RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

P. DESTUYNDER
M. DJAOUA

Estimation de l'erreur sur le coefficient de la singularité de la solution d'un problème elliptique sur un ouvert avec coin

RAIRO. Analyse numérique, tome 14, n° 3 (1980), p. 239-248
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1980__14_3_239_0>

R A I R O Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol 14, n° 3, 1980, p 239 à 248)

ESTIMATION DE L'ERREUR SUR LE COEFFICIENT DE LA SINGULARITÉ DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE SUR UN OUVERT AVEC COIN (*)

par P. DESTUYNDER [1] et M. DJAOUA [1]

Communiqué par P G CIARLET

Résumé — *Dans l'approximation par éléments finis d'un problème singulier du second ordre dans le plan, l'adjonction d'une fonction singulière permet de préserver l'ordre de convergence de la méthode*

Nous proposons ici une méthode d'éléments finis qui nous permet d'estimer l'erreur commise sur le coefficient de cette fonction Pour des éléments linéaires par morceaux, nous trouvons $O(h^{1-(\Pi/\omega)})$, ω *désignant l'angle de la singularité du domaine*

Abstract — *In the approximation by finite element methods of singular second order problems, it is possible to preserve the rate of convergence by introducing a singular function*

In this paper we describe a finite element scheme which leads to an error estimate on the coefficient of this function For piecewise linear elements, we obtain $O(h^{1-(\Pi/\omega)})$, ω *being the angle of the domain which induces the singularity*

1. INTRODUCTION

Dans ce travail nous nous intéressons à l'approche numérique du problème suivant

On désigne par Ω un ouvert borné du plan (*fig.* 1), présentant une singularité due à un angle ω supérieur à Π.

Le problème continu est alors de trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega; \tag{1}$$

f étant une fonction donnée sur Ω, dont la régularité sera précisée ultérieurement. La difficulté repose sur le fait que la solution u de (1) n'est pas dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, ce qui permettrait d'obtenir un ordre d'erreur optimal

(*) Reçu octobre 1979
[1] École polytechnique, Centre de Mathématiques appliquées, 91128 Palaiseau

dans une approximation par éléments finis affinés. Néanmoins, on sait que cette solution peut s'écrire sous la forme

$$u = u_r + \alpha S, \tag{2}$$

avec $u_r \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et S désignant une fonction de $H_0^1(\Omega)$, qui au voisinage du sommet O (*fig.* 1), est de la forme

$$S(r, \Theta) = r^{\Pi/\omega} \sin \frac{\Theta\Pi}{\omega}. \tag{3}$$

On en déduit le résultat suivant (Grisvard [5]) :

PROPOSITION 1 : *L'opérateur* $-\Delta$ *définit un isomorphisme entre les espaces*

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \oplus \{S\} \qquad et \qquad L^2(\Omega)$$

($\oplus$ *désignant la somme directe entre espace*). ■

Le coefficient α qui intervient dans (2) joue un rôle important dans la pratique; en aérodynamique il caractérise la portance de l'écoulement autour d'un profil à pointe (Djaoua [4]); en mécanique il est utilisé dans la plupart des critères de propagation de fissure (Bui [2]). Nous proposons dans ce travail une méthode d'éléments finis qui nous permettra d'estimer ce coefficient. Dans la suite nous utiliserons une extension de la proposition 1 due à Grisvard [5].

PROPOSITION 2 : *Si* $p \geq 2$ *est suffisamment voisin de* 2, *l'opérateur* $-\Delta$ *définit un isomorphisme entre les espaces*

$$\{S\} \oplus W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \qquad et \qquad L^p(\Omega). \quad ■$$

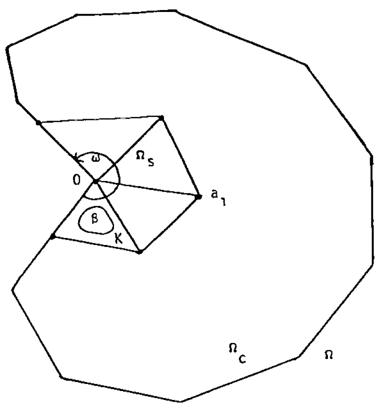

Figure 1

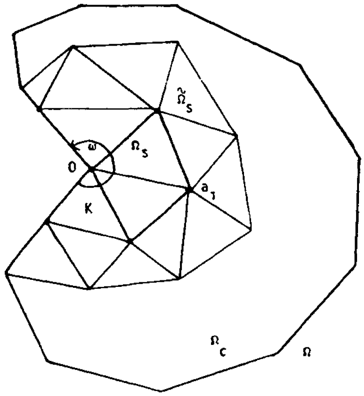

Figure 2

2. LE PROBLÈME APPROCHE

Soit $\mathcal{T}_h$ une famille régulière de triangulations de l'ouvert Ω, à l'aide de triangles K dont la dimension maximale est h. Si O est le sommet de l'angle ω (*fig.* 1), nous poserons

$$W_h = \{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega),\ v_{h|K} \in p_1(K),\ v_{h|K} \equiv 0, \text{ si } K \text{ a } O \text{ pour sommet} \}. \quad (4)$$

W_h est un sous-espace, de dimension finie, de $H_0^1(\Omega)$.

On définit ensuite

$$V_h = W_h \oplus \{ S \}, \quad (5)$$

où S est la fonction « singulière » de $H_0^1(\Omega)$, dont le comportement au voisinage de O est donnée par (3).

Le problème approché est alors défini par

Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_\Omega \operatorname{grad} u_h . \operatorname{grad} v_h = \int_\Omega f v_h . \quad (6)$$

Le problème (6) admet une solution unique car l'approximation est interne.

Nous écrirons la solution de (6) sous la forme suivante :

$$u_h = w_h + \alpha_h S. \quad (7)$$

Nous avons alors les résultats d'approximation suivants :

PROPOSITION 3 : *Si $f \in L^p(\Omega)$, p suffisamment voisin de deux et $p>2$, alors il existe une constante $C>0$, telle que*

$$\| u-u_h \|_{1,\Omega} \leqq C h \| u_r \|_{2,p,\Omega} . \quad \blacksquare \tag{8}$$

PROPOSITION 4 : *Sous les mêmes hypothèses qu'à la proposition 3, il existe une constante $C>0$ telle que si q est le conjugué de p, alors :*

$$\| u-u_h \|_{0,q,\Omega} \leqq C h^2 \| u_r \|_{2,p,\Omega} . \quad \blacksquare \tag{9}$$

Preuve de la proposition 3 : Nous obtenons tout d'abord l'estimation classique

$$\| u-u_h \|_{1,\Omega} \leqq C \inf_{v_h \in V_h} \| u-v_h \|_{1,\Omega}$$

et en choisissant $v_h = r_h u_r + \alpha S$, nous obtenons :

$$\| u-u_h \|_{1,\Omega} \leqq C \| r_h u_r - u_r \|_{1,\Omega} \tag{10}$$

($r_h u_r$ désignant l'interpolé de u_r dans W_h).

Soit alors Ω_s la réunion de tous les triangles ayant O pour sommet (*fig.* 2). Il est important de remarquer que $r_h u_r \equiv 0$ sur Ω_s. Nous introduirons l'opérateur d'interpolation de Lagrange de degré 1 sur tout Ω, soit Π_h. Les estimations de Ciarlet-Raviart [3] conduisent à

$$\begin{aligned} \| u_r - r_h u_r \|_{1,\Omega} &\leqq \| u_r - \Pi_h u_r \|_{1,\Omega} + \| \Pi_h u_r - r_h u_r \|_{1,\Omega} \\ &\leqq C h | u_r |_{2,\Omega} + \| \Pi_h u_r - r_h u_r \|_{1,\Omega} . \end{aligned} \tag{11}$$

Mais d'après les définitions respectives de Π_h et de r_h, le support de $\Pi_h u_r - r_h u_r$ est limité aux deux premières couches d'éléments finis [2], que nous noterons $\tilde{\Omega}_s$. Puisque $\Pi_h u_r - r_h u_r$ est une fonction affine sur chaque triangle K, nous avons en utilisant une inégalité inverse

$$\| \Pi_h u_r - r_h u_r \|_{1,\Omega} \leqq C h^{-1} \| \Pi_h u_r - r_h u_r \|_{0,\Omega} = C h^{-1} \| \Pi_h u_r - r_h u_r \|_{0,\tilde{\Omega}_s} .$$

Utilisons à présent l'inégalité de Hölder. On obtient :

$$\begin{aligned} \| \Pi_h u_r - r_h u_r \|_{1,\Omega} &\leqq C h^{-1} [\operatorname{mes}(\tilde{\Omega}_s)]^{1/2} \| \Pi_h u_r - r_h u_r \|_{0,\infty,\tilde{\Omega}_s} \\ &\leqq C \max_{i=1,\ldots,k} | u_r(a_i) | . \end{aligned}$$

[2] C'est-à-dire aux triangles dont l'un des sommets est O, et à ceux qui ont au moins un sommet commun avec eux.

où $\{a_i\}_{i=1,\ldots,k}$ désigne l'ensemble des nœuds de Ω_s, non situés sur Γ.

Ce maximum est donc atteint en un nœud intérieur de la première couche.

Mais de

$$|u_r(a_i)| \leqq \left| \int_0^{a_i} \operatorname{grad} u_r . dl \right| \leqq h |u_r|_{1,\infty,\Omega}$$

et en utilisant l'inclusion de Sobolev [1] ($\Omega_s \subset \mathbb{R}^2$) :

$$W^{2,p}(\Omega) \subset \mathscr{C}^1(\Omega), \qquad \forall p > 2,$$

nous obtenons finalement :

$$\| \Pi_h u_r - r_h u_r \|_{1,\Omega} \leqq C h \| u_r \|_{2,p,\Omega}. \tag{12}$$

La proposition 3 résulte alors de (11) et (12). ■

Preuve de la proposition 4 : Nous utiliserons une technique de dualité due à Aubin et Nitsche. Nous avons ainsi :

$$\| u - u_h \|_{0,q,\Omega} = \sup_{\varphi \in L^p(\Omega)} \frac{\langle \varphi, u - u_h \rangle}{\| \varphi \|_{0,p,\Omega}}$$

et en introduisant ω solution du problème

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta\omega = \varphi \quad \text{sur } \Omega, \\ \omega \in H_0^1(\Omega), \end{array}\right\} \tag{13}$$

nous sommes conduits à

$$\| u - u_h \|_{0,q,\Omega} = \sup_{\varphi \in L^p(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} \omega . \operatorname{grad}(u - u_h)}{\| \varphi \|_{0,p,\Omega}}.$$

On peut associer à (13) un problème approché comme nous l'avons fait en (6); soit ω_h sa solution.

De

$$\int_\Omega \operatorname{grad} \omega \operatorname{grad}(u - u^h) = \int_\Omega \operatorname{grad}(\omega - \omega_h) \operatorname{grad}(u - u_h),$$

nous déduisons à l'aide de la proposition 3 :

$$\| u - u_h \|_{0,q,\Omega} \leqq C h^2 \| u_r \|_{2,p,\Omega} \sup_{\varphi \in L^p(\Omega)} \frac{\| \omega_r \|_{2,p,\Omega}}{\| \varphi \|_{0,p,\Omega}}$$

et la proposition 2 permet de conclure. ■

3. ESTIMATION D'ERREUR SUR LE CŒFFICIENT DE LA SINGULARITÉ

Désignons par β un ouvert, inclus dans l'intérieur de l'un des triangles ayant O pour sommet, et dont l'un des côtés est contenu dans Γ (*fig.* 3).

Désignons par φ une fonction de $\mathscr{D}(K)$ égale à 1 sur β et vérifiant :

$$\left.\begin{aligned} |\varphi|_{0,\infty,K} &= 1, \\ |\varphi|_{1,\infty,K} &\leqq \frac{C}{h}, \\ |\varphi|_{2,\infty,K} &\leqq \frac{C}{h^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

où C désigne une constante indépendante de h.

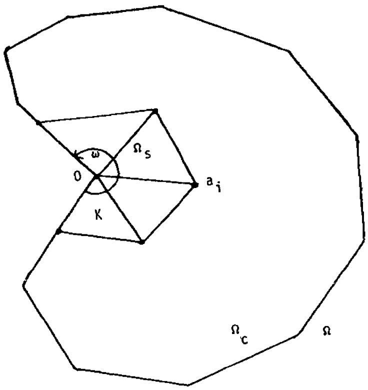

Figure 3

Construisons l'ouvert β de la manière suivante : sachant que la famille de triangulations est régulière, les angles Θ_K des triangles K resteront bornés inférieurement par $\Theta_0 > 0$. Supposons en outre que la triangulation ne comporte pas de triangles « trop petits », c'est-à-dire par exemple :

$$h_K \geqq \frac{h}{2}, \qquad \forall K \in \mathscr{T}_h,$$

où h_K désigne le diamètre de K et h le plus grand côté.

Nous choisissons (*fig.* 4) :

$$\beta = \left\{ (r, \Theta); \frac{\Theta_0}{4} < \Theta < \frac{3\Theta_0}{4}; \frac{h}{8} < r < \frac{3h}{8} \right\}. \tag{15}$$

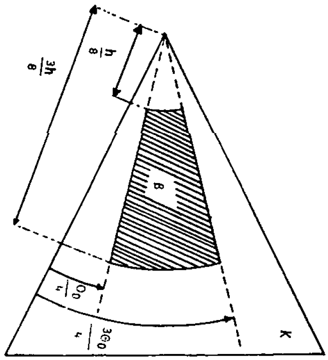

Figure 4

Si η est une fonction de $\mathscr{D}(0, 1)$, identiquement égale à un sur l'intervalle $[1/4, 3/4]$, on peut construire la fonction φ de la manière suivante :

$$\varphi(r, \Theta)=\eta_1(r)\eta_2(\Theta), \tag{16}$$

avec

$$\eta_1(r)=\eta\left(2\frac{r}{h}\right) \tag{17}$$

et

$$\eta_2(\Theta)=\eta\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}\right). \tag{18}$$

On vérifie qu'une telle fonction φ, identiquement égale à un sur l'ouvert β défini par (15), vérifie les propriétés (14).

Nous utiliserons pour le résultat final le :

LEMME 1 : *Il existe une constante positive C, telle que*

$$\forall g \in L^2(K), \quad \|g\|_{-1,K} \leqq C h \|g\|_{0,K}. \quad \blacksquare \tag{19}$$

Preuve : Pour tout élément g de $L^2(K)$, nous avons

$$\|g\|_{-1,K} = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in H_0^1(K)} \frac{\langle g, \varphi \rangle}{|\varphi|_{1,K}} \leqq \|g\|_{0,K} \operatorname*{Sup}_{\varphi \in H_0^1(K)} \frac{\|\varphi\|_{0,K}}{|\varphi|_{1,K}}.$$

Mais d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\forall \varphi \in H_0^1(K), \quad \|\varphi\|_{0,K} \leqq C h |\varphi|_{1,K}$$

et finalement, nous obtenons bien (15). $\blacksquare$

Voici, pour terminer l'objet de ce travail :

THÉORÈME 1 : *Si* α (*respectivement* α_h) *désigne le coefficient de la singularité* S *dans la solution de* (1) [*respectivement* (6)], *alors pour tout* p *suffisamment voisin de* 2, $p>2$ *il existe* $C>0$ *indépendante de* h, *telle que*

$$|\alpha-\alpha^h| < C h^{1-(\Pi/\omega)} \| f \|_{0,p,\Omega} \tag{20}$$

(ω *désigne l'angle du domaine* Ω, *provoquant la singularité*). ■

Preuve : Posons

$$\Psi=\varphi(u-u_h).$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}-\Delta\Psi &= -\Delta\varphi(u-u_h)-2\operatorname{grad}\varphi.\operatorname{grad}(u-u_h)-\varphi\,\Delta(u-u_h)\\ &= -\Delta\varphi(u-u_h)-2\operatorname{grad}\varphi.\operatorname{grad}(u-u_h)-\varphi f.\end{aligned}$$

Mais de

$$\|\Delta\Psi\|_{-1,K}=\sup_{\varphi\in H_0^1(K)}\frac{\langle\Delta\Psi,\varphi\rangle}{|\varphi|_{1,K}}=|\Psi|_{1,K},$$

nous déduisons puisque $\beta\subset K$:

$$|\Psi|_{1,\beta}\leqq C\{\|\Delta\varphi(u-u^h)\|_{-1,K}+\|\operatorname{grad}\varphi.\operatorname{grad}(u-u_h)\|_{1,K}+\|\varphi f\|_{-1,K}\}.$$

En appliquant le lemme 1 et les inégalités (14), nous obtenons :

$$|\Psi|_{1,\beta}\leqq Ch\{\|f\|_{0,K}+h^{-2}\|u-u_h\|_{0,K}+h^{-1}\|u-u_h\|_{1,K}\}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{1,K}&\leqq Ch\|u_r\|_{2,p;\Omega} &&\text{d'après la proposition 3}\\ &\leqq Ch\|f\|_{0,p;\Omega} &&\text{(proposition 2).}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, puisque $u-u_h$ est nul sur une partie du bord ∂K de mesure non nulle, il vient

$$\|u-u_h\|_{0,K}\leqq Ch\|u-u_h\|_{1,K}\leqq C.h^2\|f\|_{0,p;\Omega}.$$

Il vient alors :

$$|\Psi|_{1,\beta}\leqq Ch\|f\|_{0,p;\Omega}.$$

Mais

$$|\Psi|_{1,\beta}=|(\alpha-\alpha_h)S+u_r|_{1,\beta}\geqq|\alpha-\alpha_h|.|S|_{1,\beta}-|u_r|_{1,\beta}.$$

D'où nous déduisons

$$|\alpha-\alpha_h|.|S|_{1,\beta}\leqq Ch\|f\|_{0,p,\Omega}+|u_r|_{1,\beta}.$$

L'inclusion de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)\hookrightarrow\mathscr{C}^1(\Omega)$, jointe à une inégalité de Hôlder nous donne

$$|u_r|_{1,\beta}\leqq Ch\|u_r\|_{2,p,\Omega}\leqq Ch\|f\|_{0,p,\Omega},$$

ce qui permet d'écrire :

$$|\alpha-\alpha_h|.|S|_{1,\beta}\leqq Ch\|f\|_{0,p,\Omega}. \tag{21}$$

On vérifie que, pour l'ouvert β défini en (15), on a

$$|S|_{1,\beta}=C(\omega,\Theta_0)\,h^{\Pi/\omega}. \tag{22}$$

Avec (21), on obtient bien :

$$|\alpha-\alpha_h|\leqq Ch^{1-(\Pi/\omega)}\|f\|_{0,p,\Omega}. \quad \blacksquare$$

4. CONCLUSION

L'estimation (20) appelle les remarques suivantes :

1° Cette estimation est largement inférieure à l'estimation de l'erreur globale dans $H^1(\Omega)$. Cela provient du fait que la fonction S n'est pas orthogonale au sous-espace $W^{2,p}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ que décrit la partie régulière de la solution. Numériquement, cela se traduira par le phénomène suivant : une partie de la singularité sera approchée par $\alpha_h S$, le reste par une fonction de W_h. D'où la perte de précision constatée sur l'approximation de α.

2° L'ordre de convergence est une fonction croissante de ω, qui atteint sa valeur maximale pour $\omega=2\Pi$ (cas des fissures) et s'annule pour $\omega=\Pi$. Dans ce dernier cas, cela se comprend aisément puisque la « singularité » disparait de la solution u. On pourra « expliquer » ce résultat de la manière suivante : plus grand est ω, plus « singulière » est la fonction S, et donc plus « indépendante » est-elle des fonctions de W_h.

3° Nous n'arrivons à obtenir cette estimation qu'à la condition de ne pas mettre de fonctions affines sur les triangles ayant O pour sommet. Dans le cas contraire, nous ne pouvons obtenir que les estimations globales, déjà connues, comparables à celles des propositions 3 et 4.

4° Enfin, signalons que Schatz et Wahlbin ont proposé dans [6] une méthode différente de calcul du coefficient de la singularité qui conduit dans le cas $\omega=2\Pi$ à une erreur en $O(h^{1/3})$.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient vivement les professeurs P. G. Ciarlet et J. C. Nedelec pour leurs remarques concernant la preuve du théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1976.
2. H. D. Bui, *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, Paris 1978.
3. P. G. Ciarlet et P. A. Raviart, *Lagrange et Hermite Interpolation* in $\mathbb{R}^n$, *with Applications to Finite Element Methods*, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 46, 1972, p. 177-199.
4. M. Djaoua, *Équations intégrales pour un problème singulier dans le plan*, Thèse de 3e cycle, Paris, 1977.
5. P. Grisvard, *Behaviour of the Solutions of an Elliptic Boundary Value Problem in a Polynomial or Polyhedral domain* in *Numerical Solution of Partial Differential Equations III*, Synspade, 1975, Bert Hubbard, éd., Academic Press.
6. A. M. Schatz et L. B. Wahlbin, *Maximum Norm Estimates in the Finite Element Method on Plane Polygonal Domains*, Math. Comp., vol. 32, n° 141, 1978, p. 73-209.