differentiability with respect to the mesh T of the error $\|u - u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2$ is analyzed. Here u stands for the solution of a second order elliptic boundary value problem while $u(T)$ denotes the corresponding finite element discrete solution. This allows us to give necessary conditions of optimality and to foresee the use of gradient methods in order to compute the optimal mesh.

1. INTRODUCTION

Pour résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

on calcule la solution d'un problème approché

$$\begin{cases} \forall v(T) \in V(T), & \int_{\Omega} \nabla u(T) \cdot \nabla v(T) dx = \int_{\Omega} f v(T) \\ u(T) \in V(T) \end{cases}$$

Si $V(T)$ est un espace d'éléments finis, un problème important est celui de choisir au mieux les coordonnées des nœuds des éléments finis, afin de minimiser

⁽¹⁾ Analyse numerique, Tour 55, Université Pierre et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75005 Paris

^(*) Reçu juillet 1979

l'erreur $|u - u(T)|_{1,\Omega}^2$. On ne s'intéresse pas ici au problème de l'existence d'un maillage optimal qu'on a traité dans [10, 11].

Dans la pratique, pour définir un maillage optimal il est important d'avoir une expression de la dérivée par rapport à la triangulation, de l'erreur entre la solution d'un problème continu et la solution du problème approché, résolu dans un espace d'éléments finis. Cela permet d'établir les conditions nécessaires du premier ordre et d'envisager l'application des méthodes de gradient pour le calcul du maillage optimal. Dans ce qui suit on étudie la dérivabilité (par rapport à la triangulation) de l'erreur $|u - u(T)|_{1,\Omega}^2$, où u est la solution d'un problème elliptique continu du deuxième ordre et $u(T)$ la solution du problème approché résolu dans un espace d'éléments finis $V(T)$ construit avec des triangles d'Hermite de type 3. Ce résultat se généralise à n'importe quel espace d'éléments finis conforme, le cas des éléments finis de Lagrange apparaissant comme cas particulier, beaucoup plus simple, du problème étudié.

On utilise les méthodes de contrôle par le domaine en suivant la présentation de Murat-Simon [8, 9] (voir aussi [7]). L'essentiel de notre travail consiste à construire un espace de triangulations \mathcal{T} muni d'une structure de variété différentielle sur lequel on peut définir $|u - u(T)|_{1,\Omega}^2$; la définition de la dérivabilité de l'application $T \rightarrow |u - u(T)|_{1,\Omega}^2$ est alors celle de la dérivabilité sur la variété. On démontre ensuite la dérivabilité et on explicite la dérivée de $T \rightarrow |u - u(T)|_{1,\Omega}^2$. On exhibe aussi une méthode formelle de calcul de la dérivée ce qui permet de comprendre pourquoi on a voulu arriver à certaines expressions. Sans cela, quelques-unes des démarches faites dans les démonstrations pourraient sembler inutiles.

Le problème de la caractérisation des maillages optimaux a été déjà résolu dans le cas unidimensionnel pour une barre linéaire par Prager [12]. Comme la solution de l'équation se calcule facilement dans ce cas, l'erreur peut être complètement explicitée; Prager a démontré que dans le maillage optimisé chaque segment contient la même quantité d'énergie de déformation et que l'erreur est la même dans tous les nœuds. Dans le cas d'une barre unidimensionnelle non linéaire Tang et Turcke [14] ont démontré que la « déformation moyenne » d'éléments adjacents est exacte à l'optimum. Dans le cas des problèmes unidimensionnels on peut citer encore les travaux de Babuška et Rheinboldt [2], McNeice et Marcal [5]. Dans le cas bidimensionnel, Babuška et Rheinboldt [3] caractérisent les maillages « quasi-optimaux » $T^* = \{K^*\}$, sous la forme suivante : l'erreur $|u - u(T^*)|_{1,K^*}^2$ est constante pour tous les $K^* \in T^*$. Le problème a été envisagé sous un autre angle par Arantes Oliveira [1] et Turcke et McNeice [15]. A partir de l'observation d'un certain nombre d'expériences numériques concernant le modèle de l'élasticité les auteurs

suggèrent que dans les maillages optimaux les nœuds de la triangulation se placent selon les courbes $(\nabla u)^2 = \text{Cte}$.

Enfin dans un article [6], étudiant un problème de design optimal d'un électroaimant Marocco-Pironneau présentent aussi une étude de la dérivée par rapport aux coordonnées des nœuds, de l'énergie potentielle associée au problème approché, celui-ci étant résolu avec des fonctions linéaires par morceaux, résultat que donne également la méthode suivie dans ce travail.

2. POSITION DU PROBLÈME : L'ESPACE DES TRIANGULATIONS

Soit Ω un ouvert polygonal de R^2 et f une fonction de $L^2(\Omega)$.

On considère le problème

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &\in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \right\} \tag{2.1}$$

dont la formulation variationnelle s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx, \\ u &\in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \right\} \tag{2.2}$$

On considère une triangulation $T = \{K\}$, où K est un triangle contenu dans Ω , à laquelle on associe l'espace d'éléments finis $V(T)$ construit avec des triangles d'Hermite de type 3 :

$$V(T) = \{v(T) \in H_0^1(\Omega); v(T)|_K \in P^3(K), \forall K \in T\}. \tag{2.3}$$

Le problème approché est alors défini par

$$\left. \begin{aligned} \forall v(T) \in V(T), \int_{\Omega} \nabla u(T) \cdot \nabla v(T) \, dx &= \int_{\Omega} f v(T) \, dx, \\ u(T) &\in V(T). \end{aligned} \right\} \tag{2.4}$$

LEMME 2.1 : Il est équivalent de minimiser par rapport à T , l'erreur $|u - u(T)|_{1,\Omega}^2$ ou de maximiser $\int_{\Omega} f u(T) \, dx$.

Démonstration : Il suffit de développer le carré

$$|u - u(T)|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\nabla u)^2 \, dx - 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u(T) \, dx + \int_{\Omega} (\nabla u(T))^2 \, dx, \tag{2.5}$$

et de remplacer $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u(T) \, dx$ et $\int_{\Omega} (\nabla u(T))^2 \, dx$, en utilisant (2.2) et (2.4). ■

Le probleme de la minimisation de l'erreur $|u - u(T)|_{1, \Omega}^2$ peut alors se formuler de la façon suivante

(i) Trouver une triangulation $T^* \in \mathcal{T}$, ensemble a preciser, telle que

$$\forall T \in \mathcal{T}, \int_{\Omega} fu(T^*) dx \geq \int_{\Omega} fu(T) dx \tag{2.6}$$

(ii) Demontrer la dérivabilité de l'application de \mathcal{T} dans \mathbb{R} , $T \rightarrow \int_{\Omega} fu(T) dx$ et calculer la dérivée

Nous allons maintenant définir l'ensemble des triangulations admissibles \mathcal{T} que nous considérons et le munir d'une structure de variété

Soit $T_0 = \{K\}$ une triangulation fixée de Ω . On définit alors

$$\Phi_T = \{ \varphi \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid \forall x \in \mathbb{R}^2 - \Omega, \varphi(x) \equiv 0, \forall K \in T_0, \varphi|_K \in [P^1(K)]^2 \} \tag{2.7}$$

qu'on munit par exemple de la norme de $W^{1, \infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. L'ensemble des triangulations admissibles est alors défini par

$$\mathcal{T} = \{ T, \varphi \in \Phi_{T_0}, \exists (I + \varphi) \in \beta, T = (I + \varphi) T_0 \},$$

ou β est l'ensemble des bijections de Ω dans Ω

REMARQUE 2.1 D'après les définitions (2.7) et (2.8) les nœuds de toute triangulation $T \in \mathcal{T}$ situés sur la frontière de Ω sont toujours ceux de T_0 , puisque si $\varphi \in \Phi_{T_0}$, $\varphi \equiv 0$ sur $\partial\Omega$. En modifiant la définition de Φ_{T_0} on pourrait également considérer le cas où certains nœuds situés sur $\partial\Omega$ pourraient se déplacer, l'ouvert Ω restant toujours globalement conservé. ■

REMARQUE 2.2 On a choisi l'espace Φ_{T_0} constitué par des fonctions continues et affines par morceaux pour garantir que l'image d'une triangulation est encore une triangulation. Si T_0 a p nœuds alors tout $T \in \mathcal{T}$ aura p nœuds, les triangulations étant « topologiquement » identiques. ■

REMARQUE 2.3 Si $I + \varphi \in \beta$ avec $\varphi \in \Phi_{T_0}$ alors

$$(I + \varphi)^{-1} = I + \psi \quad \text{où} \quad \psi \in \Phi_{(I + \varphi)T_0} \quad \blacksquare$$

REMARQUE 2.4 \mathcal{T} peut se représenter à partir de n'importe lequel de ses éléments. ■

Pour démontrer que \mathcal{T} a une structure de variété on établit un résultat préliminaire

Posons

$$O_T = \{ \varphi \in \Phi_T; I + \varphi \in \beta \}. \tag{2.9}$$

THÉOREME 2.1 : *L'application A_T qui à $\varphi \in O_T$ fait correspondre $(I + \varphi) T$ est une bijection de O_T sur \mathcal{T} .*

Démonstration : Posons $S_{-1} = \partial\Omega$ et pour tout $n \geq 0$ soit S_n l'ensemble des sommets des triangles de T dont deux sommets appartiennent à S_{n-1} . Par des considérations de géométrie élémentaire il est simple d'établir qu'il existe N fini tel que tout nœud de T appartienne à l'un des ensembles $S_n (n \leq N)$. Soit alors $S \in \mathcal{T}$. Il existe donc $\varphi \in O_T$ tel que $S = (I + \varphi) T$. On démontre que φ est unique en calculant ses valeurs de proche en proche sur S_0, S_1, S_2 et ainsi de suite. ■

Il est facile de voir que O_T est un ouvert de l'espace vectoriel de dimension finie Φ_T et que l'application A_T , bijection de O_T sur \mathcal{T} est une carte locale.

THÉOREME 2.2 : *\mathcal{T} muni de l'atlas $\{(O_T, A_T); T \in \mathcal{T}\}$ est une variété de dimension finie, non plongée, et de classe C^∞ .*

Démonstration : Il suffit de vérifier que si S et T appartiennent à \mathcal{T} alors $A_S^{-1} \circ A_T$ est un isomorphisme de O_T sur O_S . Cela est clair car $A_S^{-1} \circ A_T$ n'est autre que l'application

$$\varphi \rightarrow (I + \varphi) \circ (I + \alpha) - I,$$

où $\alpha \in O_T$ est tel que $(I + \alpha) T = S$. Cette application est affine donc C^∞ . ■

Puisque \mathcal{T} est une variété, la définition de la différentiabilité d'une fonction définie sur \mathcal{T} et à valeurs dans un espace de Banach est classique. Compte tenu de la définition des cartes locales A_T on a :

DÉFINITION 2.1 : *Soit J une fonction définie sur \mathcal{T} et à valeurs dans un Banach E ; J est dérivable au point T^* si l'application $\varphi \rightarrow J[(I + \varphi) T^*]$ est dérivable de O_{T^*} dans E au point 0. On notera $\partial J / \partial T(T^*)$ la dérivée $\partial J [(I + \varphi) T^*] / \partial \varphi(0)$, qui appartient à $\mathcal{L}(O_{T^*}; E)$. ■*

REMARQUE 2.5 : Dans Murat-Simon [8, 9], pour étudier des problèmes de contrôle par le domaine, ces auteurs ont introduit un espace de domaines défini par

$$\mathcal{D} = \{ \Omega = (I + \varphi) Q; (I + \varphi) \in \beta, \varphi \in W^{1, \infty}(R^2, R^2) \},$$

où Q est un ouvert donné. L'ensemble \mathcal{D} n'est pas une variété différentielle car l'application qui à φ fait correspondre $(I + \varphi) Q$ n'est pas une bijection : par exemple si $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$ on a $(I + \varphi) Q = Q$. Ce fait complique la définition de la dérivation donnée par Murat-Simon. ■

3. LE CALCUL DE LA DÉRIVÉE $T \rightarrow u(T)$ DANS LE CAS D'UN ESPACE $V(T)$ CONSTRUIT AVEC DES TRIANGLES D'HERMITE DE TYPE 3

Avant de démontrer la dérivabilité et de calculer $\partial u(T)/\partial T(T^*)$ faisons un *calcul formel* qui nous guidera dans la démonstration correcte. Soient $w_j(T)$, $j = 1 \dots s$ les fonctions de base de l'espace $V(T)$, espace d'éléments finis construit avec des triangles d'Hermite de type 3. On dérive formellement par rapport à T , au point T^* . l'expression

$$\forall j=1 \dots s, \quad \int_{\Omega} (-\Delta u(T) - f) w_j(T) dx = 0. \quad (3.1)$$

Si on pose, pour simplifier l'écriture, pour tout $\tau \in \Phi_{T^*}$, $\partial u(T)/\partial T(T^*) \cdot \tau = U \tau$ on a, formellement

$$\left. \begin{array}{l} \forall j=1 \dots s, \quad \forall \tau \in \Phi_{T^*}, \\ \int_{\Omega} -\Delta U \tau w_j(T^*) dx + \int_{\Omega} (-\Delta u(T^*) - f) \left(\frac{\partial w_j(T)}{\partial T}(T^*) \cdot \tau \right) dx = 0. \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

Mais si $T = (I + \varphi) T^*$ où $\varphi \in \Phi_{T^*}$ alors :

$$w_j(T) = w_j[(I + \varphi) T^*] = w_j[(I + \varphi) T^*] \circ (I + \varphi) \circ (I + \varphi)^{-1}, \quad (3.3)$$

de sorte que si $\varphi \rightarrow w_j[(I + \varphi) T^*] \circ (I + \varphi)$ est dérivable on a, d'après la définition 2.1 :

$$\left. \begin{array}{l} \forall j=1 \dots s, \quad \forall \tau \in \Phi_{T^*}, \\ \frac{\partial w_j(T)}{\partial T}(T^*) \cdot \tau = \frac{\partial w_j[(I + \varphi) T^*] \circ (I + \varphi)}{\partial \varphi}(0) \cdot \tau - \nabla w_j(T^*) \cdot \tau. \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

Si l'on pose

$$R_j \tau = \frac{\partial w_j[(I + \varphi) T^*] \circ (I + \varphi)}{\partial \varphi}(0) \tau, \quad (3.5)$$

et si on intègre par partie la deuxième intégrale on obtient que $U \tau$ est solution de l'équation

$$\left. \begin{array}{l} \forall j=1 \dots s, \quad \forall \tau \in \Phi_{T^*}, \\ \int_{\Omega} -\Delta U \tau w_j(T^*) + \int_{\Omega} \operatorname{div} [(-\Delta u(T^*) - f) \tau] w_j(T^*) dx \\ \quad + \int_{\Omega} (-\Delta u(T^*) - f) R_j \tau dx = 0. \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

Passons maintenant au *calcul correct* de la dérivée de $u(T)$ par rapport à la triangulation T . Pour cela on transporte le problème (2.4) sur la triangulation

fixée T^* , ce qui est naturel d'après la définition de \mathcal{T} . Soit $T \in \mathcal{T}$. D'après le théorème 2.1 on a

$$\exists ! (I + \varphi) \in \beta, \quad \varphi \in \Phi_{T^*}, \quad \text{tel que } (I + \varphi) T^* = T. \tag{3.7}$$

Comme $u(T) \in V(T)$, on peut l'écrire sous la forme

$$u(T) = \sum_{i=1}^s u^i(T) w_i(T), \tag{3.8}$$

avec $u^i(T) \in \mathbb{R}, i = 1 \dots s$.

Posons

$$\begin{aligned} \bar{u}(\varphi) &= u[(I + \varphi) T^*] \circ (I + \varphi), \\ \bar{w}^i(\varphi) &= w_i[(I + \varphi) T^*] \circ (I + \varphi) \quad \text{et} \quad \bar{u}^i(\varphi) = u^i[(I + \varphi) T^*]. \end{aligned}$$

On a

$$\bar{u}(\varphi) = \sum_{i=1}^s \bar{u}^i(\varphi) \bar{w}^i(\varphi). \tag{3.9}$$

Remarquons que $\bar{w}^i(\varphi)$ n'est pas en général dans $V(T^*)$ sauf dans le cas des espaces $V(T)$ construits avec des éléments de Lagrange [11]. Nous allons démontrer que $\varphi \rightarrow \bar{u}(\varphi)$ est dérivable au point 0 et pour cela on démontre que $\varphi \rightarrow \bar{w}^i(\varphi), i = 1 \dots s$ et $\varphi \rightarrow [\bar{u}^i(\varphi)]_{i=1}^s$ sont dérivables.

Soient δ_{ij} le symbole de Kronecker, ∂_1 et ∂_2 les dérivées dans les directions e_1 et e_2 respectivement et $a_i, i = 1 \dots p$ les sommets des triangles de T et $c_l, l = 1 \dots q$ leurs centres de gravité.

On définit les fonctions de base de $V(T)$ comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \forall i = 1 \dots p, \quad \forall j = 1 \dots p, \quad \forall l = 1 \dots q, \quad \forall m = 1 \dots q, \\ w_j^\alpha(T), \quad \alpha = 0, 1, 2, \quad w_l^c(T) \in H_0^1(\Omega), \\ w_j^\alpha(T)|_K, \quad \alpha = 0, 1, 2, \quad w_l^c(T)|_K \in P^3(K), \quad \forall K \in T. \\ w_j^0(T)(a_i) = \delta_{ij}, \\ \partial_1 w_j^0(T)(a_i) = \partial_2 w_j^0(T)(a_i) = w_j^0(T)(c_l) = 0, \\ \partial_1 w_j^1(T)(a_i) = \delta_{ij}, \\ w_j^1(T)(a_i) = \partial_2 w_j^1(T)(a_i) = w_j^1(T)(c_l) = 0, \\ \partial_2 w_j^2(T)(a_i) = \delta_{ij}, \\ w_j^2(T)(a_i) = \partial_1 w_j^2(T)(a_i) = w_j^2(T)(c_l) = 0, \\ w_l^c(T)(c_m) = \delta_{lm}, \\ w_l^c(T)(a_i) = \partial_1 w_l^c(T)(a_i) = \partial_2 w_l^c(T)(a_i) = 0, \end{aligned} \right\} \tag{3.10}$$

où $s = 3p + q$.

L'ensemble des degrés de liberté étant unissolvent il est bien connu (cf. par exemple [4]) que ces relations caractérisent les fonctions de base.

Posons

$$\bar{w}_j^\alpha(\varphi) = w_j^\alpha(T) \circ (I + \varphi), \quad \alpha = 0, 1, 2$$

et

$$\bar{w}_i^\epsilon(\varphi) = w_i^\epsilon(T) \circ (I + \varphi).$$

LEMME 3.1 : Les fonctions $\varphi \rightarrow \bar{w}_j^\alpha(\varphi)$, $\forall \alpha = 0, 1, 2, \forall j = 1 \dots p$ et $\varphi \rightarrow \bar{w}_i^\epsilon(\varphi)$, $\forall l = 1 \dots q$ sont dérivables en 0, de φ_{T^*} , à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ et on a, $\forall \tau \in \Phi_{T^*}$:

$$\left. \begin{aligned} \forall j = 1 \dots p, \quad \forall l = 1 \dots q, \\ \frac{\partial \bar{w}_j^0(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{K^*} (0) \cdot \tau = r_j^0 \tau = 0, \\ \frac{\partial \bar{w}_j^1(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{K^*} (0) \cdot \tau = r_j^1 \tau = (e_1, \tau' e_1) w_j^1(T^*) + (e_1, \tau' e_2) w_j^2(T^*), \\ \frac{\partial \bar{w}_j^2(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{K^*} (0) \cdot \tau = r_j^2 \tau = (e_2, \tau' e_1) w_j^1(T^*) + (e_2, \tau' e_2) w_j^2(T^*), \\ \frac{\partial \bar{w}_i^\epsilon(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{K^*} (0) \cdot \tau = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

où le produit (\cdot, \cdot) représente le produit scalaire dans R^2 et où τ' est la matrice dérivée de τ , $(e_i, \tau' e_j) = \partial \tau_j / \partial x_i$.

Démonstration : On démontre seulement le résultat pour la fonction $\bar{w}_j^1(\varphi)$.

On établirait de façon analogue les résultats relatifs à $\bar{w}_j^0(\varphi)$, $\bar{w}_j^2(\varphi)$, $\bar{w}_i^\epsilon(\varphi)$. De (3.10), de

$$T = (I + \varphi) T^*, \quad a_j = (I + \varphi) a_j^*, \quad c_l = (I + \varphi) c_l^*$$

et de

$$(\nabla u) \circ (I + \varphi) = {}^t(I + \varphi)^{\prime - 1} \nabla (u \circ \varphi),$$

on déduit que $\bar{w}_j^1(\varphi)$ est caractérisé par

$$\left. \begin{aligned} \forall i = 1 \dots p, \quad \forall j = 1 \dots p, \quad \forall l = 1 \dots q, \\ \bar{w}_j^1(\varphi)(a_i^*) = 0, \\ ({}^t(I + \varphi)^{\prime - 1} \nabla \bar{w}_j^1(\varphi), e_1)(a_i^*) = \delta_{ij}, \\ ({}^t(I + \varphi)^{\prime - 1} \nabla \bar{w}_j^1(\varphi), e_2)(a_i^*) = 0, \\ \bar{w}_j^1(\varphi)(c_l^*) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

On rappelle (cf L Schwartz [13]) une variante du théorème des fonctions implicites que nous utiliserons plusieurs fois dans ce travail

Soient E, F, G des espaces de Banach et g une fonction,

$$g \in C^1(F \rightarrow G) \text{ verifiant } g(x_0, y_0) = 0$$

S'il existe $h \in C^1(E \rightarrow F)$ telle que

- (1) $g(x, h(x)) = 0, h(x_0) = y_0, h$ continue en $x_0,$
- (2) g est Frechet différentiable en $(x_0, y_0),$
- (3) $\partial g / \partial y(x_0, y_0)$ est un isomorphisme de $F \rightarrow G,$

alors h est dérivable en x_0 et $\partial h / \partial x(x_0)$ est définie par

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial h}{\partial x}(x_0) = 0$$

(3 13)

Notons que ce théorème suppose comme *a priori* l'existence d'une fonction implicite h mais que l'hypothèse (3) est un peu moins forte que celle qu'on fait habituellement

On utilise ce théorème en considérant la restriction de $\bar{w}_j^{-1}(\varphi)$ à un triangle K^* de T^* . On a alors $E = P^1(K^*), F = P^3(K^*),$ et $G = R^{10}$. En utilisant le fait que l'application $\varphi \rightarrow (I + \varphi)^{-1}$ définie de $[P^1(K^*)]^2$ à valeurs dans $[L^\infty(K^*)]^4$ est dérivable en 0 et a pour dérivée

$$\forall \tau \in [P^1(K^*)]^2, \frac{\partial [I + (\varphi)^{-1}]}{\partial \varphi}(0) \tau = -\tau', \tag{3 14}$$

on obtient facilement que

$$\varphi \rightarrow \bar{w}_j^{-1}(\varphi)|_{K^*}, \tag{3 15}$$

est dérivable de $[P^1(K^*)]^2$ dans $P^3(K^*)$ et que sa dérivée

$$\frac{\partial \bar{w}_j^{-1}(\varphi)|_{K^*}}{\partial \varphi}(0) \tau = r_j^1 \tau,$$

est donnée par,

$$\left. \begin{aligned} \forall i=1 \quad p, \quad \forall j=1 \quad p, \quad \forall l=1 \quad q, \\ [r_j^1 \tau](a_i^*) = 0, \\ [\nabla r_j^1 \tau](a_i^*) = {}^t \tau' \nabla w_j^1(T^*)(a_i^*) = {}^t \tau' e_1 \delta_{ij}, \\ [r_j^1 \tau](c_i^*) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{3 16}$$

On a donc

$$r_j^1 \tau = (e_1, \tau' e_1) w_j^1(T^*) + (e_1, \tau' e_2) w_j^2(T^*) \text{ sur } K^*. \quad (3.17)$$

Notons $R_j^1 \tau$ la fonction définie sur Ω telle que

$$\forall K^* \in T^*, \quad R_j^1 \tau|_{K^*} = r_j^1 \tau.$$

Nous allons démontrer que $R_j^1 \tau \in H_0^1(\Omega)$. Il suffit pour cela de vérifier que $R_j^1 \tau$ est continue sur les arêtes de T^* puisque $R_j^1 \tau$ est un polygone de degré 3 sur chaque K^* .

Considérons deux triangles adjacents K^* et \hat{K}^* (voir fig. 1).

Si $\tau \in \Phi_{T^*}$, on a

$$\left. \begin{aligned} \tau|_{K^*} &= A^1 x + b^1, \\ \tau|_{\hat{K}^*} &= A^2 x + b^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

où A^1 et A^2 sont des matrices réelles 2×2 .

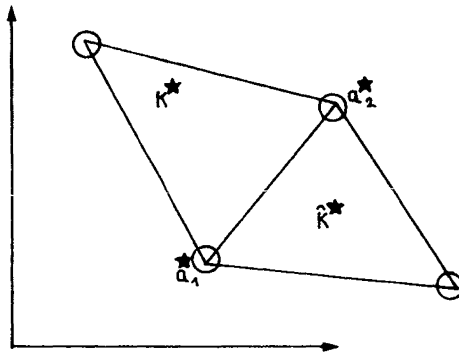


Fig. 1

Du fait que $\tau \in [C^0(\Omega)]^2$ on déduit, en écrivant la continuité sur $\overline{a_1^* a_2^*}$, que

$$A^1 (a_2^* - a_1^*) = A^2 (a_2^* - a_1^*). \quad (3.19)$$

D'autre part, de

$$\left. \begin{aligned} [\nabla r_j^1 \tau] (a_i^*) &= {}^t \tau' e_1 \delta_{ij}, \\ [\nabla \hat{r}_j^1 \tau] (a_i^*) &= {}^t \tau' e_1 \delta_{ij} \\ \hat{r}_j^1 \tau &= \frac{\partial \bar{w}_j^1(\varphi)|_{K^*}}{\partial \varphi} (0) \cdot \tau, \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

avec

on déduit que :

$$\left. \begin{aligned} (\nabla r_j^1 \tau, a_2^* - a_1^*)(a_i^*) &= ({}^t \tau' e_1, a_2^* - a_1^*) \delta_{ij} = (e_1, A^1 (a_2^* - a_1^*)) \delta_{ij}, \\ (\nabla \hat{r}_j^1 \tau, a_2^* - a_1^*)(a_i^*) &= (e_1, A^2 (a_2^* - a_1^*)) \delta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

$r_j^1 \tau$ et $\hat{r}_j^1 \tau$ sont deux polynômes de degré 3 sur $a_2^* - a_1^*$ qui ont les mêmes valeurs en a_1^* et a_2^* et dont les dérivées aux mêmes points et dans la direction $a_2^* - a_1^*$ coïncident grâce à (3.21). On a donc $R_j^1 \tau \in H_0^1(\Omega)$, mais $R_j^1 \tau \notin V(T^*)$ (cf. [11]). Du fait que

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \sum_{K^* \in T^*} \|u\|_{1,K^*}^2 \quad (3.22)$$

il est équivalent de démontrer que l'application $\varphi \rightarrow \bar{w}_j^1(\varphi)$ est dérivable à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ ou de démontrer que $\varphi \rightarrow \bar{w}_j^1(\varphi)|_{K^*}$ est dérivable et que $R_j^1 \tau \in H_0^1(\Omega)$. Cela termine la démonstration. ■

LEMME 3.2 : $\forall \varphi \in \Phi_{T^*}, [\bar{u}^i(\varphi)]_{i=1}^s$ est solution unique du système linéaire,

$$\forall j=1 \dots s,$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} {}^t(I+\varphi)^{\prime-1} \left(\nabla \sum_{i=1}^s \bar{u}^i(\varphi) \bar{w}_i(\varphi) \right) {}^t(I+\varphi)^{\prime-1} \nabla \bar{w}_j(\varphi) |\det(I+\varphi)'| dx \\ = \int_{\Omega} f \circ (I+\varphi) \bar{w}_j(\varphi) |\det(I+\varphi)'| dx. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Démonstration : On considère (2.4) avec

$$u(T) = \sum_{i=1}^s u^i(T) w_i(T) \quad \text{et} \quad v(T) = w_j(T), \quad j=1 \dots s.$$

$(I+\varphi)$ étant un difféomorphisme on applique à (2.4) la formule de transport de l'intégrale

$$\int_{(I+\varphi)\Omega} g dx = \int_{\Omega} g \cdot (I+\varphi) |\det(I+\varphi)'| dx, \quad (3.24)$$

et la formule :

$$(\nabla u) \circ (I+\varphi) = {}^t(I+\varphi)^{\prime-1} \nabla (u \circ \varphi). \quad (3.24)$$

Remarquant que $(I+\varphi)\Omega = \Omega$ on en déduit (3.23). ■

Énonçons un lemme qui jouera un rôle important dans la suite (cf. Murat-Simon [8, 9]) :

LEMME 3.3 : $\forall u \in H^1(\Omega), \forall \tau \in [W^{1, \infty}(\Omega)]^2$ on a

$$-\Delta(\nabla u \cdot \tau) + \operatorname{div}(\Delta u \cdot \tau) = \operatorname{div}[(\tau - \tau' + \operatorname{div} \tau) \nabla u]. \tag{3.26}$$

Désignons par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

LEMME 3.4 : *L'application $\varphi \rightarrow [\bar{u}^i(\varphi)]_{i=1}^s$ est dérivable de Φ_T à valeurs dans \mathbf{R}^s au point O et la dérivée*

$$\frac{\hat{c}[\bar{u}^i(\varphi)]_{i=1}^s}{\hat{c}\varphi}(0) \cdot \tau = [Y^i \tau]_{i=1}^s$$

est, pour tout $\tau \in \Phi_T$, la solution unique de l'équation,

$$\forall j = 1 \dots s, \quad \forall \tau \in \Phi_T,$$

$$\begin{aligned} \langle -\Delta \left[\sum_{i=1}^s u^i(T^*) R_i \tau + Y^i \tau w_i(T^*) \right] - \Delta u(T^*) \cdot \tau + \operatorname{div} [(-\Delta u(T^*) - f) \tau], w_j(T^*) \rangle \\ + \int_{\Omega} \nabla u(T^*) \nabla R_j \tau \, dx - \int_{\Omega} f R_j \tau \, dx = 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Démonstration : Commençons par vérifier que (3.27) a un sens; il suffit de remarquer que grâce au lemme 3.3 $\Delta(\nabla u(T^*) \cdot \tau) - \operatorname{div} \Delta u(T^*) \tau \in H^{-1}(\Omega)$.

Nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites énoncé en 3.13, et les résultats techniques suivants (cf. Murat-Simon [8, 9]).

Les applications

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow |\det(I + \varphi)'|, \\ \varphi &\rightarrow \varphi'^{-1}, \\ \varphi &\rightarrow f_0(I + \varphi), \end{aligned}$$

sont dérivables (et donc *a fortiori* continues) de $W^{1, \infty}(R^2, R^2)$ à valeurs respectivement dans $L^\infty(R^2)$, $[L^\infty(R^2)]^4$ et $L^2(R^2)$ et on a

$$\left. \begin{aligned} \forall \tau \in W^{1, \infty}(R^2, R^2) \\ \frac{\partial |\det(I + \varphi)'|}{\partial \varphi}(0) \cdot \tau = \operatorname{div} \tau, \\ \frac{\partial (\varphi'^{-1})}{\partial \varphi}(0) \cdot \tau = -\tau', \\ \frac{\partial f_0(I + \varphi)}{\partial \varphi}(0) \cdot \tau = \nabla f \cdot \tau. \end{aligned} \right\} \tag{3.28}$$

$[\bar{u}^i(\varphi)]_{i=1}^s$ est la solution du système linéaire

$$[A(\varphi)] [\bar{u}^i(\varphi)]_{i=1}^s = [f^j(\varphi)]_{j=1}^s, \tag{3.29}$$

où $[A(\varphi)]$ est la matrice des coefficients

$$\int_{\Omega} {}^t(I + \varphi)^{\prime -1} \nabla \bar{w}_i(\varphi) {}^t(I + \varphi)^{\prime -1} \nabla \bar{w}_j(\varphi) | \det(I + \varphi)^{\prime} |$$

et

$$f^j(\varphi) = \int_{\Omega} f \circ (I + \varphi) \bar{w}_j(\varphi) | \det(I + \varphi)^{\prime} | dx$$

(1) L'application $\varphi \rightarrow [\bar{u}^i(\varphi)]_{i=1}^s$ est continue de Φ_{T^*} dans \mathbb{R}^s en $\varphi = 0$. Il suffit de remarquer que la solution $[\bar{u}^i(\varphi)]_{i=1}^s$ du système (3.29) est continue par rapport aux coefficients et au deuxième membre, et que ceux-ci sont continus par rapport à φ .

(2) L'application $\mathcal{F} : \Phi_{T^*} \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ défini par

$$\mathcal{F}(\varphi, [\bar{u}^i]_{i=1}^s) = [A(\varphi)] [\bar{u}^i]_{i=1}^s - [f^j(\varphi)]_{j=1}^s,$$

est dérivable en $(0, u^i(T^*))$

Cela résulte facilement du lemme 3.1 et de (3.28) et on a

$$\left. \begin{aligned} &\forall (v^i)_{i=1}^s \in \mathbb{R}^s, \\ &\frac{\partial [A(\varphi) [\bar{u}^i]_{i=1}^s]}{\partial [\bar{u}^i]_{i=1}^s} [u^i(T^*)]_{i=1}^s (v^i)_{i=1}^s = A(\varphi) \cdot [v^i]_{i=1}^s. \end{aligned} \right\} \tag{3.30}$$

$$\left. \begin{aligned} &\forall \tau \in \Phi_{T^*}, \\ &\frac{\partial [A(\varphi) [\bar{u}^i]_{i=1}^s]}{\partial \varphi} (0) \cdot \tau \\ &= \left[\sum_{i=1}^s \left\{ \int_{\Omega} (-{}^t\tau' - \tau' + \text{div } \tau) \nabla w_i(T^*) \cdot \nabla w_j(T^*) \right. \right. \\ &+ \left. \int_{\Omega} \nabla R_i \tau \cdot \nabla w_j(T^*) + \int_{\Omega} \nabla w_i(T^*) \cdot \nabla R_j \tau \right\} \bar{u}^i \Big]_{j=1}^s \\ &= \left[\int_{\Omega} (-\tau' - {}^t\tau' + \text{div } \tau) \nabla u(T^*) \cdot \nabla w_j(T^*) \right. \\ &+ \left. \int_{\Omega} \nabla u(T^*) \cdot \nabla R_j \tau + \sum_{i=1}^s \bar{u}^i \int_{\Omega} \nabla R_i \tau \cdot \nabla w_j(T^*) \right]_{j=1}^s \end{aligned} \right\} \tag{3.31}$$

D'après le lemme 3.3, (3.31) devient :

$$\left. \begin{aligned} & \forall \tau \in \Phi_{T^*}, \\ & \frac{\partial [A(\varphi)(\bar{u}')_{i=1}^s]}{\partial \varphi}(0) \cdot \tau = \left[\langle \Delta(\nabla u(T^*) \cdot \tau) - \operatorname{div}(\Delta u(T^*) \tau), w_j(T^*) \rangle \right. \\ & \left. - \langle \Delta \left(\sum_{i=1}^s \bar{u}' R_i \tau \right), w_j(T^*) \rangle + \int_{\Omega} \nabla u(T^*) \cdot \nabla R_j \tau \right]_{j=1}^s. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

$$\left. \begin{aligned} & \forall \tau \in \Phi_{T^*}, \\ & \frac{\partial [f^j(\varphi)]_{j=1}^s}{\partial \varphi}(0) \cdot \tau = \langle \nabla f \cdot \tau, w_j(T^*) \rangle + \int_{\Omega} f \operatorname{div} \tau w_j(T^*) \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

(3) Enfin

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial [\bar{u}']_{i=1}^s}(0) \cdot [u'(T^*)]_{i=1}^s$$

est un isomorphisme de R^s sur R^s

En effet, étant donné $[g^i]_{i=1}^s \in R^s$, le problème en dimension finie,

$$\left\langle -\Delta \left[\sum_{i=1}^s X^i w_i(T^*) \right], w_j(T^*) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^s g^i w_i(T^*), w_j(T^*) \right\rangle, \quad (3.34)$$

admet une solution unique $[X^i]_{i=1}^s \in R^s$.

De (1), (2) et (3) on conclut la dérivabilité, et l'expression (3.27) de la dérivée. ■

D'après les lemmes 3.1 et 3.4 et puisque $\bar{u}(\varphi) = \sum_{i=1}^s \bar{u}^i(\varphi) \bar{w}_i(\varphi)$, on voit que l'application $\varphi \rightarrow \bar{u}(\varphi)$ est dérivable et si on note sa dérivée $Y \tau = \partial \bar{u}(\varphi) / \partial \varphi(0) \cdot \tau$, on a

$$Y \tau = \sum_{i=1}^s Y^i \tau w_i(T^*) + u'(T^*) R_i \tau, \quad (3.35)$$

c'est-à-dire que l'on a le :

THÉORÈME 3.1 : L'application $\varphi \rightarrow \bar{u}(\varphi)$ est dérivable de Φ_{T^*} à valeurs dans $H^1(\Omega)$ au point 0 et $Y\tau$ est la solution unique de

$$\left. \begin{aligned} & \forall j=1 \dots s, \quad \forall \tau \in \Phi_{T^*}, \\ & \langle -\Delta(Y\tau - \nabla u(T^*) \cdot \tau) + \operatorname{div}(-\Delta u(T^*) - f)\tau, w_j(T^*) \rangle \\ & + \int_{\Omega} \nabla u(T^*) \cdot \nabla R_j \tau \, dx - \int_{\Omega} f R_j \tau \, dx = 0, \\ & Y\tau - \sum_{i=1}^s u^i(T^*) R_i \tau \in V(T^*). \quad \blacksquare \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

REMARQUE 3.1 : D'après le lemme 3.3, (3.36) a un sens puisque

$$\Delta(\nabla u(T^*) \cdot \tau) - \operatorname{div}(\Delta u(T^*) \tau) \in H^{-1}(\Omega). \quad \blacksquare$$

THÉORÈME 3.2 : L'application $T \rightarrow u(T)$ est dérivable de \mathcal{T} dans $L^2(\Omega)$ au point T^* et si on note $\partial u(T)/\partial T(T^*) \cdot \tau = U\tau$, on a

$$U\tau = Y\tau - \nabla u(T^*) \cdot \tau \quad (3.37)$$

et $U\tau$ est la solution unique de

$$\left. \begin{aligned} & \forall j=1 \dots s, \quad \forall \tau \in \Phi_{T^*}, \\ & \langle -\Delta U\tau + \operatorname{div}[(-\Delta u(T^*) - f)\tau], w_j(T^*) \rangle \\ & + \int_{\Omega} \nabla u(T^*) \cdot \nabla R_j \tau - \int_{\Omega} f R_j \tau \, dx = 0, \\ & U\tau - \sum_{i=1}^s u^i(T^*) R_i \tau + \nabla u(T^*) \cdot \tau \in V(T^*). \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Démonstration : Si $T = (I + \varphi)T^*$ on a $u(T) = \bar{u}(\varphi) \circ (I + \varphi)^{-1}$. On conclut (3.37) et (3.38) du théorème 3.1 et du résultat suivant (cf. Murat-Simon [8]) :

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{Si } \varphi \rightarrow \bar{u}(\varphi) \text{ est dérivable en } 0 \text{ de } W^{1, \infty}(R^2, R^2) \text{ à valeurs dans } H^1(\Omega) \text{ alors} \\ & \text{l'application } \varphi \rightarrow \bar{u}(\varphi) \circ (I + \varphi)^{-1} \text{ est dérivable en } 0 \text{ de } W^{1, \infty}(R^2, R^2) \text{ à} \\ & \text{valeurs dans } L^2(\Omega) \text{ et on a} \\ & \frac{\partial [\bar{u}(\varphi) \circ (I + \varphi)^{-1}]}{\partial \varphi}(0) \cdot \tau = \frac{\partial \bar{u}(\varphi)}{\partial \varphi}(0) \cdot \tau - \nabla u(T^*) \cdot \tau. \quad \blacksquare \end{aligned} \right.$$

On obtient alors l'expression de la dérivée de l'erreur $|u - u(T)|_{1, \Omega}^2$ comme conséquence des lemmes 2.1 et des théorèmes 3.1 et 3.2.

THÉORÈME 3.3 : L'application $T \rightarrow |u - u(T)|_{1,\Omega}^2$ est dérivable de \mathcal{T} dans R au point T^* et on a, $\forall \tau \in \Phi_{T^*}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (|u - u(T)|_{1,\Omega}^2)}{\partial T}(T^*) \cdot \tau &= - \int_{\Omega} f U \tau \, dx, \\ U \tau &\text{ solution de (3.30).} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

REMARQUE 3.2 : Si l'espace $V(T)$ était construit avec des éléments de Lagrange on aurait $(I = \varphi) V(T) = V[(I + \varphi) T]$. Dans ce cas on aurait, en faisant un choix convenable des fonctions de base $W_j(T)$,

$$R_j \tau = 0, \quad \forall j = 1 \dots s, \quad Y \tau \in V(T^*)$$

et $U \tau$ solution de

$$\langle -\Delta U \tau + \operatorname{div}(-\Delta u(T^*) - f) \tau, w_j(T^*) \rangle = 0, \quad \forall j = 1 \dots s.$$

Dans (3.38) on peut interpréter formellement $\langle \operatorname{div}(-\Delta u(T^*) - f) \tau, w_j(T^*) \rangle$ comme un « reste » dû à l'approximation par la méthode des éléments finis et

$$\int_{\Omega} \nabla u(T^*) \cdot \nabla R_j \tau \, dx - \int_{\Omega} f R_j \tau \, dx$$

comme un « reste » dû au fait que $V(T)$ est construit avec des éléments finis d'Hermite. ■

4. CONCLUSIONS

Le calcul de la dérivée de l'erreur par rapport à T (th. 3.3) nous permet d'établir les conditions nécessaires d'optimalité.

THÉORÈME 4.1 : Si l'application $T \rightarrow |u - u(T)|_{1,\Omega}^2$ définie de \mathcal{T} dans R atteint son minimum sur \mathcal{T} , en un point T^* , on a

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} f U \tau \, dx &\leq 0, \\ U \tau &\text{ solution de (3.30).} \end{aligned} \right\} \quad (4.1) \quad \blacksquare$$

Le calcul de la dérivée par rapport à la triangulation est équivalent au calcul de la dérivée par rapport aux coordonnées des nœuds, mais il a l'avantage d'avoir un cadre théorique assez général puisque les expressions obtenues sont valables pour n'importe quel espace d'éléments finis $V(T)$ contenu dans $C^0(\Omega)$.

Supposons par exemple que $V(T)$ est construit avec des fonctions affines par morceaux et calculons à partir de (3.39) la dérivée relativement au nœud a_k . Si nous supposons que seul ce nœud bouge, les autres étant fixés, la fonction τ peut s'écrire :

$$\tau = \alpha \cdot w_k(T) \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}^2. \tag{4.2}$$

Nous retrouvons alors l'analogie du résultat de Marocco-Pironneau [6] :

LEMME 4.1 : La dérivée de l'erreur $|u - u(T)|_{1,\Omega}^2$ par rapport à a_k est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\int_{\Omega} f u(T) dx \right)}{\partial a_k} &= - \int_{\Omega} (\nabla u(T^*) \cdot \nabla u(T^*)) \left(\nabla w_k(T^*) \cdot \frac{\alpha}{|\alpha|} \right) \\ &+ 2 \int_{\Omega} \left(\nabla u(T^*) \cdot \frac{\alpha}{|\alpha|} \right) (\nabla w_k(T^*) \cdot \nabla u(T^*)) dx \\ &- 2 \int_{\Omega} f \left(\nabla u(T^*) \cdot \frac{\alpha}{|\alpha|} \right) w_k(T^*) dx. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Démonstration : On a

$$\int_{\Omega} f U \tau = \int_{\Omega} f Y \tau - \int_{\Omega} f \nabla u(T^*) \cdot \tau. \tag{4.4}$$

Du fait que $Y \tau \in V(T^*)$ (4.4) peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} f U \tau = \int_{\Omega} \nabla u(T^*) \cdot \nabla Y \tau - \int_{\Omega} f \nabla u(T^*) \cdot \tau. \tag{4.5}$$

Combinant avec (3.36) on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f U \tau dx &= \langle -\Delta(\nabla u(T^*) \cdot \tau) + \text{div}(u(T^*) \cdot \tau) \\ &+ \text{div} f \tau, u(T^*) \rangle - \int_{\Omega} f \nabla u(T^*) \cdot \tau. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Utilisant dans (4.6) le lemme 3.3 on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f U \tau dx &= - \int_{\Omega} [\nabla u(T^*)]^2 \text{div} \tau dx \\ &+ 2 \int_{\Omega} \tau' \nabla u(T^*) \cdot \nabla u(T^*) dx - 2 \int_{\Omega} f \tau \cdot \nabla u(T^*) dx. \end{aligned} \tag{4.7}$$

