

# RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

S. KESAVAN

## **Une méthode d'éléments finis mixte pour les équations de Von Kármán**

*RAIRO. Analyse numérique*, tome 14, n° 2 (1980), p. 149-173

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1980\\_\\_14\\_2\\_149\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1980__14_2_149_0)

© AFCET, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS MIXTE POUR LES ÉQUATIONS DE VON KÁRMÁN (\*)

par S. KESAVAN <sup>(1)</sup>.

Communiqué par P.-A. RAVIART

ABSTRACT. — *The aim of this paper is to adapt Kikuchi's method to a mixed finite element formulation used to approximate non trivial solutions bifurcating from the trivial solution of the von Kármán equations. The convergence of the method is proved and error estimates are obtained.*

RÉSUMÉ. — *Le but de ce travail est d'adapter la méthode de Kikuchi à une formulation mixte utilisée pour approcher par éléments finis les solutions non triviales qui bifurquent à partir de la solution triviale des équations de von Kármán. On démontre la convergence de la méthode et on obtient des estimations d'erreur.*

### 1. INTRODUCTION

Dans cet article on s'intéresse au calcul des branches de bifurcation (à partir de la solution triviale  $u=0$ ) des équations de von Kármán. Ces équations, qui sont un modèle pour le flambage d'une plaque mince soumise à des forces latérales, s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \psi &= -[u, u] \\ \Delta^2 u &= \lambda [f, u] + [\psi, u] \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega, \quad \begin{cases} (1.1) \\ (1.2) \end{cases}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (1.3)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert borné (la surface moyenne de la plaque) et  $\Gamma$  sa frontière. Par ailleurs,

$$[u, v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.4)$$

(\*) Reçu janvier 1979.

<sup>(1)</sup> T.I.F.R., Centre Indian Institute of Science, Bangalore, Inde.

Dans un article précédent (*cf.* [9]), nous avons donné un algorithme de calcul de la branche bifurquée autour d'une valeur propre simple du problème linéarisé, par une méthode d'éléments finis conforme. Nous allons considérer ici l'application d'une méthode d'éléments finis mixte pour ce même problème. Nous démontrons la convergence de la méthode et nous obtenons des estimations d'erreur.

Le n° 2 est consacré à la formulation mixte due à [14], et à un bref rappel des résultats préliminaires utilisés par la suite.

Le n° 3 traite le problème linéaire de valeurs propres dont les résultats sont utilisés par la suite. A cause de la forme inhabituelle du membre de droite de cette équation ( $\Delta^2 u = \lambda [f, u]$ ), on ne peut pas appliquer les résultats de [13], ni ceux de [4]. On est donc d'abord amené à donner un traitement adapté à ce problème. On donne également dans ce numéro des résultats sur l'approximation du problème de l'alternative de Fredholm, qui jouent un rôle important dans les estimations d'erreur.

Le n° 4 donne quelques nouveaux résultats concernant la formulation mixte pour l'équation biharmonique, qui nous permettront plus loin de démontrer la convergence de la méthode et d'obtenir les estimations d'erreur.

Le n° 5 traite brièvement le problème non linéaire continu et l'algorithme pour le problème discret est décrit dans le n° 6. Le n° 7 donne les estimations d'erreur et le n° 8 est réservé aux conclusions et aux remarques diverses.

NOTATIONS : On utilise les espaces de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  et les espaces de Sobolev  $H^m(\Omega)$ . La norme dans  $L^p(\Omega)$  est désignée par  $|\cdot|_{0,p,\Omega}$  sauf si  $p=2$  quand nous écrivons  $|\cdot|_{0,\Omega}$ . La norme et la semi-norme habituelles dans  $H^m(\Omega)$  sont respectivement désignées par  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$  et  $|\cdot|_{m,\Omega}$ . Tout espace produit est muni de la norme produit correspondante mais on continuera à la désigner comme dans le cas scalaire. *Exemple* : La norme dans  $(L^2(\Omega))^4$  sera désignée par  $|\cdot|_{0,\Omega}$ .

## 2. UNE FORMULATION MIXTE POUR L'ÉQUATION BIHARMONIQUE

Soit  $f \in L^2(\Omega)$  une fonction donnée. On considère le problème suivant :

$$\Delta^2 u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.2)$$

La formulation faible dans  $H_0^2(\Omega)$  de (2.1)-(2.2) est équivalente à la formulation mixte suivante :

(P) Trouver  $(\sigma, u) \in \Sigma \times V$  tel que

$$\forall \tau \in \Sigma, \quad a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) = 0, \tag{2.3}$$

$$\forall v \in V, \quad -b(\sigma, v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \tag{2.4}$$

où

$$\Sigma = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) \in (L^2(\Omega))^4 \mid \sigma_{12} = \sigma_{21} \} = (L^2(\Omega))^4_s \quad \text{et} \quad V = H_0^2(\Omega),$$

et (avec la convention de sommation sur les indices répétés) :

$$\forall \sigma, \tau \in \Sigma, \quad a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx, \tag{2.5}$$

$$\forall \sigma \in \Sigma, \quad v \in V, \quad b(\sigma, v) = - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \, dx. \tag{2.6}$$

Ce problème admet une solution unique (cf. [3]) et pour  $f \in L^2(\Omega)$  on a  $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  et  $\sigma_{ij} = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j \in H^1(\Omega)$  (cf. [12]),  $\Omega$  étant un domaine à frontière lipschitzienne. Grâce à ce résultat de régularité, la solution unique du problème (P) est aussi solution du problème suivant :

( $\tilde{P}$ ) Trouver  $(\sigma, u) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$  tel que

$$\forall \tau \in \tilde{\Sigma}, \quad a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, u) = 0, \tag{2.7}$$

$$\forall v \in \tilde{V}, \quad -\tilde{b}(\sigma, v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \tag{2.8}$$

où

$$\tilde{\Sigma} = (H^1(\Omega))^4_s, \quad \tilde{V} = H_0^1(\Omega)$$

et

$$\forall \sigma \in \tilde{\Sigma}, \quad v \in \tilde{V}, \quad \tilde{b}(\sigma, v) = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx. \tag{2.9}$$

Notons que la forme bilinéaire  $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$  vérifie la condition de [2], i. e. il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$\forall v \in \tilde{V}, \quad \sup_{\tau \in \tilde{\Sigma}} \frac{\tilde{b}(\tau, v)}{\|\tau\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|v\|_{1,\Omega}. \tag{2.10}$$

Donc ( $\tilde{P}$ ) admet une solution unique, à savoir, celle de (P).

Pour l'approximation de la solution de ( $\tilde{P}$ ) on se donne des espaces  $\Sigma_h \subset \tilde{\Sigma}$  et  $V_h \subset \tilde{V}$  de dimension finie, qui vérifient les propriétés d'approximation habituelles, ainsi que la condition  $(V_h)_s^4 \subset \Sigma_h$ . Cette deuxième condition nous

permet de conclure que  $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$  vérifie la condition de Brezzi discrète *uniformément par rapport à  $h$* , i. e. il existe une constante  $\beta_1 > 0$  indépendante de  $h$  telle que, pour tout  $h$  :

$$\forall v_h \in V_h, \quad \sup_{\tau_h \in \Sigma_h} \frac{\tilde{b}(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta_1 \|v_h\|_{1,\Omega}. \quad (2.11)$$

Le problème approché suivant admet toujours une solution  $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$  tel que

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h) = 0, \quad (2.12)$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx. \quad (2.13)$$

Puisque  $V_h$  est de dimension finie il existe  $S(h) > 0$  tel que

$$\forall v_h \in V_h, \quad \|v_h\|_{1,\Omega} \leq S(h) |v_h|_{0,\Omega} \quad (2.14)$$

et on a l'estimation d'erreur abstraite due à [3],

$$\begin{aligned} & |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + \|u - u_h\|_{1,\Omega} \\ & \leq C \left\{ \inf_{\tau_h \in \Sigma_h} \|\sigma - \tau_h\|_{1,\Omega} + (1 + S(h)) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \right\}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

$C > 0$  étant une constante indépendante de  $h$ .

On utilisera par la suite les espaces  $\Sigma_h$  et  $V_h$  décrits ci-après. Pour simplifier l'exposé, supposons que  $\Omega$  est un polygone convexe. On se donne une famille régulière de triangulations  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  de  $\Omega$  et on définit :

$$W_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in P_k(K)\}, \quad (2.16)$$

l'espace associé aux polynômes de degré  $\leq k$ , par élément fini de Lagrange de type  $(k)$  (cf. [5]).

On pose

$$\Sigma_h = (W_h^k)_s^4, \quad V_h = W_h^k \cap H_0^1(\Omega), \quad k \geq 2. \quad (2.17)$$

Si, de plus, la triangulation est uniformément régulière, i. e. il existe  $C_0 > 0$  indépendante de  $h$  telle que

$$\min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \leq C_0 \cdot \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K = C_0 h, \quad (2.18)$$

où  $h_K$  est le diamètre du triangle  $K$ , on a (cf. [5]) :

$$S(h) \leq C h^{-1}. \quad (2.19)$$

$C > 0$  étant indépendante de  $h$ . Dans ces conditions si  $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ , on a, d'après (2.13) :

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + |u - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch \|u\|_{4,\Omega}. \tag{2.20}$$

Récemment [16] a amélioré cette estimation. On a en effet si  $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  :

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} \leq Ch \|u\|_{3,\Omega}, \tag{2.21}$$

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{3,\Omega}. \tag{2.22}$$

Par conséquent

$$|u - u_h|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{3,\Omega}, \tag{2.23}$$

$$|u - u_h|_{0,\infty,\Omega} \leq Ch \|u\|_{3,\Omega}. \tag{2.24}$$

### 3. LE PROBLÈME LINÉARISÉ

Considérons le problème de valeurs propres suivant :

(P̃V) Trouver  $(\sigma, u, \lambda) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V} \times \mathbb{R}$  tel que

$$\forall \tau \in \tilde{\Sigma}, \quad a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, u) = 0, \tag{3.1}$$

$$\forall v \in \tilde{V}, \quad -\tilde{b}(\sigma, v) = \lambda \int_{\Omega} [f, \sigma] v \, dx, \tag{3.2}$$

où avec la notation  $f_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ , on définit

$$\forall \tau \in \tilde{\Sigma}, \quad [f, \sigma] = f_{11} \sigma_{22} + f_{22} \sigma_{11} - 2 f_{12} \sigma_{12}. \tag{3.3}$$

Par les raisonnements habituels (régularité de solution et densité de  $\tilde{V}$  dans  $V$ ),  $(\sigma, u, \lambda)$  est solution de (P̃V) si et seulement si  $(u, \lambda)$  est solution faible dans  $H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R}$  du problème de von Kármán linéarisé

$$\Delta^2 u = \lambda [f, u] \quad \text{dans } \Omega; \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{3.4}$$

Ce dernier est décrit dans [9]; il s'agit d'un problème de valeurs propres d'un opérateur  $L$  qui est compact et symétrique de  $H_0^2(\Omega)$  dans lui-même. Donc il existe une suite de valeurs propres réelles et une suite de vecteurs propres normalisés. Sous l'hypothèse supplémentaire (faite uniquement pour fixer les idées) que  $L$  est défini positif, les valeurs propres sont positives.

Considérons le problème discret

(PV<sub>h</sub>) Trouver  $(\sigma_h, u_h, \lambda_h) \in \Sigma_h \times V_h \times \mathbb{R}$  tel que

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\sigma_h, \lambda_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h) = 0, \quad (3.5)$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \lambda_h \int_{\Omega} [f, \sigma_h] v_h dx \quad (3.6)$$

Afin que le problème (PV<sub>h</sub>) soit bien l'analogue discret du problème continu ( $\overline{PV}$ ) on souhaiterait que les valeurs propres  $\lambda_h$  soient toutes réelles. Mais cela n'est pas évident *a priori*. Avec le raisonnement qui suit on aboutit à une condition [cf (3.10)-(3.11)] qui est suffisante pour que cela soit vrai. On verra plus tard que cette condition suffisante est nécessaire pour obtenir la condition de compatibilité que doit vérifier le second membre du problème de l'alternative de Fredholm discret [cf (3.36)] qui est analogue au cas continu [cf (3.32)]. Cette analogie est essentielle dans le traitement du problème non linéaire.

Posons d'abord ce problème sous forme d'un problème de valeurs propres d'un opérateur linéaire  $L_h$ . S'inspirant du cas continu, on définit un produit scalaire sur  $V_h$  qui imite le produit scalaire en  $H_0^2(\Omega)$ . Pour  $u_h \in V_h$  donné, grâce à la dimension finie de  $\Sigma_h$ , il existe  $\sigma_h$  unique tel que (3.5) est vérifiée. On pose  $M_h u_h = \sigma_h$  [on voit que  $M_h u_h$  est l'analogue discret du tenseur de dérivées secondes, pour  $u \in H_0^2(\Omega)$  donne il existe  $\sigma \in \tilde{\Sigma}$  tel que (3.1) est vérifiée si et seulement si  $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  et  $\sigma_{ij} = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ ]. On définit le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_h$  sur  $V_h$  par

$$\forall u_h, v_h \in V_h, \quad (u_h, v_h)_h = a(M_h u_h, M_h v_h) \quad (3.7)$$

Alors pour  $w_h \in V_h$  donne,  $L_h w_h = u_h$  ou  $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$  vérifie

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h) = 0 \quad (3.8)$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \int_{\Omega} [f, M_h w_h] v_h dx \quad (3.9)$$

Il est maintenant facile de voir que le problème (PV<sub>h</sub>) n'est rien d'autre que le problème de valeurs propres de l'opérateur  $L_h$ . Pour que le problème (PV<sub>h</sub>) n'admette que des valeurs propres réelles il est suffisant que  $L_h$  soit symétrique par rapport à  $(\cdot, \cdot)_h$ . Cela est vrai si et seulement si la propriété suivante est vérifiée

(P) Si  $(\sigma_h^i, u_h^i) \in \Sigma_h \times V_h$ ,  $i = 1, 2$  vérifient

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\sigma_h^i, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h^i) = 0, \quad (3.10)$$

alors :

$$\int_{\Omega} [f, \sigma_h^1] u_h^2 dx = \int_{\Omega} [f, \sigma_h^2] u_h^1 dx. \tag{3.11}$$

L'analogue de cette propriété dans le cas continu est toujours vérifié grâce à la formule de Green donnant ainsi la symétrie de l'opérateur  $L$ . Dans le cas discret ce n'est pas toujours évident. On donne ci-dessous un cas particulier où cette propriété est vérifiée.

LEMME 3.1 : Si l'hypothèse (H) ci-dessous a lieu, alors la propriété (P) est vérifiée :

(H) Les fonctions  $f_{ij}$  sont des constantes, i.e.  $f$  est un polynôme de degré  $\leq 2$ .

Démonstration : On définit  $\tau_h^i \in \Sigma_h, i = 1, 2$  par

$$(\tau_h^1)_{11} = f_{22} u_h^1, \quad (\tau_h^1)_{11} = f_{11} u_h^1; \quad (\tau_h^1)_{12} = (\tau_h^1)_{21} = -f_{12} u_h^1. \tag{3.12}$$

Alors on a

$$\int_{\Omega} [f, \sigma_h^2] u_h^1 dx = a(\sigma_h^2, \tau_h^1) = -\tilde{b}(\tau_h^1, u_h^2) = -\tilde{b}(\tau_h^2, u_h^1),$$

utilisant (H) :

$$= a(\sigma_h^1, \tau_h^2) = \int_{\Omega} [f, \sigma_h^1] u_h^2 dx,$$

d'où le lemme. ■

Un exemple important dans la pratique où cette hypothèse est vérifiée est celui où  $f = -1/2(x^2 + y^2)$ . Cette situation correspond à une plaque soumise à une pression horizontale appliquée au bord et constitue le modèle le plus étudié (cf. [1], [15], etc.). Les équations (3.1) correspondantes sont

$$\Delta^2 u = -\lambda \Delta u \quad \text{dans } \Omega, \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{3.13}$$

Pour une dérivation de ce modèle, voir [6].

Avec cette hypothèse (H),  $L_h$  est symétrique et on a  $N(h)$  valeurs propres toutes réelles,  $N(h)$  étant la dimension de  $V_h$ . Pour fixer les idées supposons que  $L_h$  est défini positif de sorte que ses valeurs propres soient positives. On peut traiter l'étude de la convergence dans le cas général comme indiqué, dans [8], sur un exemple de l'homogénéisation d'un problème non nécessairement elliptique. La démonstration de la convergence de la méthode se fait à peu près de la même manière qu'en théorie de l'homogénéisation des valeurs propres. On se

contentera d'indiquer ici les étapes essentielles. Soit  $\lambda^i, 1 \leq i \leq l$ , les  $l$  premières valeurs propres du problème  $(\tilde{P}\tilde{V})$ . Pour  $h$  assez petit, de sorte que  $N(h) \geq l$ , soit  $\lambda_h^i, 1 \leq i \leq l$  les  $l$  premières valeurs propres du problème  $(P\tilde{V}_h)$ . On définit  $(\varphi_h^i, w_h^i) \in \Sigma_h \times V_h$  par

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\varphi_h^i, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, w_h^i) = 0. \tag{3.14}$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\varphi_h^i, v_h) = \lambda^i \int_{\Omega} [f, \sigma^i] v_h dx, \tag{3.15}$$

où  $(\sigma^i, u^i) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$  est une fonction propre normalisée (i.e.  $|\sigma^i|_{0,\Omega} = 1$ ) correspondant à  $\lambda^i$ . On sait que  $w_h^i \rightarrow u^i$  dans  $H_0^1(\Omega)$  fort et  $\varphi_h^i \rightarrow \sigma^i$  dans  $(L^2(\Omega))_s^4$  fort lorsque  $h \rightarrow 0$  d'après les résultats sur le problème stationnaire et on a les estimations d'erreur du type (2.15). On a maintenant le :

**LEMME 3.2 :** *Les fonctions  $\{w_h^i\}_{i=1}^l$  sont linéairement indépendantes dans  $V_h$ , et la suite  $\{\lambda_h^i\}$  des  $l$ -ièmes valeurs propres est bornée indépendamment de  $h$ .*

*Démonstration :* La première partie de l'énoncé est facile à vérifier, étant donné que les fonctions  $\{u^i\}, 1 \leq i \leq l$  sont linéairement indépendantes. Supposons la deuxième propriété fautive. Alors, pour une sous-suite, que l'on notera encore  $h$ , on a grâce au principe de mini-max (cf. [18]) :

$$\min_{\substack{W_h \in V_h \\ \dim W_h = l}} \max_{v_h \in W_h} \{R_h(v_h)\} \rightarrow +\infty, \tag{3.16}$$

lorsque  $h \rightarrow 0$ , où  $R_h(\cdot)$  est le quotient de Rayleigh défini par

$$\forall v_h \in V_h, \quad v_h \neq 0, \quad R_h(v_h) = \frac{a(M_h v_h, M_h v_h)}{\int_{\Omega} [f, M_h(v_h)] v_h dx}. \tag{3.17}$$

On utilise l'espace engendré par  $\{w_h^i\}, 1 \leq i \leq l$  pour  $W_h$ . Supposons que le maximum soit atteint pour  $w_h = \sum c_h^i w_h^i$  où (grâce à l'homogénéité du quotient de Rayleigh) :

$$\sum_{i=1}^l (c_h^i)^2 = 1.$$

Alors pour une sous-suite,  $c_h^i \rightarrow c_i, \sum_{i=1}^l c_i^2 = 1$  et on vérifie facilement que

$$R_h(w_h) \rightarrow \left( \sum_{i=1}^l c_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^l c_i^2 (\lambda^i)^{-1} \right) \leq \lambda^l,$$

ce qui contredit (3.16). ■

THÉOREME 3.1 : Pour chaque entier  $l > 1$ , la suite des  $l$ -ièmes valeurs propres  $\{\lambda_h^l\}$  converge vers  $\lambda^l$ , la  $l$ -ième valeur propre du problème  $(\widetilde{P\check{V}})$ .

Démonstration : Étape 1 : Grâce au lemme 3.2, on sait déjà que  $\{\lambda_h^l\}$  est bornée. Si  $|\sigma_h^l|_{0,\Omega} = 1$ , alors grâce à la condition de Brezzi discrète, uniforme en  $h$ ,  $\{u_h^l\}$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ ,  $(\sigma_h^l, u_h^l)$  étant vecteur propre normalisé de  $\lambda_h^l$ . On peut donc trouver une sous-suite (encore indicée par  $h$ ) telle que pour tout  $l$ ,  $\sigma_h^l \rightarrow \sigma^{(l)}$  dans  $(L^2(\Omega))_s^4$  faible,  $u_h^l \rightarrow u^{(l)}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  faible et  $\lambda_h^l \rightarrow \lambda^{(l)}$ .

Étape 2 : On démontre qu'en effet les convergences ont lieu dans les topologies fortes respectives et que  $(\sigma^{(l)}, u^{(l)}, \lambda^{(l)})$  vérifie le problème  $(\widetilde{P\check{V}})$ . On définit  $(\theta^l, z^l) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}$  solution du problème  $(\widetilde{P})$  avec second membre  $\lambda^{(l)}$  [ $f, \sigma^{(l)} \in L^2(\Omega)$ ], et soit  $(\theta_h^l, z_h^l) \in \Sigma_h \times V_h$  son approximation, i. e. solution de  $(P_h)$  avec le même second membre. Alors  $\theta_h^l \rightarrow \theta^l$  dans  $(L^2(\Omega))_s^4$  fort et  $z_h^l \rightarrow z^l$  dans  $H_0^1(\Omega)$  fort. On voit maintenant que  $(\sigma_h^l - \theta_h^l, u_h^l - z_h^l) \in \Sigma_h \times V_h$  est solution de  $(P_h)$  avec second membre  $g_h^l$  donné par

$$g_h^l = \lambda_h^l [f, \sigma_h^l] - \lambda^{(l)} [f, \sigma^{(l)}] \tag{3.18}$$

et on sait que  $g_h^l \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$  faible. Mais

$$|\sigma_h^l - \theta_h^l|_{0,\Omega}^2 = a(\sigma_h^l - \theta_h^l, \sigma_h^l - \theta_h^l) = \int_{\Omega} g_h^l (u_h^l - z_h^l) dx \rightarrow 0,$$

puisque  $u_h^l - z_h^l \rightarrow u^{(l)} - z^{(l)}$  dans  $L^2(\Omega)$  fort. Alors on déduit que  $\sigma_h^l$  converge dans  $(L^2(\Omega))_s^4$  fort et la limite est, a fortiori,  $\sigma^{(l)} = \theta^{(l)}$ . De même  $u_h^l \rightarrow u^l = z^l$  dans  $H_0^1(\Omega)$  fort. Or, par définition de  $(\theta^l, u^l)$ ,  $(\sigma^{(l)}, u^{(l)}, \lambda^{(l)})$  vérifie  $(\widetilde{P\check{V}})$ .

Étape 3 : Procédant maintenant exactement comme dans le théorème 2.1 de [8] on démontre que toutes les valeurs propres de  $(\widetilde{P\check{V}})$  sont contenues dans la suite  $\{\lambda^{(l)}\}_l$  et ceci quelle que soit la sous-suite. Donc, d'une part,  $\lambda^{(l)}$  est la  $l$ -ième valeur propre de  $(\widetilde{P\check{V}})$  et, d'autre part, la convergence  $\lambda_h^l \rightarrow \lambda^{(l)}$  a lieu pour toute la suite. ■

Cette convergence des valeurs propres suffit pour obtenir l'estimation d'erreur pour les vecteurs propres. La méthode est standard (cf., par exemple, [4]). On obtient donc le théorème suivant :

THÉOREME 3.2 : Étant donné  $(\sigma_h^l, u_h^l) \in \Sigma_h \times V_h$  vecteur propre normalisé correspondant à  $\lambda_h^l$ , alors on peut trouver  $(\sigma^l(h), u^l(h)) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}$  vecteur propre normalisé correspondant à  $\lambda^l$  tel que

$$|\sigma^l(h) - \sigma_h^l|_{0,\Omega} + |u^l(h) - u_h^l|_{1,\Omega} \leq C_l \{ \|u^l(h) - w_h^l\|_{1,\Omega} + \|\sigma^l(h) - \varphi_h^l\|_{1,\Omega} \}, \tag{3.19}$$

où  $(\varphi_h^l, w_h^l)$  est défini par (3.13)-(3.14) à partir de  $(\sigma^l(h), u^l(h), \lambda^l)$ . ■

En ce qui concerne l'estimation de l'erreur pour les valeurs propres, l'estimation est moins bonne que dans le cas où le membre de droite de l'équation (3.4) est de la forme  $\lambda u$  (cf. [4], [13]). Mais on va montrer que l'estimation de l'erreur est meilleure que pour les vecteurs propres.

Soit  $\lambda_h^l \rightarrow \lambda^l$  et soit  $(\sigma_h^l, u_h^l)$  et  $(\sigma^l, u^l)$  des vecteurs propres normalisés choisis tels que les estimations du type (3.19) soient valables. On a, grâce à la symétrie de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ ,

$$\lambda_h^l \int_{\Omega} [f, \sigma_h^l] w_h^l dx = \lambda^l \int_{\Omega} [f, \sigma^l] u^l dx (= a(\sigma_h^l, \sigma_h^l)). \quad (3.20)$$

Puisque

$$\int_{\Omega} [f, \sigma_h^l] w_h^l dx \rightarrow \int_{\Omega} [f, \sigma^l] u^l dx = (\lambda^l)^{-1},$$

il en résulte que pour  $h$  assez petit

$$\int_{\Omega} [f, \sigma_h^l] w_h^l dx \geq (2\lambda^l)^{-1} \quad (\text{par exemple}). \quad (3.21)$$

On a maintenant le lemme technique suivant :

LEMME 3.3 : Il existe  $\theta_h^l \in \Sigma_h$  tel que

$$\int_{\Omega} [f, \sigma^l] u_h^l dx = \int_{\Omega} [f, \sigma_h^l] w_h^l dx + a(\sigma_h^l, \theta_h^l), \quad (3.22)$$

avec

$$|\theta_h^l|_{0,\Omega} \leq C_l \{ h |u^l - w_h^l|_{1,\Omega} + |u^l - w_h^l|_{0,\Omega} \}. \quad (3.23)$$

Démonstration : On définit

$$\begin{aligned} (\tau_h^l)_{11} &= f_{22} u_h^l; & (\tau_h^l)_{22} &= f_{11} u_h^l; & (\tau_h^l)_{12} &= (\tau_h^l)_{21} = -f_{12} u_h^l, \\ \tau_{11}^l &= f_{22} u^l; & \tau_{22}^l &= f_{11} u^l; & \tau_{12}^l &= \tau_{21}^l = -f_{12} u^l, \\ (\Psi_h^l)_{12} &= f_{22} w_h^l; & (\Psi_h^l)_{22} &= f_{11} w_h^l; & (\Psi_h^l)_{12} &= (\Psi_h^l)_{21} = -f_{12} w_h^l. \end{aligned}$$

Alors :

$$\int_{\Omega} [f, \sigma^l] u_h^l dx = a(\sigma^l, \tau_h^l) = -\tilde{b}(\tau_h^l, u^l) = -\tilde{b}(\tau^l, u_h^l),$$

grâce à l'hypothèse (H). On résoud maintenant le problème suivant :

Trouver  $z_h^l \in V_h$  tel que

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla z_h^l \nabla v_h dx = \tilde{b}(\tau^l - \Psi_h^l, v_h), \quad (3.24)$$

et on pose

$$(\theta_h^l)_{ij} = z_h^l \delta_{ij}. \tag{3.25}$$

Alors :

$$\forall v_h \in V_h, \quad \tilde{b}(\tau^l, v_h) = \tilde{b}(\psi_h^l + \theta_h^l, v_h). \tag{3.26}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f, \sigma^l] u_h^l dx &= -\tilde{b}(\psi_h^l + \theta_h^l, u_h^l) \equiv a(\sigma_h^l, \psi_h^l + \theta_h^l) \\ &= \int_{\Omega} [f, \sigma_h^l] w_h^l dx + a(\sigma_h^l, \theta_h^l), \end{aligned} \tag{3.27}$$

d'où la première partie de l'énoncé. Pour la deuxième partie, il suffit d'évaluer  $|z_h^l|_{0,\Omega}$ , ce que l'on fait par dualité. Si  $z_g \in H_0^1(\Omega)$  est la solution faible du problème de Dirichlet pour le laplacien, on a  $z_g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et  $\|z_g\|_{2,\Omega} \leq C \|g\|_{0,\Omega}$ . Or, pour tout  $v_h \in V_h$ , on a

$$\int_{\Omega} z_h^l g dx = \int_{\Omega} \nabla(z_g - v_h) \nabla z_h^l dx + \tilde{b}(\tau^l - \psi_h^l, v_h - z_g) + \tilde{b}(\tau^l - \psi_h^l, z_g).$$

Mais puisque  $\tau^l, \psi_h^l \in (H_0^1(\Omega))_s^4$  on peut écrire :

$$\tilde{b}(\tau^l - \psi_h^l, z_g) = b(\tau^l - \psi_h^l, z_g)$$

et on a

$$\left| \int_{\Omega} z_h^l g dx \right| \leq C \{ h(|z_h^l|_{1,\Omega} + |\tau^l - \psi_h^l|_{1,\Omega}) + |\tau^l - \psi_h^l|_{0,\Omega} \},$$

d'où le lemme. ■

Avec ce lemme, en combinant (3.20) et (3.22), on obtient :

$$(\lambda_h^l - \lambda^l) \int_{\Omega} [f, \sigma_h^l] w_h^l dx = \lambda^l a(\sigma_h^l, \theta_h^l),$$

d'où, en utilisant (3.21) et (3.23) on déduit le :

**THÉORÈME 3.3 :** *Il existe une constante  $C_l > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$|\lambda_h^l - \lambda^l| \leq C_l \{ h |u^l - w_h^l|_{1,\Omega} + |u^l - w_h^l|_{0,\Omega} \}. \quad \blacksquare \tag{3.28}$$

**COROLLAIRE 3.1 :** *Si  $u^l \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ , alors :*

$$h(|\sigma^l - \sigma_h^l|_{0,\Omega} + |u^l - u_h^l|_{1,\Omega}) + |\lambda^l - \lambda_h^l| \leq C_l h^2 \|u\|_{3,\Omega} \quad \blacksquare \tag{3.29}$$

Considérons finalement le problème de l'alternative de Fredholm. Soit  $\lambda$  une valeur propre simple du problème  $(\widetilde{P}\widetilde{V})$  correspondant à un vecteur propre normalisé  $(\sigma, u)$ . Le problème

(PF) Trouver  $(\theta, z) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}$  tel que

$$\forall \tau \in \widetilde{\Sigma}, \quad a(\theta, \tau) + \widetilde{b}(\tau, z) = 0, \quad (3.30)$$

$$\forall v \in \widetilde{V}, \quad \widetilde{b}(\theta, v) - \lambda \int_{\Omega} [f, \theta] v \, dx = \int_{\Omega} g v \, dx, \quad (3.31)$$

où  $g \in L^2(\Omega)$ , admet une solution si et seulement si

$$\int_{\Omega} [f, \sigma] z \, dx = 0. \quad (3.32)$$

Le problème discret correspondant s'écrit :

(PF<sub>h</sub>) Trouver  $(\theta_h, z_h) \in \Sigma_h \times V_h$  tel que

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\theta_h, \tau_h) + \widetilde{b}(\tau_h, z_h) = 0, \quad (3.34)$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad -\widetilde{b}(\theta_h, v_h) - \lambda_h \int_{\Omega} [f, \sigma_h] v_h \, dx = \int_{\Omega} g v_h \, dx, \quad (3.35)$$

où  $(\sigma_h, u_h, \lambda_h)$  est solution de (PV<sub>h</sub>) approchant  $(\sigma, u, \lambda)$ .

Ce problème admet une solution si et seulement si

$$\int_{\Omega} g u_h \, dx = 0, \quad (3.36)$$

grâce à la propriété  $(\mathcal{P})$  qui est vérifiée sous l'hypothèse (H). Il existe une solution unique telle que

$$\int_{\Omega} [f, \sigma_h] z_h \, dx = 0. \quad (3.37)$$

Observons que pour  $g \in L^2(\Omega)$  quelconque, le problème  $(\widetilde{P}\widetilde{F})$  posé avec  $P_0 g$ , où

$$P_0 g = g - \lambda(g, u)[f, \sigma], \quad (3.38)$$

admet une solution unique  $(\theta, z)$  vérifiant (3.33). De même, le problème (PF<sub>h</sub>) posé avec  $P_{0h} g$ , où

$$P_{0h} g = g - \lambda_h(g, u_h)[f, \sigma_h], \quad (3.39)$$

admet une solution unique  $(\theta_h, z_h) \in \Sigma_h \times V_h$  vérifiant (3.37), et on a le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.4 :** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  et de  $g$  telle que, pour  $h$  assez petit*

$$|\theta_h|_{0,\Omega} + |z_h|_{1,\Omega} \leq C |g|_{0,\Omega}, \tag{3.40}$$

$$|\theta - \theta_h|_{0,\Omega} + |z - z_h|_{1,\Omega} \leq C \left\{ \inf_{\tau_h \in \Sigma_h} \|\theta - \tau_h\|_{1,\Omega} + \inf_{\tau_h \in \Sigma_h} \|\sigma - \tau_h\|_{1,\Omega} \right. \\ \left. + (1+S(h)) \left( \inf_{v_h \in V_h} \|z - v_h\|_{1,\Omega} + \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \right) \right\}. \tag{3.31}$$

*Démonstration :* On ne donne pas les détails ici. La démonstration s'effectue exactement comme dans le théorème 5.1 de [9]. ■

Grâce aux résultats de [16] [cf. (2.21)-(2.24)] on a

$$|\theta - \theta_h|_{0,\Omega} + |z - z_h|_{1,\Omega} \leq Ch (\|u\|_{3,\Omega} + \|z\|_{3,\Omega}). \tag{3.42}$$

**4. QUELQUES NOUVELLES ESTIMATIONS**

Dans ce numéro, nous allons donner quelques nouvelles estimations concernant les problèmes  $(\tilde{P})$  et  $(P_h)$  du n° 2, qui vont être utilisées dans la démonstration de la convergence de la méthode que l'on va proposer pour résoudre le problème non linéaire. Signalons que ces résultats reposent notamment sur l'injection continue de  $H^2(\Omega)$  dans  $C^0(\bar{\Omega})$  (valable parce que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ). On a d'abord le :

**THÉORÈME 4.1.** — *Soit  $(\sigma, u) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$  solution du problème  $(\tilde{P})$  [cf. (2.7)-(2.8)] avec second membre  $f \in L^2(\Omega)$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $f$  telle que*

$$|\sigma|_{0,\Omega} + |u|_{1,\Omega} \leq C |f|_{0,1,\Omega}. \tag{4.1}$$

*Démonstration :* Grâce à la condition de Brezzi, il suffit de démontrer que  $|\sigma|_{0,\Omega}$  est bornée par  $|f|_{0,1,\Omega}$ . On a déjà remarqué que  $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  et  $\sigma$  est le tenseur des dérivées secondes de  $u$ . Donc on a

$$|\sigma|_{0,\Omega}^2 = a(\sigma, \sigma) = \int_{\Omega} fu \, dx \leq |f|_{0,1,\Omega} |u|_{0,\infty,\Omega} \\ \leq C |f|_{0,1,\Omega} \|u\|_{2,\Omega} \leq C |f|_{0,1,\Omega} |\sigma|_{0,\Omega},$$

d'où le théorème. ■

Soit  $(\theta, z) \in \tilde{\Sigma} \times V$  la solution du problème ( $\widetilde{\text{PF}}$ ) du n° 3 vérifiant (3.33), le second membre étant  $P_0 g$ ,  $g \in L^2(\Omega)$ . Alors on peut également démontrer le résultat suivant :

**THÉORÈME 4.2 :** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendant de  $g \in L^2(\Omega)$  telle que*

$$|\theta|_{0,\Omega} + |z|_{1,\Omega} \leq C |g|_{0,1,\Omega}. \quad (4.2)$$

*Démonstration :* On omet les détails. La démonstration s'effectue en raisonnant par l'absurde. ■

Ce qui est plus important, ce sont les analogues discrets des résultats précédents. Dans le cas discret on peut démontrer les résultats suivants :

**THÉORÈME 4.3 :** *Soit  $l \geq 2$  un entier quelconque. Il existe une constante  $C = C(l) > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que*

$$\forall g_h \in W_h^l, \quad |\sigma_h(g_h)|_{0,\Omega} + |u_h(g_h)|_{1,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega}. \quad (4.3)$$

où  $(\sigma_h(g_h), u_h(g_h)) \in \Sigma_h \times V_h$  est la solution du problème ( $\text{P}_h$ ) avec second membre  $g_h$ .

*Démonstration :* Grâce à la condition de Brezzi, uniforme en  $h$ , il suffit de démontrer que

$$|\sigma_h(g_h)|_{0,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega}. \quad (4.4)$$

Supposons le contraire. Alors on peut trouver une sous-suite  $\{h_n\}$  et une suite  $\{g_{h_n}\}$  telles que :

- (i)  $h_n \rightarrow 0$
- (ii)  $g_{h_n} \in W_{h_n}^l, |g_{h_n}|_{0,1,\Omega} \rightarrow 0$  } lorsque  $n \rightarrow \infty$ ;
- (iii)  $|\sigma_{h_n}(g_{h_n})|_{0,\Omega} = 1$ .

Pour alléger l'écriture on supprimera l'indice  $n$  et on écrit  $\sigma_h$  au lieu de  $\sigma_{h_n}(g_{h_n})$  et  $u_h$  au lieu de  $u_{h_n}(g_{h_n})$ . On va montrer maintenant que  $\sigma_h \rightarrow 0$  fortement dans  $(L^2(\Omega))_s^4$ , ce qui sera une contradiction en vue de la condition (iii) ci-dessus.

*Étape 1 :* Pour  $f \in L^2(\Omega)$ , on définit  $z(f) \in H_0^1(\Omega)$ , solution faible du problème de Dirichlet pour le Laplacien, i. e.

$$v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla z(f) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (4.5)$$

On pose

$$z^h = z(g_h). \quad (4.6)$$

On a, d'une part :

$$|z^h|_{1,\Omega} \leq C |g_h|_{0,\Omega} \leq C h^{-1} |g_h|_{0,1,\Omega}, \tag{4.7}$$

d'après les « inégalités inverses » (cf. [5]) provenant de la régularité uniforme (2.16) de la triangulation. D'autre part, on évalue  $|z^h|_{0,\Omega}$  par dualité. On a

$$\int_{\Omega} z^h f dx = \int_{\Omega} \nabla z(f) \nabla z^h dx = \int_{\Omega} g_h z(f) dx,$$

d'où l'on déduit, grâce à la régularité du problème (4.5) :

$$|z^h|_{0,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega} \rightarrow 0. \tag{4.8}$$

Si l'on définit  $\sigma^h \in \tilde{\Sigma}$  par

$$\sigma_{ij}^h = -z^h \delta_{ij} \in (H_0^1(\Omega))_s^4, \tag{4.9}$$

on a les propriétés suivantes :

$$\|\sigma^h\|_{1,\Omega} \leq C h^{-1} |g_h|_{0,1,\Omega}, \tag{4.10}$$

$$|\sigma^h|_{0,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega} \quad [\text{donc } \sigma^h \rightarrow 0 \text{ dans } (L^2(\Omega))_s^4], \tag{4.11}$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad \tilde{b}(\sigma^h, v_h) = \tilde{b}(\sigma_h, v_h). \tag{4.12}$$

*Étape 2 :* D'après un lemme de [3], puisque  $\sigma^h \in (H_0^1(\Omega))_s^4$ , on peut trouver  $\tilde{\sigma}_h \in \Sigma_h$  tel que

$$|\sigma^h - \tilde{\sigma}_h|_{r,\Omega} \leq C h^{1-r} \|\sigma^h\|_{1,\Omega}, \quad r=0, 1, \tag{4.13}$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad \tilde{b}(\tilde{\sigma}_h, v_h) = \tilde{b}(\sigma^h, v_h) = \tilde{b}(\sigma_h, v_h). \tag{4.14}$$

*Étape 3 :* On a d'une part

$$a(\sigma^h - \sigma_h, \sigma^h) \rightarrow 0, \tag{4.15}$$

et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} a(\sigma^h - \sigma_h, \sigma_h) &= a(\sigma^h - \tilde{\sigma}_h, \sigma_h) + a(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h, \sigma_h) \\ &= a(\sigma^h - \tilde{\sigma}_h, \sigma_h) - b(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h, u_h) = a(\sigma^h - \tilde{\sigma}_h, \sigma_h) \text{ d'après (4.14)} \\ &\leq |\sigma^h - \tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega}. \end{aligned}$$

Donc on a  $a(\sigma^h - \sigma_h, \sigma_h) \rightarrow 0$  et par conséquent

$$|\sigma^h - \sigma_h|_{0,\Omega}^2 = a(\sigma^h - \sigma_h, \sigma^h - \sigma_h) \rightarrow 0,$$

et puisque  $\sigma^h \rightarrow 0$  dans  $(L^2(\Omega))_s^4$  fort, on a également  $\sigma_h \rightarrow 0$  dans  $(L^2(\Omega))_s^4$  fort, d'où la contradiction ■

**THEOREME 4 4** *Supposons que  $(\sigma, u, \lambda)$  solution de  $(\widetilde{P\tilde{V}})$  vérifie*

$$u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$$

*Alors il existe une constante  $C_l > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\forall g_h \in W_h^l, \quad |\theta_h(g_h)|_{0,\Omega} + |z_h(g_h)|_{1,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega}, \quad (4 \ 16)$$

*ou  $(\theta_h(g_h), z_h(g_h))$  est la solution du problème de Fredholm discret  $(PF_h)$  avec second membre  $P_{0h}g_h$*

*Démonstration* Le principe de la démonstration est le même qu'au théorème 4 3 mais les détails varient légèrement L'hypothèse  $u \in H^3(\Omega)$  est utilisée pour montrer que  $u_h$  le vecteur propre approché reste borné dans  $L^\infty(\Omega)$  [cf (2 22)] et donc  $P_{0h}g_h \rightarrow 0$  dans  $L^1(\Omega)$  avec  $g_h$  ■

*Remarque 4 1* Naturellement, si l'on se restreint aux fonctions  $g_h \in W_h^l$  qui vérifient de plus la condition  $\int_{\Omega} g_h u_h dx = 0$  de sorte que  $P_{0h}g_h = g_h$ , on n'a plus besoin de l'hypothèse  $u \in H^3(\Omega)$  Néanmoins d'après les résultats de [12], pour un polygone convexe cette hypothèse est toujours vérifiée ■

Dans l'étude de la convergence de la méthode proposée pour le problème non linéaire, nous aurons l'occasion d'utiliser les théorèmes 4 3 et 4 4 avec  $l = 2k$ , par exemple avec  $l = 4$  pour les éléments quadratiques

## 5. LE PROBLEME NON LINEAIRE CONTINU

On peut écrire le problème (1 1)-(1 3) dans la formulation mixte de Miyoshi comme ci-dessous

$(\widetilde{PN})$  Trouver  $(\psi, y) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}$ ,  $(\sigma, u) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall \tau \in \widetilde{\Sigma}, \quad a(\psi, \tau) + \tilde{b}(\tau, y) = 0, \quad (5 \ 1)$$

$$\forall v \in \widetilde{V}, \quad -\tilde{b}(\psi, v) = - \int_{\Omega} [\sigma, \sigma] v dx, \quad (5 \ 2)$$

$$\forall \tau \in \widetilde{\Sigma}, \quad a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, u) = 0, \quad (5 \ 3)$$

$$\forall v \in \widetilde{V}, \quad -\tilde{b}(\sigma, v) = \lambda \int_{\Omega} [f, \sigma] v dx + \int_{\Omega} [\psi, \sigma] v dx \quad (5 \ 4)$$

On a déjà vu dans [9] que toute solution faible dans  $H_0^2(\Omega)$  du problème (1 1)-(1 3) est en effet dans  $H^3(\Omega)$  Donc par les méthodes habituelles, on peut

démontrer que si le triplet  $\{(\psi, y), (\sigma, u), \lambda\}$  est solution du problème non linéaire ( $\widetilde{\text{PN}}$ ), alors  $(y, u, \lambda)$  est solution faible dans  $H_0^2(\Omega)$  du problème (1.3), et réciproquement. Étant donné cette équivalence avec la formulation faible, on peut traduire les résultats du problème continu donnés dans [9] dans le langage de la formulation mixte, et on a l'algorithme du type [11] pour le problème continu. Puisque l'on va voir le cas discret plus en détail on indiquera simplement le résultat sans démonstration dans le cas continu.

Soit  $(\sigma_0, u_0, \lambda_0) \in \widetilde{\Sigma} \times \widetilde{V} \times \mathbb{R}$  une solution du problème de valeurs propres ( $\widetilde{\text{PV}}$ ), avec  $\lambda_0$  valeur propre simple et  $|\sigma_0|_{0,\Omega} = 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$  un paramètre. Alors pour  $\varepsilon$  assez petit il existe une solution unique du problème ( $\widetilde{\text{PN}}$ ) de la forme suivante :

$$\sigma = \varepsilon \sigma_0 + \theta, \quad (5.5)$$

$$u = \varepsilon u_0 + z, \quad (5.6)$$

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma, \psi] u_0 dx \right). \quad (5.7)$$

où  $(\psi, y)$  est calculé à partir de  $(\sigma, u)$  par (5.1)-(5.2) et où  $(\theta, z)$  est la solution orthogonale à  $(\sigma_0, u_0)$  [au sens de (3.32)] du problème de l'alternative de Fredholm ( $\widetilde{\text{PF}}$ ), avec second membre  $(\lambda - \lambda_0) [f, \sigma] + [\sigma, \psi]$ ; cette solution vérifie de plus,  $|\theta|_{0,\Omega} \leq \varepsilon$ .

La solution (5.5)-(5.7) du problème ( $\widetilde{\text{PN}}$ ) peut être décrite comme un point fixe d'un certain opérateur, et l'algorithme suivant converge vers cette solution :

*Étape 1 :* On choisit  $(\theta^{(0)}, z^{(0)})$  orthogonal à  $(\sigma_0, u_0)$  [au sens de (3.32)] avec  $|\theta^{(0)}|_{0,\Omega} \leq \varepsilon$ . Par exemple on peut choisir  $\theta^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ .

*Étape 2 :* Supposons que  $(\theta^{(i)}, z^{(i)})$  soit connu. On pose  $\sigma^{(i)} = \varepsilon \sigma_0 + \theta^{(i)}, u^{(i)} = \varepsilon u_0 + z^{(i)}$ , et on résout le problème biharmonique ( $\widetilde{\text{P}}$ ) avec second membre  $-[\sigma^{(i)}, \sigma^{(i)}]$  pour obtenir  $(\psi^{(i)}, y^{(i)})$ .

*Étape 3 :* On calcule

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda_0 \left( 1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\psi^{(i)}, \sigma^{(i)}] u_0 dx \right). \quad (5.8)$$

*Étape 4 :* On résout le problème de Fredholm ( $\widetilde{\text{PF}}$ ) avec second membre  $(\lambda^{(i+1)} - \lambda_0) [f, \sigma^{(i)}] + [\sigma^{(i)}, \psi^{(i)}]$  pour obtenir  $(\theta^{(i+1)}, z^{(i+1)})$  et on retourne à l'étape 2. ■

## 6. LE PROBLÈME NON LINÉAIRE DISCRET

L'analogue discret du problème ( $\widetilde{\text{PN}}$ ) s'écrit :

( $\text{PN}_h$ ) Trouver  $(\psi_h, y_h) \in \Sigma_h \times V_h$ ,  $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$ ,  $\lambda_h \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\psi_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, y_h) = 0, \quad (6.1)$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\psi_h, v_h) = - \int_{\Omega} [\sigma_h, \sigma_h] v_h dx, \quad (6.2)$$

$$\forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h) = 0, \quad (6.3)$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \lambda_h \left\{ \int_{\Omega} [f, \sigma_h] v_h dx + \int_{\Omega} [\psi_h, \sigma_h] v_h dx \right\} \quad (6.4)$$

Soit  $(\sigma_{0h}, u_{0h}, \lambda_{0h})$  solution du problème linéaire de valeurs propres ( $\text{PV}_h$ ), approchant  $(\sigma_0, u_0, \lambda_0)$  avec  $\lambda_{0h}$  valeur propre simple et  $|\sigma_{0h}|_{0,\Omega} = 1$ . Pour  $\varepsilon > 0$  donné on s'intéresse aux solutions de la forme

$$\sigma_h = \varepsilon \sigma_{0h} + \theta_h; \quad u_h = \varepsilon u_{0h} + z_h \quad (6.5)$$

et en substituant (6.5) dans (6.3)-(6.4) on déduit que  $(\theta_h, z_h)$  vérifie ( $\text{PF}_h$ ) avec second membre  $(\lambda_h - \lambda_{0h}) [f, \sigma_h] + [\sigma_h, \psi_h]$ . Donc l'existence de  $(\theta_h, z_h)$  exige que [cf. (3.36)] :

$$(\lambda_h - \lambda_{0h}) \int_{\Omega} [f, \sigma_h] u_{0h} dx + \int_{\Omega} [\psi_h, \sigma_h] u_{0h} dx = 0, \quad (6.6)$$

ce qui nous permet de calculer  $\lambda_h$  en fonction de  $(\sigma_h, u_h)$ . Notons que

$$\int_{\Omega} [f, \sigma_h] u_{0h} dx = \int_{\Omega} [f, \sigma_{0h}] u_h dx = \varepsilon \int_{\Omega} [f, \sigma_{0h}] u_{0h} dx = \varepsilon \lambda_{0h}^{-1} \neq 0,$$

où on a utilisé d'abord la propriété ( $\mathcal{P}$ ) [cf. (3.10)] et ensuite l'orthogonalité de  $(\theta_h, z_h)$  à  $(\sigma_{0h}, u_{0h})$  au sens de (3.36) et finalement la condition de normalisation de  $(\sigma_{0h}, u_{0h})$ . Alors (6.6) nous donne  $\lambda_h$  explicitement, à savoir :

$$\lambda_h = \lambda_{0h} \left( 1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma_h, \psi_h] u_{0h} dx \right). \quad (6.7)$$

Pour  $v_h \in V_h$  donné on calcule d'abord  $M_h v_h$  (cf. n° 3) et on résout le problème biharmonique discret ( $\text{P}_h$ ) avec second membre  $-[M_h v_h, M_h v_h]$  pour obtenir  $(\psi_h(v_h), y_h(v_h)) \in \Sigma_h \times V_h$ . Maintenant on peut définir

$$\Lambda_h^e v_h = \lambda_{0h} \left( 1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [M_h v_h, \psi_h(v_h)] u_{0h} dx \right) \quad (6.8)$$

et

$$S_h^\varepsilon v_h = (\Lambda_h^\varepsilon v_h - \lambda_{0h}) [f, M_h v_h] + [M_h v_h, \psi_h(v_h)]. \tag{6.9}$$

Finalement pour  $g \in L^2(\Omega)$  données définissons  $Q_h g$  la composante dans  $V_h$  de la solution du problème de Fredholm discret (PF<sub>h</sub>) vérifiant (3.37). Pour  $z_h \in V_h$  donné, définissons

$$T_h^\varepsilon z_h = Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon u_{0h} + z_h)). \tag{6.10}$$

Avec ces définitions il est évident que toute solution du problème (PN<sub>h</sub>) de la forme (6.5) provient d'un point fixe de  $T_h^\varepsilon$ . On montre que, pour  $\varepsilon$  assez petit,  $T_h^\varepsilon$  est une contraction de la boule de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ . Pour cela on a d'abord les estimations suivantes :

LEMME 6.1. — Supposons que  $u_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ . On suppose que  $z_h, z_h^i \in B(h; 0, \varepsilon), i = 1, 2$ , où

$$B(h; 0, \varepsilon) = \{v_h \in V_h \mid \|v_h\|_h = |M_h v_h|_{0,\Omega} \leq \varepsilon\} \tag{6.11}$$

On pose

$$\theta_h = M_h z_h, \quad \theta_h^i = M_h z_h^i, \quad i = 1, 2$$

et

$$u_h = \varepsilon u_{0h} + z_h, \quad \sigma_h = \varepsilon \sigma_{0h} + \theta_h, \quad u_h^i = \varepsilon u_{0h} + z_h^i, \quad \sigma_h^i = \varepsilon \sigma_{0h} + \theta_h^i, \\ i = 1, 2.$$

Alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  et de  $\varepsilon$  telle que

$$|\Lambda_h^\varepsilon u_h - \lambda_{0h}| \leq C\varepsilon^2, \tag{6.12}$$

$$|\Lambda_h^\varepsilon u_h^1 - \Lambda_h^\varepsilon u_h^2| \leq C\varepsilon |\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\Omega}, \tag{6.13}$$

$$|S_h^\varepsilon u_h|_{0,1,\Omega} \leq C\varepsilon^3, \tag{6.14}$$

$$|S_h^\varepsilon u_h^1 - S_h^\varepsilon u_h^2|_{0,1,\Omega} \leq C\varepsilon^2 |\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\Omega}, \tag{6.15}$$

$$\|T_h^\varepsilon z_h\|_h \leq C\varepsilon^3, \tag{6.16}$$

$$\|T_h^\varepsilon z_h^1 - T_h^\varepsilon z_h^2\|_h \leq C\varepsilon^2 |\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{0,\Omega}. \tag{6.17}$$

Démonstration : (i) Puisque  $u_0 \in H^3(\Omega)$ , on a  $\{u_{0h}\}$  bornée dans  $L^\infty(\Omega)$  [cf. (2.22)]. Alors :

$$|\Lambda_h^\varepsilon u_h - \lambda_{0h}| = \varepsilon^{-1} |\lambda_{0h}| \int_\Omega [\sigma_h, \psi_h] u_{0h} dx \leq C\varepsilon^{-1} |\sigma_h|_{0,\Omega} |\psi_h|_{0,\Omega} |u_{0h}|_{0,\infty,\Omega}.$$

Mais  $|\sigma_h|_{0, \Omega} \leq \varepsilon$  Par ailleurs puisque  $[\sigma_h, \sigma_h] \in W_k^{2k}$ , on peut appliquer le théorème 4.3 pour obtenir

$$|\psi_h|_{0, \Omega} \leq C |[\sigma_h, \sigma_h]|_{0, 1, \Omega} \leq C\varepsilon^2,$$

d'où on déduit (6.12)

(ii) On déduit (6.13) de la même façon que (6.12). Les estimations (6.14) et (6.15) sont directes et ne posent aucune difficulté

(iii) On a  $T_h^\varepsilon z_h = Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon u_{0h} + z_h))$  et on sait que  $S_h^\varepsilon(\varepsilon u_{0h} + z_h) \in W_h^{2k}$ . Alors on applique cette fois le théorème 4.4 pour obtenir

$$\|T_h^\varepsilon z_h\|_h \leq C |S_h^\varepsilon(\varepsilon u_{0h} + z_h)|_{0, 1, \Omega},$$

d'où on déduit (6.16) grâce à (6.14). De la même façon on a (6.17) grâce à (6.15) par une seconde application du théorème 4.4. Le lemme est donc complètement démontré. ■

Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, de telle sorte que  $C\varepsilon^2 < 1$ , alors  $T_h$  est une application de  $B(h, 0, \varepsilon)$  dans elle-même et d'autre part cette application est une contraction. Donc il existe un point fixe unique, qui peut être calculé par la suite itérative

$$z_h^{(i+1)} = T_h z_h^{(i)},$$

d'où l'algorithme suivant pour résoudre (PN<sub>h</sub>)

*Étape 1* On choisit  $(\theta_h^{(0)}, z_h^{(0)})$  orthogonal [au sens de (3.36)] à  $(\sigma_{0h}, u_{0h})$  avec  $|\theta_h^{(0)}|_{0, \Omega} \leq \varepsilon$  (exemple,  $\theta_h^{(0)} = 0, z_h^{(0)} = 0$ )

*Étape 2* On suppose  $(\theta_h^{(i)}, z_h^{(i)})$  connu. Alors on pose  $\sigma_h^{(i)} = \varepsilon \sigma_{0h} + \theta_h^{(i)}$ ,  $u_h^{(i)} = \varepsilon u_{0h} + z_h^{(i)}$  et on résout le problème biharmonique discret (P<sub>h</sub>) avec second membre  $-[\sigma_h^{(i)}, \sigma_h^{(i)}]$  pour obtenir  $(\psi_h^{(i)}, y_h^{(i)})$

*Étape 3* On calcule

$$\lambda_h^{(i+1)} = \lambda_{0h} \left( 1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma_h^{(i)}, \psi_h^{(i)}] u_{0h} dx \right) \quad (6.18)$$

*Étape 4* On résout le problème de Fredholm (PF<sub>h</sub>) avec second membre  $(\lambda_h^{(i+1)} - \lambda_{0h}) [f, \sigma_h^{(i)}] + [\sigma_h^{(i)}, \psi_h^{(i)}]$  pour obtenir  $(\theta_h^{(i+1)}, z_h^{(i+1)})$  et on retourne à l'étape 2. ■

Cet algorithme converge vers la solution  $((\psi_h, y_h), (\sigma_h, u_h), \lambda_h)$  du problème (PN<sub>h</sub>)

## 7. ESTIMATIONS D'ERREUR

Dans ce numéro nous allons obtenir des estimations de l'erreur commise en passant au problème discret. Comme dans le numéro précédent nous aurons souvent l'occasion d'utiliser les estimations du n° 4

Soit  $(\sigma_0, u_0, \lambda_0)$  solution du problème  $(\widetilde{P\check{V}})$  avec  $\lambda_0$  valeur propre simple et  $|\sigma_0|_{0,\Omega} = 1$ . Soit  $(\sigma_{0h}, u_{0h}, \lambda_{0h})$  son approximation, et solution de  $(P\check{V}_h)$ . Pour  $h$  assez petit,  $\lambda_{0h}$  est également valeur propre simple. Soit  $\{(\psi, y), (\sigma, u), \lambda\}$  solution du problème  $(\widetilde{P\check{N}})$  obtenue à partir de  $(\sigma_0, u_0, \lambda_0)$  comme dans le n° 5. Soit  $\{(\psi_h, y_h), (\sigma_h, u_h), \lambda_h\}$  solution de  $(P\check{N}_h)$ , son analogue discret.

LEMME 7.1 : Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  et de  $\varepsilon$  telle que

$$|\psi - \psi_h|_{0,\Omega} + |y - y_h|_{1,\Omega} \leq C \{r_h + \varepsilon |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + \varepsilon^2 h\}, \tag{7.1}$$

où  $r_h \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

Démonstration : Soit  $\tilde{\sigma}_h \in \Sigma_h$  tel que  $\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\Omega} \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . On définit  $(\psi_h, y_h^1) \in \Sigma_h \times V_h$  solution du problème biharmonique discret  $(P_h)$  avec second membre  $-\lceil \sigma, \sigma \rceil$  et  $(\psi_h^2, y_h^2) \in \Sigma_h \times V_h$  solution de  $(P_h)$  avec second membre  $-\lceil \tilde{\sigma}_h, \tilde{\sigma}_h \rceil$ . Alors on a d'après les estimations (2.21) et (2.22) :

$$|\psi - \psi_h^1|_{0,\Omega} + |y - y_h^1|_{0,\Omega} \leq Ch \|\psi\|_{1,\Omega}. \tag{7.2}$$

On peut majorer les quantités  $|\psi_h^1 - \psi_h^2|_{0,\Omega}$  et  $|y_h^1 - y_h^2|_{1,\Omega}$  par la norme en  $L^2(\Omega)$  de  $\lceil \sigma, \sigma \rceil - \lceil \tilde{\sigma}_h, \tilde{\sigma}_h \rceil$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned} &|\psi_h^1 - \psi_h^2|_{0,\Omega} + |y_h^1 - y_h^2|_{0,\Omega} \\ &\leq C (\|\sigma\|_{1,\Omega} + \|\sigma_h\|_{1,\Omega}) \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\Omega} \leq C \|\sigma\|_{1,\Omega} \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Finalement, puisque  $\lceil \tilde{\sigma}_h, \tilde{\sigma}_h \rceil - \lceil \sigma_h, \sigma_h \rceil \in W_h^{2k}$ , on peut appliquer le théorème 4.3 pour obtenir :

$$\begin{aligned} &|\psi_h^2 - \psi_h|_{0,\Omega} + |y_h^2 - y_h|_{1,\Omega} \\ &\leq C (|\tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} + |\sigma_h|_{0,\Omega}) |\tilde{\sigma}_h - \sigma_h|_{0,\Omega} \\ &\leq C (|\tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} + |\sigma_h|_{0,\Omega}) (|\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} + |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega}). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Observons que  $|\sigma|_{0,\Omega} \leq \varepsilon, |\sigma_h|_{0,\Omega} \leq \varepsilon$ . De plus, puisque  $(\sigma, u)$  est solution du problème continu, on a  $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  et l'estimation  $\|u\|_{3,\Omega} \leq C \|u\|_{2,\Omega}$  grâce au théorème de régularité démontré dans [9]. Donc

$$\|\sigma\|_{1,\Omega} \leq C \|u\|_{3,\Omega} \leq C\varepsilon \tag{7.5}$$

et

$$\|\psi\|_{1,\Omega} \leq C \lceil \sigma, \sigma \rceil_{0,\Omega} \leq C \|\sigma\|_{1,\Omega}^2 \leq C\varepsilon^2, \tag{7.6}$$

d'où on tire (7.1) avec  $r_h = \varepsilon \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\Omega}$ . ■

LEMME 7.2 : Supposons que  $u_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ . Alors il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  et de  $\varepsilon$  telle que

$$|\lambda - \lambda_h| \leq C (h^2 + \varepsilon^2 h + r_h + \varepsilon |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega}). \tag{7.7}$$

*Démonstration* : On a

$$\begin{aligned} \lambda_h - \lambda &= (\lambda_{0h} - \lambda_0) + \varepsilon^{-1} (\lambda_0 - \lambda_{0h}) \int_{\Omega} [\sigma, \psi] u_0 \, dx \\ &\quad + \lambda_{0h} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma - \sigma_h, \psi] u_0 \, dx \\ &\quad + \lambda_{0h} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma_h, \psi] (u_0 - u_{0h}) \, dx \\ &\quad + \lambda_{0h} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma_h, \psi - \psi_h] u_{0h} \, dx. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse  $u_0 \in H^3(\Omega)$ , on a  $|u_0 - u_{0h}|_{1,\Omega} = O(h^2)$ ,  $|\lambda_0 - \lambda_{0h}| = O(h^2)$  et  $\{u_{0h}\}$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega)$ . Par ailleurs,  $|\sigma|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon$  et grâce au théorème 4.1,  $|\psi|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon^2$ . Alors on obtient :

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^2 + Ch^2\varepsilon^2 + C\varepsilon|\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + Ch^2\varepsilon^2 + C|\psi - \psi_h|_{0,\Omega},$$

d'où on déduit (7.7). ■

Maintenant on a tous les éléments nécessaires pour les estimations finales.

**THÉORÈME 7.1** : *On suppose que  $u_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  et de  $\varepsilon$  telle que, pour  $\varepsilon$  assez petit,*

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + |u - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch + Ch^2\varepsilon + s_h, \tag{7.8}$$

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^2 + Ch\varepsilon + Cr_h + C\varepsilon s_h, \tag{7.9}$$

où  $r_h$  est la quantité apparaissant dans l'inégalité (7.1) et  $s_h \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

*Démonstration* : On a d'abord

$$\begin{aligned} S^\varepsilon u &= (\lambda - \lambda_0) [f, \sigma] + [\psi, \sigma], \\ S_h^\varepsilon u_h &= (\lambda_h - \lambda_{0h}) [f, \sigma_h] + [\psi_h, \sigma_h]. \end{aligned}$$

Choisissons  $\tilde{\sigma}_h, \tilde{\psi}_h \in \Sigma_h$  tels que  $\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\Omega} \rightarrow 0, \|\psi - \tilde{\psi}_h\|_{1,\Omega} \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . On définit

$$\tilde{S}_h^\varepsilon u_h = (\lambda_h - \lambda_{0h}) [f, \sigma_h] + [\tilde{\psi}_h, \tilde{\sigma}_h]. \tag{7.10}$$

On définit  $(\theta_h^1, z_h^1), (\theta_h^2, z_h^2)$  dans  $\Sigma_h \times V_h$  solutions de problèmes de Fredholm  $(PF_h)$  avec second membres  $P_{0h}(S^\varepsilon u)$  et  $P_{0h}(\tilde{S}_h^\varepsilon u_h)$  respectivement, de sorte que l'on a

$$z = Q(S^\varepsilon u), \quad z_h = Q_h(S_h^\varepsilon u_h), \quad z_h^1 = Q_h(S^\varepsilon u), \quad z_h^2 = Q_h(\tilde{S}_h^\varepsilon u_h). \tag{7.11}$$

Tout d'abord, grâce au théorème 3.4, on a

$$|\theta - \theta_h^1|_{0, \Omega} + |z - z_h^1|_{1, \Omega} \leq Ch(\|z\|_{3, \Omega} + \|u_0\|_{3, \Omega}) \leq Ch\varepsilon^2 + Ch,$$

puisque

$$\|z\|_{3, \Omega} \leq C\|\sigma\|_{1, \Omega}^2 \leq Ch \tag{7.12}$$

Ensuite, grâce au même théorème, on a également

$$\begin{aligned} |\theta_h^1 - \theta_h^2|_{0, \Omega} + |z_h^1 - z_h^2|_{1, \Omega} &\leq C|Su - \tilde{S}_h^\varepsilon u_h|_{0, \Omega} \\ &\leq C\varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0, \Omega} + Ch^2\varepsilon + Ch\varepsilon^2 + C\varepsilon r_h \\ &\quad + C\varepsilon^2\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1, \Omega} + C\varepsilon\|\psi - \tilde{\Psi}_h\|_{1, \Omega}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Finalement, grâce au théorème 4.4, on a (puisque  $\tilde{S}_h^\varepsilon u_h - S_u^\varepsilon u_h \in \mathcal{W}_h^{2k}$ ) :

$$\begin{aligned} |\theta_h^2 - \theta_h|_{0, \Omega} + |z_h^2 - z_h|_{1, \Omega} &\leq C|\tilde{S}_h^\varepsilon u_h - S_h^\varepsilon u_h|_{0, 1, \Omega} \\ &\leq C\{|\psi_h|_{0, \Omega}|\sigma_h - \tilde{\sigma}_h|_{0, \Omega} + |\tilde{\sigma}_h|_{0, \Omega}|\psi_h - \tilde{\Psi}_h|_{0, \Omega}\} \\ &\leq C\{\varepsilon^2|\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0, \Omega} + \varepsilon^2|\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0, \Omega} \\ &\quad + \varepsilon|\psi - \psi_h|_{0, \Omega} + \varepsilon^2|\psi - \tilde{\Psi}_h|_{0, \Omega}\}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

On pose

$$s_h = \varepsilon(\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1, \Omega} + \|\psi - \tilde{\Psi}_h\|_{1, \Omega}), \tag{7.15}$$

expression qui tend vers zéro lorsque  $h \rightarrow 0$ . Alors on obtient :

$$|\theta - \theta_h|_{0, \Omega} + |z - z_h|_{1, \Omega} \leq C\{s_h + \varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0, \Omega}\} + Ch + Ch^2\varepsilon \tag{7.16}$$

et donc

$$|\sigma - \sigma_h|_{0, \Omega} + |u - u_h|_{0, \Omega} \leq Ch\varepsilon + Ch + Ch^2\varepsilon + s_h + C\varepsilon^2|\sigma - \sigma_h|_{0, \Omega}. \tag{7.17}$$

Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit pour que  $C\varepsilon^2 \leq 1/2$  (par exemple) on obtient (7.8). L'estimation (7.9) est une conséquence directe de (7.7) et de (7.8). ■

*Remarque 7.1* : Si  $u_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ , alors on a de même pour  $z$  et donc  $\sigma$ ,  $\psi \in (H^2(\Omega))_s^4$ . Par conséquent on a

$$\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1, \Omega} \leq Ch(\|u\|_{4, \Omega} + \|u_0\|_{4, \Omega})$$

et de même pour  $\|\psi - \tilde{\Psi}_h\|_{1, \Omega}$ . Dans ces conditions on obtient

$$|r_h| \leq C\varepsilon h, \quad |s_h| \leq C\varepsilon h$$

et donc on a

$$\left. \begin{aligned} |\sigma - \sigma_h|_{0, \Omega} + |u - u_h|_{1, \Omega} &\leq Ch + Ch^2\varepsilon, \\ |\lambda - \lambda_h| &\leq Ch^2 + Ch\varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned} \right\} \tag{7.18}$$

*Remarque 7 2* Pour des domaines qui ne sont pas des polygones, on peut utiliser des éléments finis isoparamétriques ainsi qu'un procédé d'intégration numérique. Pour les estimations d'erreur dans ce cas on peut suivre les démarches de [10] ■

## 8. CONCLUSIONS

La méthode de Miyoshi est bien adaptée pour les équations de von Karman parce que l'on obtient l'approximation du déplacement, de la fonction d'Airy et du tenseur de contraintes (dérivées secondes de la fonction d'Airy). Mais on a vu qu'il y a une difficulté sérieuse, même dans le cas linéaire, qui nous a conduit à supposer que  $f$  est un polynôme de degré 2. Donc, bien qu'une méthode mixte soit en principe plus facile à mettre en œuvre qu'une méthode conforme la méthode conforme décrite dans [9] reste préférable si  $f$  est une fonction quelconque. On a démontré la convergence de la méthode avec l'hypothèse minimale de régularité, à savoir, la solution appartient à l'espace  $H^3(\Omega)$ , mais pour obtenir l'ordre de convergence il faut plus de régularité, ce qui n'était pas nécessaire pour la méthode conforme.

En ce qui concerne le cas d'une plaque soumise à une pression uniforme ( $f = -1/2(x^2 + y^2)$ ) si l'on ne s'intéresse pas au tenseur de contraintes il existe une meilleure méthode mixte, à savoir, celle de [7]. Cette méthode a comme inconnues  $u$  et  $-\Delta u$  et donc est plus facile à programmer (la méthode de Miyoshi a comme inconnues  $u, \sigma_{11}, \sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{22}$ ). Les résultats de Scholz [17] sur l'équation biharmonique montrent que l'on peut utiliser cette méthode même avec des éléments de Lagrange du type 1.

## REMERCIEMENTS

Les résultats présentés dans cet article figurent parmi les travaux réalisés par l'auteur lors d'un stage effectué au Laboratoire à l'Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique (I R I A) et au Laboratoire d'Analyse numérique de l'Université de Paris-VI. L'auteur remercie les responsables de ces laboratoires pour les facilités que lui ont été accordées ainsi que M. Ciarlet pour son appui et les encouragements tout au long de ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 L. BAUER et E. REISS, *Non Linear Buckling of Rectangular Plates*, SIAM, Num Anal, vol 13, 1965, p 603-627
- 2 F. BREZZI, *On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers*, RAIRO, Analyse numérique, vol R-2, 1974, p 129-151

3. F. BREZZI et P. A. RAVIART, *Mixed Finite Element Methods for Fourth Order Elliptic Equations*, Rapport Interne, n° 9, École Polytechnique, Palaiseau, 1976.
4. C. CANUTO, *Eigenvalue Approximations by Mixed Methods*, R.A.I.R.O., Analyse numérique. vol. 12, 1978, p. 27-50.
5. P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
6. P. G. CIARLET, *Derivation of the von Kármán Equations from Three-Dimensional Elasticity*, Proceedings of the Fourth Conference on Basic Problems in Numerical Analysis, Plzeň, 1978 (à paraître).
7. P. G. CIARLET et P. A. RAVIART, *A Mixed Finite Element Method for the Biharmonic Equation in Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, C. DE BOOR, éd. 1974, p. 125-145.
8. S. KESAVAN, *Homogenization of Elliptic Eigenvalue Problems*, Applied Mathematics and Optimization, vol. 5, n° 2, 1979, p. 153-167.
9. S. KESAVAN, *La méthode de Kikuchi appliquée aux équations de von Karman*, Numerische Mathematik, vol. 32, 1979, p. 209-232.
10. S. KESAVAN et M. VANNINATHAN, *Sur une méthode d'éléments finis mixte pour l'équation biharmonique*, R.A.I.R.O., Analyse numérique, vol. 11, n° 3, 1977, p. 255-270.
11. F. KIKUCHI, *An Iterative Finite Element Scheme for Bifurcation Analysis of Semi-Linear Elliptic Equations*, Report n° 542, Institute of space and Aeronautical Science, Univ. of Tokyo, Japan, 1976.
12. V. A. KONDRAT'EV, *Boundary Value Problems for Elliptic Equations in Domains with Conical or Angular Points*, Trudy Moskov. Mat. Obsc., vol. 16, 1967, p. 209-292.
13. B. MERCIER et J. RAPPAZ, *Eigenvalue Approximation via Non-Conforming and Hybrid Finite Element Methods*, Rapport Interne, n° 33, École Polytechnique, Palaiseau, 1978.
14. T. MIYOSHI, *A Finite Element Method for the Solution of Fourth Order Partial Differential Equations*, Kumamoto J. Sc. (Math.), vol. 9, 1973, p. 87-116.
15. R. RANNACHER, *Non Conforming Finite Element Methods for Eigenvalue Problems in Linear Plate Theory*, Preprint, n° 191, Univ. of Bonn, W. Germany, 1978.
16. R. RANNACHER, *On Non-Conforming and Mixed Finite Element Methods for Plate Bending Problems*, The linear case, R.A.I.R.O., Analyse numérique (à paraître).
17. R. SCHOLZ, *Approximation von Sattelpunkten mit Finiten Elementen*, Bonner Math. Schrifter, vol. 89, 1976, p. 53-66.
18. G. STRANG et G. J. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1973.