

BERNARD LACOLLE

**Maximisation globale de la norme euclidienne  
sur un compact : résolution approchée par  
utilisation des problèmes projetés**

*RAIRO. Analyse numérique*, tome 13, n° 2 (1979), p. 101-117

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1979\\_\\_13\\_2\\_101\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1979__13_2_101_0)

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**MAXIMISATION GLOBALE  
DE LA NORME EUCLIDIENNE SUR UN COMPACT :  
RÉSOLUTION APPROCHÉE  
PAR UTILISATION DES PROBLÈMES PROJETÉS (\*)**

par Bernard LACOLLE (1)

Communiqué par F ROBERT

Résumé. — Dans cet article, nous décrivons une méthode de maximisation globale de la norme euclidienne usuelle sur un compact  $\mathcal{D}$  de  $\mathbf{R}^n$  lorsque  $n$  est petit. La méthode demande uniquement la maximisation de fonctionnelles linéaires sur  $\mathcal{D}$  mais aucune hypothèse supplémentaire sur  $\mathcal{D}$  n'est nécessaire.

Abstract — In this paper, we describe a method for global maximisation of the usual euclidian norm subject to a compact domain  $\mathcal{D}$  of  $\mathbf{R}^n$  when  $n$  is small. The method only requires maximisation of linear functionals on  $\mathcal{D}$  but no supplementary hypothesis about  $\mathcal{D}$  is needed.

**INTRODUCTION**

Soient  $\mathcal{D}$  une partie compacte de  $\mathbf{R}^p$  et  $\varphi_2$  la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbf{R}^p$ . Le problème consistant à calculer  $X^* \in \mathcal{D}$  tel que  $\varphi_2(X^*) = \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} \varphi_2(X)$  ne peut être abordé actuellement que dans des cas extrêmement élémentaires. Deux raisons essentielles à cela : la première est que, même lorsque  $\mathcal{D}$  est « régulier » (convexe par exemple) l'existence très fréquente de maximums locaux de la norme  $\varphi_2$  sur  $\mathcal{D}$  (illustrée sur la figure 1) écarte en général toutes les méthodes d'optimisation classiques qui utilisent une croissance locale de la fonction à maximiser; ces méthodes convergent en effet vers un maximum local. La seconde raison est que la plupart des algorithmes actuellement existant de maximisation globale [1] ne sont pratiquement utilisables que si la dimension de l'espace est inférieure ou égale à 2.

Les exemples à l'origine de ce travail nous ont suggéré l'utilisation de problèmes annexes au problème initial consistant à trouver pour  $u \in \mathbf{R}^p$  un vecteur  $X_u \in \mathcal{D}$  tel que

$$X_u^T u = \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} X^T u.$$

(\*) Reçu mai 1978

(1) Université scientifique et médicale, Laboratoire de Mathématiques appliquées, Grenoble.

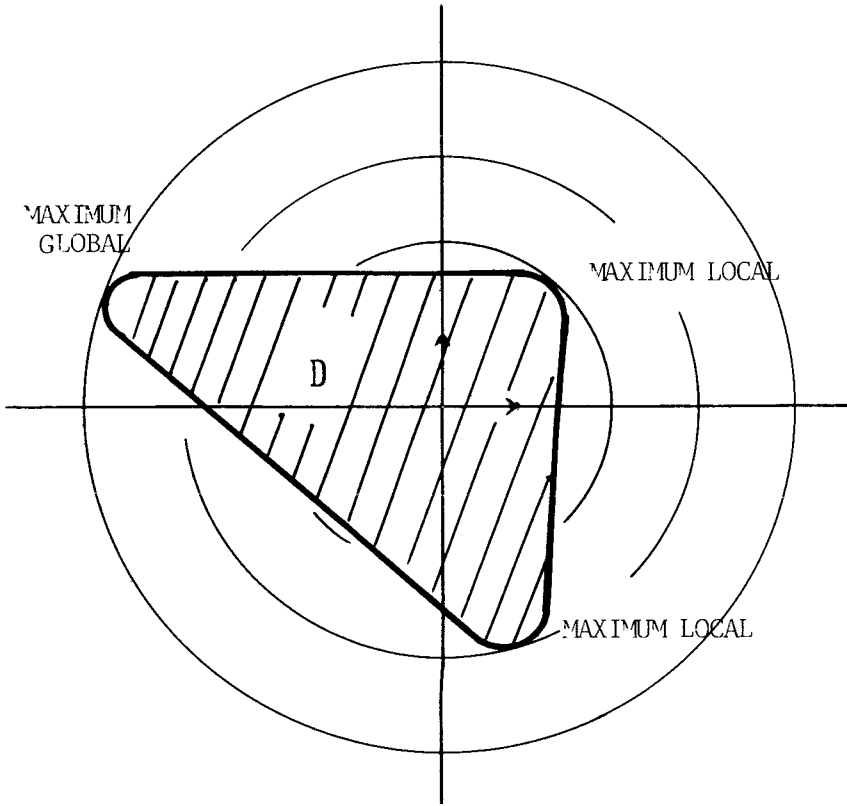


Figure 1

Ces problèmes de maximisation de fonctionnelles linéaires sur  $\mathcal{D}$  (illustrés dans  $\mathbf{R}^2$  par la figure 2) constitueront l'outil de base de notre méthode. La seule hypothèse faite sur le compact  $\mathcal{D}$  sera que l'on puisse, à  $u$  quelconque de  $\mathbf{R}^p$ , associer une solution  $X_u$  du problème « projeté » sur  $u$ .

D'autre part, la recherche d'une solution aux précisions habituellement utilisées étant en général impossible, nous chercherons à obtenir une solution maximisant la norme  $\varphi_2$  à une *précision relative donnée* relativement grossière (de l'ordre de 5 à 10 % ou même plus).

L'essentiel de ce travail consiste à montrer comment on peut choisir uniquement en fonction de  $p$  et de la précision demandée, et donc *indépendamment de  $\mathcal{D}$*  un certain nombre de directions de projections de façon à déduire très simplement à partir des solutions des problèmes « projetés », associés aux directions précédentes, une solution du problème initial à la précision demandée.

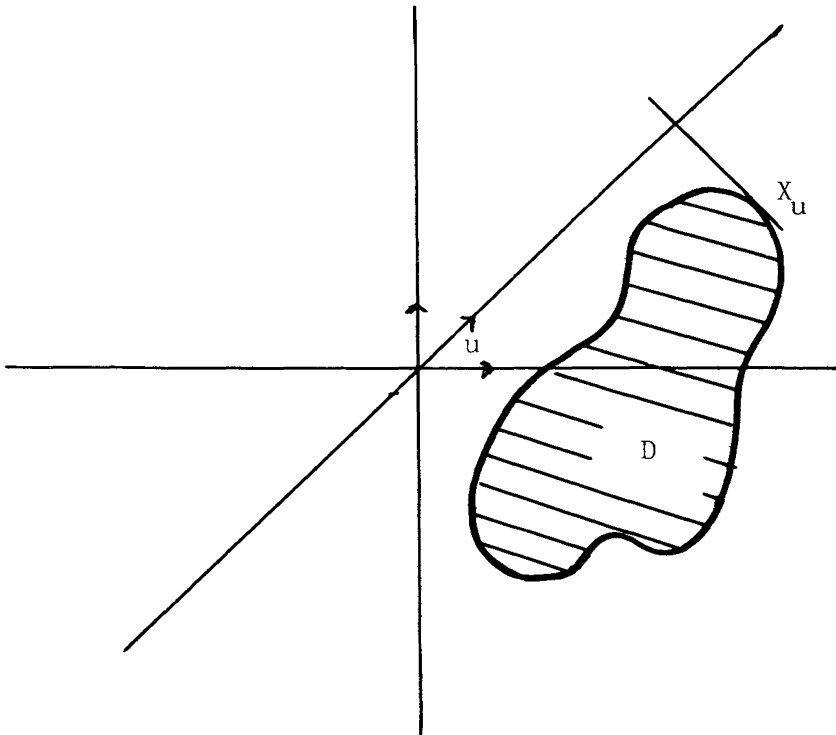


Figure 2

Cette méthode nous permettra d'aborder des problèmes dans un espace de dimension 4 ou 5 avec des temps de calcul fort raisonnables.

Nous montrerons dans la section 1 un exemple de problème ayant motivé ce travail. L'algorithme utilisé sera décrit et étudié dans la section 2. D'autres exemples seront donnés dans la section 3.

**NOTATIONS ET DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES**

$V(i)$  désignera la  $i$ -ième coordonnée du vecteur  $V$  de  $\mathbf{R}^p$ .  $\mathcal{M}_{n,n}$  désignera l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $n$  colonnes à coefficients réels,  $A(i, j)$  désignera le terme de la  $i$ -ième ligne  $j$ -ième colonne de la matrice  $A$ .

Nous appellerons *problème de distance euclidienne maximale* (associé à  $\mathcal{D}$  compact de  $\mathbf{R}^p$ ) le problème consistant à trouver  $X^* \in \mathcal{D}$  tel que :

$$\varphi_2(X^*) = \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} \varphi_2(X).$$

Nous appellerons *problème projeté* (sur la direction  $u$  de  $\mathbf{R}^p$ ) le problème consistant à trouver  $X_u \in \mathcal{D}$  tel que

$$X_u^T u = \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} X^T u.$$

## 1. EXEMPLE INTRODUCTIF

Le problème que nous allons décrire ici est une version très simplifiée d'un problème combinatoire (non résolu) intervenant dans l'étude de la restructuration optimale de programmes se déroulant dans des systèmes à pagination [3].

Nous montrerons comment formaliser ce problème en un problème de *distance euclidienne maximale* et la manière de résoudre les *problèmes projetés* : ceci placera le problème dans le cadre de la méthode exposée au paragraphe 2 et nous donnerons les résultats d'expériences numériques au paragraphe 2.5.

### 1.1. Un problème de partitionnement [4]

Soit  $E = \{1, 2, \dots, 2n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$  ( $n$  de l'ordre de 50) et  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{2n, 2n}(\mathbf{R})$  donnée par

$$A = \sum_{i=1}^p B_i B_i^T \quad \text{où } B_i \in \mathbf{R}^{2n}, \quad i=1, 2, \dots, p$$

et  $p$  est faible (de l'ordre de 5).

Le problème est de partitionner  $E$  en deux sous-ensembles  $E_1$  et  $E_2$  comportant chacun  $n$  éléments et tels que :  $\sum_{\substack{i \in E_1 \\ i \in E_2}} A(i, j)$  soit minimum.

Signalons la complexité du problème : dans le cas où  $A$  est une matrice symétrique à coefficients dans  $\{0, 1\}$  le problème combinatoire est *N-P* complet [2].

### 1.2. Formulation en terme de problème de « distance euclidienne maximale »

La partition de  $E$  peut être caractérisée par un élément de  $\mathcal{K}$  :

$$\mathcal{K} = \left\{ K \in \mathbf{R}^{2n} : K(i) = \pm 1, i \in E, \sum_{i \in E} K(i) = 0 \right\}$$

avec

$$E_1 = \{i \in E : K(i) = +1\}, \quad E_2 = \{i \in E : K(i) = -1\}.$$

Compte tenu que

$$\sum_{\substack{i \in E_1 \\ j \in E_2}} A(i, j) = \frac{1}{4} \left[ \sum_{\substack{i \in E \\ j \in E}} A(i, j) - K^T AK \right].$$

Le problème est donc de trouver  $K^* \in \mathcal{K}$  tel que

$$K^{*T} AK^* = \text{Max}_{K \in \mathcal{K}} K^T AK.$$

Or

$$K^T AK = K^T \left( \sum_{i=1}^p B_i B_i^T \right) K = \sum_{i=1}^p (K^T B_i)^2.$$

Posons

$$\mathcal{D} = \left\{ X \in \mathbf{R}^p : X(i) = K^T B_i, i = 1, 2, \dots, p, K \in \mathcal{K} \right\}.$$

Le problème initial peut donc se formuler ainsi :

Trouver  $X^* \in \mathcal{D}$  et  $K^* \in \mathcal{K}$  tels que

$$\varphi_2(X^*) = \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} \varphi_2(X),$$

$$K^{*T} B_i = X^*(i), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Notons que  $\mathcal{D}$  est symétrique par rapport à l'origine.

### 1.3. « Problèmes projetés »

LEMME : Soit  $B \in \mathbf{R}^{2n}$ .  $K_B \in \mathcal{K}$  vérifie  $K_B^T B = \text{Max}_{K \in \mathcal{K}} K^T B$  si et seulement si

$$\left. \begin{array}{l} K_B(i) = +1 \\ K_B(j) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow B(i) \geq B(j).$$

Démonstration : Supposons d'abord que  $K_B^T B = \text{Max}_{K \in \mathcal{K}} K^T B$  et choisissons  $i$  et  $j$  tels que  $K_B(i) = 1, K_B(j) = -1$ .

Considérons un vecteur  $K$  ne différant de  $K_B$  que par

$$K(i) = -1 \quad \text{et} \quad K(j) = +1.$$

Nous avons

$$K_B^T B - K^T B = 2(B(i) - B(j)) \geq 0.$$

Réciproquement, considérons un vecteur  $K_B$  verifiant

$$\left. \begin{array}{l} K_B(i) = +1 \\ K_B(j) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow B(i) \geq B(j)$$

et  $K$  un vecteur quelconque de  $\mathcal{K}$  Posons

$$\begin{aligned} E_+^+ &= \{i \in E \mid K(i) = K_B(i) = 1\}, \\ E_+^- &= \{i \in E \mid K(i) = +1, K_B(i) = -1\}, \\ E_-^+ &= \{i \in E \mid K(i) = -1, K_B(i) = 1\}, \\ E_-^- &= \{i \in E \mid K(i) = K_B(i) = -1\} \end{aligned}$$

Nous avons

$$K_B^T B - K^T B = 2 \left( \sum_{i \in E^+} B(i) - \sum_{i \in E_-} B(i) \right)$$

De plus

$$n = \text{Card}(E_+^+) + \text{Card}(E_+^-), \quad n = \text{Card}(E_-^+) + \text{Card}(E_-^-)$$

Donc

$$\text{Card}(E_+^+) = \text{Card}(E_-^-)$$

Or si  $i \in E_+^+$  et  $j \in E_-^-$  alors  $B(i) \geq B(j)$  il en résulte donc que  $K_B^T B \geq K^T B$

**PROPRIETE** Soit  $u \in \mathbf{R}^p$  On peut trouver  $Xu \in \mathcal{D}$  et  $Ku \in \mathcal{K}$  verifiant

$$X_u^T u = \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} X^T u \quad \text{et} \quad K_u^T B_i = X_u(i), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{en effectuant un tri}$$

des composantes du vecteur  $\sum_{i=1}^p u(i) B_i$

*Démonstration*

$$X^T u = \sum_{i=1}^p (K^T B_i) u(i) = K^T \left( \sum_{i=1}^p u(i) B_i \right)$$

si

$$X(i) = K^T B_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

En posant  $B = \sum_{i=1}^p u(i) B_i$  et en appliquant le lemme précédant nous pouvons trouver un vecteur  $K_u$  tel que  $K_u^T B = \text{Max}_{K \in \mathcal{K}} K^T B$  et le vecteur  $X_u$  correspondant en ordonnant par ordre décroissant les composantes de  $B$

**2. ALGORITHMES ÉNUMÉRATIFS POUR LA RÉOLUTION A PRÉCISION RELATIVE DONNÉE DE PROBLÈMES DE DISTANCE EUCLIDIENNE MAXIMALE**

**2.1. Notations**

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(p) &= \{ u \in \mathbf{R}^p : \varphi_2(u) = +1 \}, \\ \mathcal{U}^+(p) &= \{ u \in \mathcal{U}(p) : u(i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, p \}, \\ \mathcal{D} &\text{ est un compact de } \mathbf{R}^p \text{ non réduit à } \{0\}. \end{aligned}$$

PROBLÈME DE « DISTANCE EUCLIDIENNE MAXIMALE » : Nous nous proposons de trouver une solution « approchée » du problème  $\text{Max}_{X \in \mathcal{D}} \varphi_2(X)$ .  $X^* \in \mathcal{D}$  désignera dans la suite une solution exacte de ce problème.

HYPOTHÈSE : *Problèmes projetés* : Pour  $u \in \mathbf{R}^p$  nous supposons savoir trouver  $X_u \in \mathcal{D}$  tel que

$$X_u^T u = \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} X^T u.$$

$X_u$  sera solution du problème projeté (sur  $u$ ).

DÉFINITION : Soit  $\varepsilon > 0$ .  $X_\varepsilon \in \mathcal{D}$  sera appelée solution à la précision relative  $\varepsilon$  si

$$\varphi_2(X_\varepsilon) \neq 0, \quad \frac{\varphi_2(X^*) - \varphi_2(X_\varepsilon)}{\varphi_2(X_\varepsilon)} \leq \varepsilon.$$

**2.2. Ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$ ,  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$ ,  $\mathcal{U}_\varepsilon^+(p)$**

DÉFINITION :  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  désigne un sous-ensemble de  $\mathcal{U}(p)$  vérifiant :

$$\forall u \in \mathcal{U}(p), \quad \exists u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon(p), \quad u_\varepsilon^T u \geq \frac{1}{1 + \varepsilon},$$

$\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  désigne un sous-ensemble de  $\mathcal{U}(p)$  tel que  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p) \cup (\mathcal{U}_\varepsilon^s(p))$  soit un ensemble  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$ ,  $\mathcal{U}_\varepsilon^+(p)$  désigne un sous-ensemble de  $\mathcal{U}^+(p)$  tel que

$$\forall u \in \mathcal{U}^+(p), \quad \exists u_\varepsilon^+ \in \mathcal{U}_\varepsilon^+(p), \quad u_\varepsilon^{+T} u \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Exemple : Dans  $\mathbf{R}^2$  soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -u_3 \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -u_4.$$

Pour tout vecteur  $u$  de  $\mathcal{U}(2)$  il existe  $u_i$  tel que

$$u_i^T u = \cos \theta \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{donc} \quad u_i^T u \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



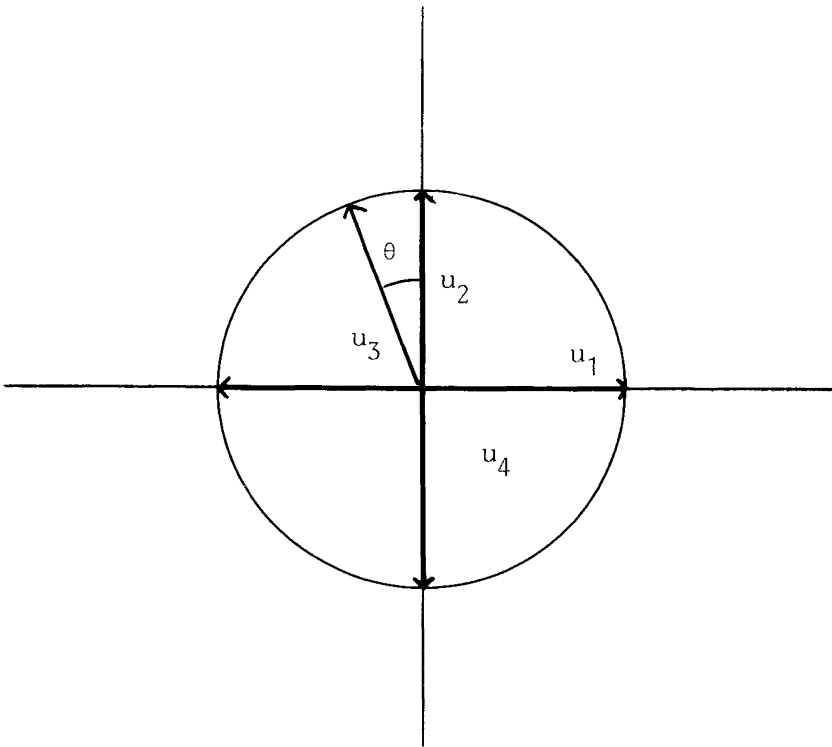


Figure 3

Nous pouvons donc poser  $\mathcal{U}_\varepsilon(2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  avec  $\varepsilon = \sqrt{2} - 1$ .

PROPOSITION : Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe des ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$ ,  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^+(p)$  comportant un nombre fini d'éléments.

Bien qu'une démonstration directe puisse être faite, nous renvoyons au corollaire de la méthode de construction des ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  au paragraphe 2.4.

Dans toute la suite les ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$ ,  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^+(p)$  seront finis.

### 2.3. Résolution à la précision relative $\varepsilon$

PROPOSITION : Soient  $X_\varepsilon^* \in \mathcal{D}$  et  $u_\varepsilon^* \in \mathcal{U}_\varepsilon(p)$  vérifiant :

$$X_\varepsilon^{*T} u_\varepsilon^* = \text{Max}_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon(p)} \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} X^T u,$$

$X_\varepsilon^*$  est solution à la précision relative  $\varepsilon$  du problème.

*Démonstration* Soit  $X^* \in \mathcal{D}$  vérifiant  $\varphi_2(X^*) = \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} \varphi_2(X)$  et posons

$$u^* = \frac{X^*}{\varphi_2(X^*)}$$

Il existe  $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon(p)$  tel que

$$u^{*T} u_\varepsilon \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

donc

$$\frac{\varphi_2(X^*)}{1 + \varepsilon} \leq X^{*T} u_\varepsilon \leq \text{Max}_{X \in \mathcal{D}} X^T u_\varepsilon \leq X_\varepsilon^{*T} u_\varepsilon^*$$

et en conséquence

$$\frac{\varphi_2(X^*)}{1 + \varepsilon} \leq \varphi_2(X_\varepsilon^*)$$

**ALGORITHME** L'algorithme consistera à résoudre tous les problèmes  $\text{Max}_{X \in \mathcal{D}} X^T u = X_u^T u$  pour  $u \in \mathcal{U}_\varepsilon(p)$  et à retenir la solution maximisant  $X_u^T u$

L'énumération sera rendue possible si  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  comporte un nombre d'éléments raisonnable comme ce sera le cas dans les applications pratiques exposées

**PROPOSITION (Cas symétrique)** Si  $\mathcal{D}$  est symétrique par rapport à l'origine et si  $X_\varepsilon^* \in \mathcal{D}$  et  $u_\varepsilon^* \in \mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  vérifient

$$X_\varepsilon^{*T} u_\varepsilon^* = \text{Max}_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon(p)} \text{Max}_{\lambda \in \mathcal{L}} X^T u$$

alors  $X_\varepsilon^*$  est solution à la précision relative  $\varepsilon$  du problème

*Démonstration* Elle est identique à celle de la proposition 2 3 On choisit seulement  $-u^*$  et  $-u_\varepsilon$  si c'est  $-u_\varepsilon$  et non  $u_\varepsilon$  qui appartient à  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$

Un algorithme identique à l'algorithme du paragraphe 2 3 s'en déduit pour le cas symétrique

### 2.4. Construction d'ensembles $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$ et $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$

*Cas  $p=1$*  Si  $p=1$ ,  $\mathcal{U}(1)$  se réduit aux deux vecteurs (1) et (-1) Nous prendrons donc  $\mathcal{U}_\varepsilon(1) = \{(1), (-1)\}$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(1) = \{(1)\}$

*Construction de  $\mathcal{U}_\varepsilon(2)$*  Divisons l'intervalle  $[0, 2\pi]$  en  $n$  intervalles égaux et posons

$$\theta_i = \frac{2\pi}{n} i, \quad i=0, 1, \dots, n-1$$

On vérifie aisément que si  $n \geq \pi / [\text{Arc cos}(1/(1+\varepsilon))]$  nous pouvons poser

$$\mathcal{U}_\varepsilon(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{pmatrix}, i=0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

*Construction de  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(2)$*  : Divisons l'intervalle  $[0, \pi]$  en  $n$  intervalles égaux et posons

$$\theta_i = \frac{\pi}{n} \cdot i, \quad i=0, 1, \dots, n-1.$$

On vérifie aisément que si  $n \geq \pi / [2 \text{Arc cos}(1/(1+\varepsilon))]$  nous pouvons poser

$$\mathcal{U}_\varepsilon^s(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{pmatrix}, i=0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

*Construction de  $\mathcal{U}_\varepsilon^+(2)$*  : Nous nous servirons par la suite de cet ensemble. Divisons l'intervalle  $[0, \pi/2]$  en  $n$  intervalles égaux et posons

$$\theta_i = \frac{\pi}{2n} \cdot i, \quad i=0, 1, \dots, n.$$

On vérifie aisément que si  $n \geq \pi / [4 \text{Arc cos}(1/(1+\varepsilon))]$  nous pouvons poser

$$\mathcal{U}_\varepsilon^+(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{pmatrix}, i=0, 1, \dots, n \right\}.$$

*Construction récurrente d'ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$* . Soit

$$p = p_1 + p_2, \quad p_1 \in \mathbf{N}^*, \quad p_2 \in \mathbf{N}^*$$

Nous pouvons écrire tout vecteur  $u$  de  $\mathcal{U}(p)$  sous la forme

$$u = \begin{pmatrix} a^1 u^1 \\ a^2 u^2 \end{pmatrix}, \quad u^1 \in \mathcal{U}(p_1), \quad u^2 \in \mathcal{U}(p_2), \quad \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}^+(2).$$

**PROPRIÉTÉ** : Soient  $\varepsilon$  et  $\eta$  deux réels positifs et des ensembles

$$\mathcal{U}_\eta(p_1) \mathcal{U}_\eta(p_2) \mathcal{U}_\eta^s(p_1) \mathcal{U}_\eta^+(2)$$

Si  $\eta \leq \sqrt{1+\varepsilon} - 1$  nous pouvons poser

$$\mathcal{U}_\varepsilon(p) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^1 v^1 \\ \alpha^2 v^2 \end{pmatrix} : v^1 \in \mathcal{U}_\eta(p_1), v^2 \in \mathcal{U}_\eta(p_2), \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_\eta^+(2) \right\}$$

et

$$\mathcal{U}_\varepsilon^s(p) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^1 v^1 \\ \alpha^2 v^2 \end{pmatrix} : v^1 \in \mathcal{U}_\eta^s(p_1), v^2 \in \mathcal{U}_\eta(p_2), \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_\eta^+(2) \right\}.$$

*Démonstration* Nous ferons la démonstration pour  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  la transposition pour  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  étant triviale

Soit  $u \in \mathcal{U}(p)$  et écrivons

$$u = \begin{pmatrix} a^1 & u^1 \\ a^2 & u^2 \end{pmatrix}, \quad u^1 \in \mathcal{U}(p_1), \quad u^2 \in \mathcal{U}(p_2), \quad \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}^+(2),$$

choisissons  $v^1 \in \mathcal{U}_\eta(p_1)$   $v^2 \in \mathcal{U}_\eta(p_2)$  et  $\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_\eta^+(2)$  tels que

$$a^1 \alpha^1 + a^2 \alpha^2 \geq \frac{1}{1+\eta}, \quad u^{1T} v^1 \geq \frac{1}{1+\eta}, \quad u^{2T} v^2 \geq \frac{1}{1+\eta}$$

Nous avons

$$u^T \begin{pmatrix} \alpha^1 & v^1 \\ \alpha^2 & v^2 \end{pmatrix} = a^1 \alpha^1 u^{1T} v^1 + a^2 \alpha^2 u^{2T} v^2$$

donc

$$u^T \begin{pmatrix} \alpha^1 & v^1 \\ \alpha^2 & v^2 \end{pmatrix} \geq \frac{a^1 \alpha^1}{1+\eta} + \frac{a^2 \alpha^2}{1+\eta} \geq \frac{1}{(1+\eta)^2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

**COROLLAIRE** Construction d'ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  finis

Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $p \in \mathbf{N}^*$  nous pouvons construire des ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  finis

*Démonstration* Pour  $p \leq 2$  nous avons déjà montré au début du paragraphe 2 4 comment construire des ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$ ,  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^+(p)$  finis

Supposons donc que nous puissions construire pour  $p \leq \bar{p}$  des ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$   $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  finis pour tout  $\varepsilon > 0$  si  $\bar{p} + 1 = 2q$ ,  $q \in \mathbf{N}^*$  posons  $p_1 = p_2 = q$  et si  $\bar{p} + 1 = 2q + 1$ ,  $q \in \mathbf{N}^*$  posons  $p_1 = q + 1$ ,  $p_2 = q$

Le résultat de la propriété précédente montre que l'on peut construire  $\mathcal{U}_\varepsilon(\bar{p} + 1)$  de la manière suivante

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\bar{p} + 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^1 & v^1 \\ \alpha^2 & v^2 \end{pmatrix}, v^1 \in \mathcal{U}_\eta(p_1), v^2 \in \mathcal{U}_\eta(p_2), \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_\eta^+(2) \right\}$$

avec  $\eta = \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$  Si  $\mathcal{U}_\eta(p_1)$ ,  $\mathcal{U}_\eta(p_2)$  et  $\mathcal{U}_\eta^+(2)$  sont finis  $\mathcal{U}_\varepsilon(\bar{p} + 1)$  est alors fini, or  $p_1 \leq \bar{p}$ ,  $p_2 \leq \bar{p}$  et  $2 \leq \bar{p}$

Nous pouvons de même construire  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(\bar{p} + 1)$  fini en posant

$$\mathcal{U}_\varepsilon^s(\bar{p} + 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^1 & v^1 \\ \alpha^2 & v^2 \end{pmatrix}, v^1 \in \mathcal{U}_\eta^s(p_1), v^2 \in \mathcal{U}_\eta(p_2), \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_\eta^+(2) \right\}$$

Ceci montre donc que nous pouvons construire  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  finis pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $p \in \mathbf{N}^*$ , le procédé de récurrence pouvant être utilisé de manière

constructive pour exprimer un ensemble  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  ou  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$  uniquement en fonction d'un certain nombre fini d'ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p_i)$ ,  $p_i \leq 2$

*Nombre d'éléments de  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  et  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$*  Des formules de récurrence donnant le nombre d'éléments des ensembles construits de la manière précédente peuvent être établies [3] Nous donnons ici seulement des tableaux comportant quelques valeurs de ce nombre d'éléments

Nombres d'éléments de  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$

$p \backslash \varepsilon$	0 05	0 1	0 15
2	11	8	7
3	107	57	47
4	705	264	180
5	10 733	2 472	1 187

Nombres d'éléments de  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$

$p \backslash \varepsilon$	0 05	0 1	0 15
2	6	4	4
3	58	32	27
4	383	149	104
5	5 673	1 345	617

### 2.5. Application à l'exemple introductif

Nous donnons ici quelques temps moyens de calcul (sur IBM 360-67) pour résoudre le problème de l'exemple introductif avec une matrice de taille  $2n = 100$  pour différentes valeurs de  $p$  et de la précision  $\varepsilon$  Rappelons (cf § 1 2) qu'il s'agit d'un problème symétrique et que nous utilisons donc  $\mathcal{U}_\varepsilon^s(p)$

$p \backslash \varepsilon$	0 05	0 1	0 15
2	0 3	0 24	0 22
4	10 4	4 1	3

Les temps sont donnés en secondes

### 3. EXEMPLES. GÉNÉRALISATIONS DE L'EXEMPLE INTRODUCTIF ET PROBLÈMES COMBINATOIRES SUR UN ENSEMBLE DE POINTS DE $\mathbb{R}^p$

Après avoir signalé brièvement quelques généralisations de l'exemple introductif nous donnons dans ce chapitre deux problèmes combinatoires n'ayant pas *a priori* de solution triviale, leur formulation en terme de problème

de distance euclidienne maximale, en explicitant la résolution des problèmes projetés qui, elle, est aisée ceci permet donc d'appliquer la méthode décrite au paragraphe 2 Ces problèmes concernent la recherche de « formes » dans des ensembles de points de  $\mathbf{R}^p$  et il semble que, même en dehors des exemples donnés ci-dessous, l'utilisation des problèmes projetés soit assez fondamentale pour ce type de problèmes (recherche d'enveloppe convexe )

**3.1. Généralisation de l'exemple introductif**

Nous prenons maintenant une matrice A de  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$  (la dimension n'étant pas obligatoirement paire) toujours donnée par

$$A = \sum_{i=1}^p B_i B_i^T \quad \text{ou} \quad B_i \in \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, p$$

et p est de l'ordre de 5

Soit  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  Nous désignerons par  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-ensembles constituant une partition de E et nous noterons  $n_1 = \text{Card}(E_1)$ ,  $n_2 = \text{Card}(E_2)$

Les problèmes suivants sont susceptibles d'une méthode de résolution identique à celle de l'exemple introductif

$n_1$  et  $n_2$  étant fixés ( $n_1 + n_2 = n$ ) trouver  $E_1$  (et  $E_2$ ) tels que  $\sum_{\substack{i \in E_1 \\ j \in E_2}} A(i, j)$  soit minimum

$\underline{n}$  et  $\bar{n}$  étant fixes trouver  $E_1$  (et  $E_2$ ) tels que  $\underline{n} \leq n_1 \leq \bar{n}$  et  $\sum_{\substack{i \in E_1 \\ j \in E_2}} A(i, j)$  soit minimum

$\underline{n}$  et  $\bar{n}$  étant fixés trouver  $E_1$  (et  $E_2$ ) tels que  $\underline{n} \leq n_1 \leq \bar{n}$  et  $\sum_{\substack{i \in E_1 \\ j \in E_1}} A(i, j)$  soit maximum

**3.2. Notations**

Soit un ensemble de n points de  $\mathbf{R}^p$   $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  et  $B_1, B_2, \dots, B_p$  les vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  définis par

$$B_j(i) = X_i(j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Afin de simplifier certaines expressions nous associerons à une partition des n points en deux groupes 1 et 2, un couple de vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ ,  $(V_1, V_2)$  vérifiant

$$(C) \quad \begin{cases} V_k(i) = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \\ 1, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \\ V_1(i) + V_2(i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

$V_k(i) = 1$  signifiant que  $X_i$  appartient au groupe k

Nous poserons 
$$d_1 = \sum_{i=1}^n V_1(i), \quad d_2 = \sum_{i=1}^n V_2(i).$$

### 3.3. Séparation optimale des centres de gravité

*Énoncé du problème* : Soit  $G_1$  le centre de gravité du premier groupe de point  $G_2$  celui du second. On cherche la partition de l'ensemble des  $n$  points qui maximise la distance euclidienne usuelle de  $G_1$  à  $G_2$ .

*Énoncé en terme de problème de « distance euclidienne maximale »* : Avec les notations 3.2 la distance euclidienne usuelle de  $G_1$  à  $G_2$  est

$$\left( \sum_{j=1}^p \left( \frac{V_1^T B_j}{d_1} - \frac{V_2^T B_j}{d_2} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Le problème posé est donc de maximiser la norme  $\phi_2$  sur l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ X \in \mathbf{R}^p : X(j) = \frac{V_1^T B_j}{d_1} - \frac{V_2^T B_j}{d_2} (V_1, V_2) \text{ vérifiant C} \right\}.$$

La méthode de résolution utilisant les *problèmes projetés* nous donnera pour un point  $X$  proposé le couple  $(V_1, V_2)$  correspondant donc effectivement la partition.

« *Problèmes projetés* » : Soit  $u \in \mathcal{U}(p)$  et

$$K = V_1 - V_2, \quad V = V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour  $X \in \mathcal{D}$  associé à  $(V_1, V_2)$  nous avons

$$X^T u = \frac{n}{2d_1 d_2} K^T \left( \sum_{j=1}^p u(j) B_j \right) + \frac{d_2 - d_1}{2d_1 d_2} V^T \left( \sum_{j=1}^p u(j) B_j \right).$$

Si  $d_1$  et  $d_2$  sont fixés le *problème projeté* se résoud en maximisant la quantité  $K^T \left( \sum_{j=1}^p u(j) B_j \right)$  parmi les vecteurs  $K$  comportant  $d_1$  composantes  $+1$  et  $d_2$  composantes  $-1$ . Un résultat analogue à celui du lemme du paragraphe 1.3 montre que ce problème est résolu lorsque les composantes du vecteur  $\sum_{j=1}^p u(j) B_j$  ont été ordonnées. Le tri étant le même pour chaque valeur de  $d_1$

et  $d_2$  nous en déduisons la solution du problème  $\text{Max}_{X \in \mathcal{D}} X^T u$  par simple comparaison ces valeurs obtenues pour chaque couple  $(d_1, d_2)$ .

**3.3. Minimisation d'un critère d'écart**

*Énoncé du problème* : Nous nous proposons de trouver la partition de l'ensemble des  $n$  points qui minimise

$$\sum_{X_i \in \text{groupe 1}} \varphi_2^2(X_i - G_1) + \sum_{X_i \in \text{groupe 2}} \varphi_2^2(X_i - G_2).$$

*Énoncé en terme de problème de « distance euclidienne maximale »* : Le problème de minimisation précédent est équivalent au problème de maximisation de la norme euclidienne  $\varphi^2$  sur :

$$\mathcal{D} = \left\{ X \in \mathbf{R}^p : X(j) = \frac{K^T B_j}{\sqrt{d_2 d_1}} + V^T B_j \frac{d_2 - d_1}{\sqrt{d_2 d_1}}, \right. \\ \left. K = V_1 - V_2, (V_1, V_2 \text{ vérifiant C}) \right\}.$$

*Démonstration* : Introduisons deux matrices diagonales de  $M_{n,n}(\mathbf{R})$   $D_1$  et  $D_2$  telles que :

$$D_1(i, i) = V_1(i), \quad D_2(i, i) = V_2(i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nous avons

$$\sum_{X_i \in \text{groupe 1}} \varphi_2^2(X_i - G_1) = \sum_{X_i \in \text{groupe 1}} \sum_{j=1}^p \left( X_i(j) - \frac{V_1^T B_j}{d_1} \right)^2,$$

ce qui est égal à

$$\sum_{j=1}^p \left( D_1 B_j - \frac{V_1^T B_j}{d_1} V_1 \right)^T \left( D_1 B_j - \frac{V_1^T B_j}{d_1} V_1 \right)$$

et donc à

$$\sum_{j=1}^p \left( B_j^T D_1 B_j - \frac{(V_1^T B_j)^2}{d_1} \right).$$

Le critère à minimiser est en fin de compte

$$\sum_{j=1}^p B_j^T B_j - \sum_{j=1}^p \left\{ \frac{(V_1^T B_j)^2}{d_1} + \frac{(V_2^T B_j)^2}{d_2} \right\}.$$



En introduisant le vecteur  $K = V_1 - V_2$  la quantité précédente est égale à

$$\sum_{j=1}^p \left( B_j^T B_j - \frac{(V^T B_j)^2}{n} \right) - \frac{n}{4} \sum_{j=1}^p \left( \frac{K^T B_j}{\sqrt{d_1 d_2}} + \frac{d_2 - d_1}{n \sqrt{d_1 d_2}} V^T B_j \right)^2.$$

Le premier terme étant constant nous sommes donc ramenés à la maximisation de

$$\sum_{j=1}^p \left( \frac{K^T B_j}{\sqrt{d_1 d_2}} + \frac{d_2 - d_1}{n \sqrt{d_1 d_2}} V^T B_j \right)^2$$

« *Problème projeté* » : Pour  $X \in \mathcal{D}$  associé à  $K$  nous avons

$$X^T u = K^T \sum_{j=1}^p \frac{u(j) B_j}{\sqrt{d_1 d_2}} + \sum_{j=1}^p \frac{u(j)(d_2 - d_1)}{n \sqrt{d_1 d_2}} V^T B_j.$$

Les problèmes de maximisation à  $d_1$  et  $d_2$  fixés se résolvent (cf. § 1.3) à l'aide d'un tri du vecteur  $\sum_{j=1}^p u(j) B_j$ . Ce tri étant le même pour chaque valeur de  $d_1, d_2$  on en déduit aisément la solution du *problème projeté*.

#### CONCLUSION. UTILISATION PRATIQUE DES ALGORITHMES ÉNUMÉRATIFS

Notons d'abord que dans les exemples que nous avons traités, les résultats obtenus sont très fréquemment meilleurs que le laisseraient prévoir les précisions demandées. Ces corrections peut même être rigoureusement évaluées *a posteriori* [3].

Signalons aussi que l'utilisation à de faibles précisions des algorithmes énumératifs fournit un moyen de choisir les points de départ d'algorithmes locaux d'optimisation.

#### MODIFICATION ET VARIANTES DES ALGORITHMES ÉNUMÉRATIFS

Dans le cas  $p=2$  nous avons pu, toujours par l'utilisation des *problèmes projetés*, mettre au point des algorithmes non énumératifs et permettant d'atteindre les précisions habituellement demandées [3].

Remarquons aussi que des variantes des algorithmes décrits au paragraphe 2 peuvent être développées à partir de résolutions approchées des *problèmes projetés*. De même les ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon(p)$  pourraient être remplacés par des ensembles  $\mathcal{U}_\varepsilon^\circ(p)$  comportant moins d'éléments mais construits avec certaines informations sur l'ensemble  $\mathcal{D}$  (localisation du maximum par exemple).

**PERSPECTIVES**

La méthode proposée n'a pas pour ambition d'être universelle pour tous les problèmes  $\text{Max}_{X \in \mathcal{D}} \varphi_2(X)$

Notons simplement qu'elle nous a permis d'obtenir des résultats satisfaisants pour des problèmes pratiquement insolubles par les méthodes usuelles d'optimisation. Sur la vue des quelques principes dont nous avons parlé en conclusion il nous semble raisonnable de penser que cette méthode puisse servir de base à quelques algorithmes de résolution de problèmes voisins.

**BIBLIOGRAPHIE**

- 1 L C W DIXON et G P SZEGO *Towards Global Optimization* Proceedings of workshop at the University of Cagliari Italie octobre 1974
- 2 R KARP *On the Computational Complexity of Combinatorial Problems*, Networks, 5, 1975
- 3 B LACOLLE *Quelques problèmes de restructuration dans un environnement* page These de 3<sup>e</sup> cycle, Mathématiques, Université de Grenoble, 1976
- 4 B LACOLLE, *Resolution approchée d'un problème combinatoire de partitionnement par une énumération partielle*, Colloque d'Analyse numérique Imbours, 1977