

# RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

RENÉ LOZI

## **Résultat numérique de régularité du problème de Stokes et du laplacien itéré dans un polygone**

*RAIRO. Analyse numérique*, tome 12, n° 3 (1978), p. 267-282

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1978\\_\\_12\\_3\\_267\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_3_267_0)

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**RÉSULTATS NUMÉRIQUES DE RÉGULARITÉ  
 DU PROBLÈME DE STOKES ET DU LAPLACIEN ITÉRÉ  
 DANS UN POLYGONE (\*)**

par René LOZI (1)

Communiqué par J CEA

Résumé — On étudie les solutions de l'équation  $z^2 \sin^2 \varphi = \sin^2(z \varphi)$   $z \in \mathbb{C}$ ,  $\varphi$  est un paramètre réel. On peut donner toutes les solutions de partie réelle bornée. Ces solutions interviennent explicitement dans le développement des solutions du problème de Stokes dans un polygone de  $\mathbb{R}^2$ , au voisinage des sommets.

J. E. Osborn a montré [6] que la solution du problème de Stokes dans un coin d'angle  $\varphi$  admet un développement qui se décompose en une partie régulière et une partie singulière dont les puissances sont liées aux solutions de l'équation

$$z^2 \sin^2 \varphi = \sin^2(z \varphi), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (\star)$$

Il existe des résultats semblables pour le laplacien itéré [2, 4].

Il est démontré en particulier [6], th. 4, pour le problème de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \nabla \bullet \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \vec{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

$\Omega$  étant le secteur infini déterminé par  $Ox$  et le demi-axe qui fait un angle  $\varphi$  avec  $Ox$ , le :

THÉORÈME : Supposons  $\varphi \neq \pi$ ,  $\vec{f} \in (W^m(\Omega))^2$  et

$$\int_{\Omega} r^{\alpha} |D^m f_i|^2 dx dy < +\infty \quad \text{pour tout } \alpha < 0,$$

alors pour  $r$  petit, nous avons les développements suivants .

$$u = \vec{u} + \sum_{0 < x_j < 2} \sum_{k=0}^{m_j-1} \vec{c}_{j,k}^u(\theta) r \ln^k r + \sum_{l=0}^{m-1} r^{l+2} \vec{d}_l^u(\theta),$$

$$p = \tilde{p} + \sum_{0 < x_j < 2} \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{j,k}^p(\theta) r^{2j-1} \ln^k r + \sum_{l=0}^{m-1} r^{l+1} d_l^p(\theta),$$

(\*) Reçu mai 1977

(1) Institut de Mathématiques et Sciences physiques, Université de Nice

où  $\vec{u} \in [\dot{W}_0^{m+2}(\Omega)]^2$ ,  $\vec{p} \in \dot{W}_0^{m+1}(\Omega)$  et  $\vec{c}_{j,k}^u$ ,  $c_{j,k}^p$ ;  $\vec{d}_l^u$ ;  $d_l^p$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $\theta$ ;  $0 < \theta < \varphi$ , les  $z_j$  sont les solutions de  $(\star)$  de multiplicité  $m_j$ ,  $x_j = \text{Re } z_j$ ;  $\dot{W}_0^m(\Omega)$  est la classe de fonctions pour lesquelles la norme suivante est finie

$$\|w\|_{\dot{W}_0^m(\Omega)}^2 = \sum_{j=0}^m \int_{\Omega} r^{2(j-m)} |D^j w|^2 dx dy,$$

$$|D^j w(x, y)|^2 = \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha w(x, y)|^2.$$

D'autres théorèmes sur les espaces de Sobolev avec poids sont également démontrés.

Il est intéressant de connaître exactement tous les  $z_j$  de partie réelle bornée pour pouvoir résoudre numériquement le problème de Stokes par une méthode d'éléments finis singuliers ou pour connaître l'ordre maximal qu'il faut prendre pour des éléments réguliers [8], chap. 8 et [1].

Nous étudions les solutions de l'équation  $(\star)$  et nous pouvons donner  $(M_x, \varphi) \in (\mathbf{R}^+)^2$  étant fixé, toutes les solutions de  $(\star)$  telles que  $|x| \leq M_x$ ,  $\forall y \in \mathbf{R}^+$  ainsi que leur ordre de multiplicité.

Pour cela, nous définissons des ensembles  $\mathcal{A}_{l,k}^i$  hors desquels on connaît toutes les solutions de  $(\star)$  et dans lesquels on peut compter, soit directement, soit grâce à un algorithme le nombre de ces solutions.

On retrouve en particulier les résultats de J. B. Seif [7] qui étudie les solutions de  $(\star)$  pour  $0 < \varphi < \pi$  par des techniques différentes.

### 1. ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $(\star)$

Les solutions de cette équation sont aussi celles de l'une ou l'autre des équations

$$z \sin \varphi = \sin(\varphi z) \tag{1}$$

$$z \sin \varphi = -\sin(\varphi z), \tag{2}$$

$z \in \mathbf{C}$ ,  $z = x + iy$  ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} x \sin \varphi = \sin x \varphi \operatorname{ch} y \varphi, \\ y \sin \varphi = \cos x \varphi \operatorname{sh} y \varphi, \end{array} \right. \tag{1'}$$

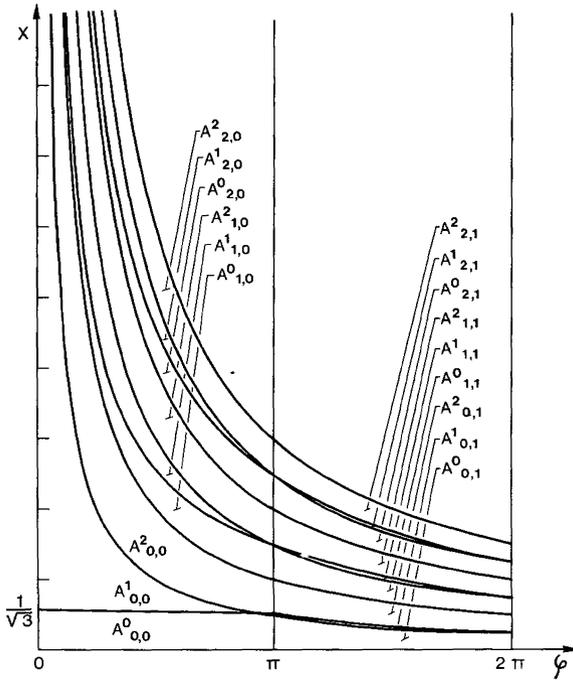
$$\left\{ \begin{array}{l} x \sin \varphi = \cos x \varphi \operatorname{sh} y \varphi, \\ y \sin \varphi = \sin x \varphi \operatorname{ch} y \varphi, \end{array} \right. \tag{1''}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \sin \varphi = -\sin x \varphi \operatorname{ch} y \varphi, \\ y \sin \varphi = -\cos x \varphi \operatorname{sh} y \varphi, \end{array} \right. \tag{2'}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \sin \varphi = -\cos x \varphi \operatorname{sh} y \varphi, \\ y \sin \varphi = \sin x \varphi \operatorname{ch} y \varphi, \end{array} \right. \tag{2''}$$

Les solutions de (1) [resp. (2)] sont celles qui vérifient (1') et (1'') [resp. (2') et (2'')].

Ces solutions étant symétriques par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $\varphi$ , on se contente d'étudier ces équations pour  $x$ ,  $y$  et  $\varphi$  dans  $\mathbf{R}^+$ .



On va définir des ensembles  $\mathcal{A}^i_{l,k} \subset (\mathbf{R}^+)^3$  dans lesquels on saura compter exactement le nombre de solutions des équations (1) et (2), et hors desquels on connaît toutes les solutions de façon explicite.

DÉFINITION 1 : On définit les ensembles  $\mathcal{A}^i_{l,k}$  suivants :  $k \in \mathbf{N}$ ,  $l \in \mathbf{N}$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$  :

$$\mathcal{A}^i_{l,k} = \left\{ (x, y, \varphi) \in (\mathbf{R}^+)^3 \mid \varphi \in ]k\pi, (k+1)\pi[, x \in \left[ 0, \frac{\alpha_{k,\varphi}}{\varphi} \right] \text{ si } i=l=0 \right.$$

$$\text{et } x \in \left[ \frac{\pi}{\varphi} \left( l + \frac{i^2 - i}{4} \right) + \frac{2i - i^2}{\varphi} \alpha_{k,\varphi}, \frac{\pi}{\varphi} \left( l + \frac{i}{2} \right) \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\varphi} \left( \frac{i^2}{2} - \frac{3i}{2} + 1 \right) \alpha_{k,\varphi} \left[ \begin{matrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{matrix} \right] \right\},$$

$$\alpha_{k,\varphi} = \text{Arc cos} \left[ \frac{(-1)^k \sin \varphi}{\varphi} \right].$$

La figure représente la projection sur le plan  $(xO\varphi)$  de quelques-uns de ces ensembles.

On vérifie aisément que ces ensembles sont bien définis et disjoints.

On note

$$\mathcal{A}_{i,k}^{i,j} = \mathcal{A}_{i,k}^i \cup \mathcal{A}_{i,k}^j, \quad \mathcal{A}_{i,k} = \bigcup_{i=0}^2 \mathcal{A}_{i,k}^i$$

et

$$\mathcal{A}_{i,k|\varphi}^i = \mathcal{A}_{i,k}^i \cap ((\mathbf{R}^+)^2 \times \{\varphi\}) \quad \text{pour } i=0, 1, 2.$$

### 1.1. Les solutions hors des $\mathcal{A}_{i,k}$

1.1.1.  $\varphi=0$  alors  $\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^+)^2$   $(x, y)$  est solution de (1) et de (2). Il n'y a pas d'autre point de bifurcation de (1) dans  $(\mathbf{R}^+)^2$  à partir de cette solution, que les points  $x=y=0$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ , car la partie principale de (1') et (1'') après division par  $\varphi^2$  ne s'annule que pour ces points.

1.1.2. PROPOSITION 1 : Les seules solutions de (1) et de (2) pour  $\varphi=k\pi$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$  sont les solutions  $(x, y)$  telles que  $xk \in \mathbf{N}$ ,  $y=0$ .

*Démonstration* :  $\varphi=k\pi$  (on prend  $k \in \mathbf{N}^*$  vu 1.1.1). Les solutions de (1') sont  $xk \in \mathbf{N}$ ,  $y \in \mathbf{R}^+$  et en reportant dans (1'') on trouve que  $y=0$ . On démontrerait de même pour (2).

1.1.3. PROPOSITION 2 : La seule solution de (1) et de (2) pour  $x=0$ ,  $\forall \varphi \in \mathbf{R}^{+*}$  est la solution triviale  $x=y=0$ , de plus, il n'existe pas de point de bifurcation à partir de cette solution.

*Démonstration* : Si  $x=0$  (1') est vérifiée  $\forall y \in \mathbf{R}^+$  et (1'') devient  $y \sin \varphi = \operatorname{sh} y \varphi$ . Si  $y=0$  cette égalité est vraie, si  $y>0$  elle est fautive car  $\varphi>0$  et  $\operatorname{sh} y \varphi > y \varphi \geq y \sin \varphi$ .

Le jacobien de

$$F \begin{pmatrix} x \\ y' \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \sin \varphi - \sin x \varphi \operatorname{ch} y \varphi \\ y \sin \varphi - \cos x \varphi \operatorname{sh} y \varphi \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible quand  $\varphi = \sin \varphi$  sur la solution triviale et on peut toujours appliquer le théorème des fonctions implicites. On démontrerait de même pour (2).

Ceci termine l'étude des solutions hors des  $\mathcal{A}_{i,k}$ .

### 1.2. Les solutions dans les $\mathcal{A}_{i,k}$

1.2.1. Notons qu'il existe une solution évidente de (1) qui est  $x=1$ ,  $y=0$ ,  $\forall \varphi \in \mathbf{R}^{+*}$ , et en raisonnant comme à la proposition 2, les seuls points de bifurcation possibles de cette solution, sont les points où  $\varphi = \operatorname{tg} \varphi$ .

1.2.2. PROPOSITION 3 : Si  $(k+l)$  est impair (resp. pair), il n'existe pas de solution de (1) [resp. de (2)] dans les  $\mathcal{A}_{l,k}$  correspondants.

Démonstration : Soit par exemple  $k$  pair,  $l$  impair, alors dans  $\mathcal{A}_{l,k}$  on a  $\varphi \in ]k\pi, (k+1)\pi[$  et  $x \in [l\pi/\varphi, (l+1)\pi/\varphi[$  donc  $\sin \varphi > 0$  et  $\sin x \varphi \leq 0$ , soit  $x \sin \varphi > 0 \geq \sin x \varphi$  ch  $y \varphi : (1')$  ne peut pas avoir de solution, (1) non plus. On fait de même pour les trois autres cas (en notant que si  $l=0$   $x \in ]0, \pi/\varphi[$ ).

1.2.3. Les solutions réelles

PROPOSITION 4 :  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}$  étant fixé, soit

$$t = (-1)^k \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad \text{et} \quad f(t) = \text{Arc cos } t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} + l\pi;$$

(i)  $l \neq 0$  ( $k+l$  étant pair (resp. impair); si  $f(t) < 0$ , il existe une solution réelle unique de (1) [resp. (2)] dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}^0$ , ainsi que dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}^1, 2$ ; si  $f(t) = 0$  il existe une unique solution réelle de (1) [resp. (2)] dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}^1$  qui vaut

$$x = (-1)^k \frac{(\text{Arc cos } t + l\pi)}{\varphi}$$

et aucune dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}^0, 2$  si  $f(t) > 0$ , il n'existe pas de solution réelle de (1) [resp. (2)] dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}$ ;

(ii)  $l=0$ ;  $k$  étant pair et  $\varphi \geq \pi/2$  (resp.  $k$  impair) il existe une unique solution réelle de (1) [resp. (2)] dans  $\mathcal{A}_{0,k|\varphi}^2$  et aucune dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}^0, 1$  (quand  $\varphi \in ]\pi/2, \pi[$  la solution de (1) est  $x = 1$ );

(iii)  $l=0, k=0$  et  $\varphi < \pi/2$  il existe une unique solution réelle de (1) qui vaut  $x = 1$  dans  $\mathcal{A}_{0,0|\varphi}^1$  et aucune dans  $\mathcal{A}_{0,0|\varphi}^0, 2$ .

Démonstration : (i)  $l \neq 0$  prenons  $k$  et  $l$  pairs, si  $y = 0$  (1'') est toujours vérifiée, (1') se met sous la forme

$$x \sin \varphi = \sin x \varphi. \tag{1' a}$$

Dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}$   $x \varphi \in [l\pi, (l+1)\pi[$ , comme  $l$  est pair, la courbe  $\sin x \varphi$  est strictement concave et ne peut être coupée qu'en deux points au plus par une droite, de plus elle est en-dessous de chacune de ses tangentes. Soit  $x_0$  l'abscisse du point où la tangente à  $\sin x \varphi$  a la même pente que la droite  $x \sin \varphi$  :

$$x_0 = \frac{1}{\varphi} \left[ \text{Arc cos} \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) + l\pi \right].$$

Posons  $\alpha = x_0 \sin \varphi$  et  $\beta = \sin x_0 \varphi$ , il y a trois cas possibles

$\alpha < \beta$  la droite  $x \sin \varphi$  est sous la tangente à  $\sin x \varphi$ , on a deux intersections dont les abscisses sont séparées par  $x_0$  il existe une seule solution de (1' a) dans  $\mathcal{A}_{l|k|\varphi}^0$  et une seule autre dans  $\mathcal{A}_{l|k|\varphi}^1, 2$

$\alpha = \beta$  la droite est confondue avec la tangente on a une seule solution  $x = x_0$  dans  $\mathcal{A}_{l|k|\varphi}^1$

$\alpha > \beta$  la droite est au-dessus de la tangente donc au-dessus de la courbe, (1' a) n'a pas de solution dans  $\mathcal{A}_{l|k|\varphi}$

En posant

$$t = \frac{\sin \varphi}{\varphi}, \quad 0 < t < 1,$$

$$\alpha = t(\text{Arc cos } t + l\pi), \quad \beta = \sin(\text{Arc cos } t) = \sqrt{1-t^2},$$

si

$$f(t) = \frac{\alpha - \beta}{t} = \text{Arc cos } t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} + l\pi,$$

l'étude du signe de  $f$ , donne les trois possibilités On démontre de même les trois autres cas ( $k$  ou  $l$ , pair ou impair), ce qui conduit à poser

$$t = (-1)^k \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

(ii) et (iii)  $l=0$ , soit  $k$  pair,  $x \varphi \in ]0, \pi[$ ,  $\sin x \varphi$  est strictement concave et a au plus deux intersections avec  $x \sin \varphi$ ,  $x=0$  étant l'une d'elles et n'appartenant pas à  $\mathcal{A}_{0,k|\varphi}$ , il y a au plus une intersection qui existe toujours car la pente de  $x \sin \varphi$  est inférieure à celle de la tangente à l'origine à  $\sin x \varphi$  (qui vaut  $\varphi$ ) On a donc une unique solution de (1' a) dans  $\mathcal{A}_{0,k|\varphi}$  Pour voir dans quelle partie de  $\mathcal{A}_{0,k|\varphi}$  elle se trouve, on cherche quand (1' a) est vérifiée avec  $x = \pi/2 \varphi$  Cela donne  $\varphi = \pi/2$

On distingue les cas suivants :

$\varphi \geq \pi/2$  on a  $\sin \varphi \leq 2 \varphi / \pi$  soit  $(\pi/2 \varphi) \sin \varphi \leq 1$  et l'intersection de  $x \sin \varphi$  avec  $\sin x \varphi$  appartient à  $\mathcal{A}_{0,k|\varphi}^2$ , donc il n'y en a pas dans  $\mathcal{A}_{0,k|\varphi}^0, 1$  (en particulier si  $\varphi \in ]\pi/2, \pi[$   $x=1$  solution de (1' a) est dans  $\mathcal{A}_{0,0|\varphi}$  et c'est la seule solution dans ce cas), le (ii) est démontré

$\varphi < \pi/2$  alors  $(\pi/2 \varphi) \sin \varphi > 1$  et l'intersection de  $x \sin \varphi$  avec  $\sin x \varphi$  appartient à  $\mathcal{A}_{0,0|\varphi}^0, 1$ , mais cette intersection est séparée de l'origine par  $(1/\varphi)[\text{Arc cos}(\sin \varphi / \varphi)]$  donc elle appartient à  $\mathcal{A}_{0,0|\varphi}^1$  et il n'y en a pas dans  $\mathcal{A}_{0,0|\varphi}^0, 2$  Comme  $x=1$  est dans  $\mathcal{A}_{0,0|\varphi}^1$  c'est la seule solution et le (iii) est démontré On procède de même pour  $k$  impair

La proposition 4, réglant complètement le sort des solutions réelles, on passe à l'étude des solutions complexes

1.2.4. Les solutions complexes

y étant différent de 0, on montre le :

LEMME 1 : (k+l) étant pair (resp. impair) (1'') [resp. (2'')] est équivalente à (3) :

$$x = \frac{1}{\varphi} \left[ \text{Arc cos} \left( \frac{(-1)^k y \sin \varphi}{\text{sh } y \varphi} \right) + l\pi \right]$$

et  $\hat{x}(y)$  solution de (3) vérifie :

$$\frac{1}{\varphi} \left[ \text{Arc cos} \left( \frac{(-1)^k \sin \varphi}{\varphi} \right) + l\pi \right] \leq \hat{x}(y) < \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi},$$

de plus  $\hat{x}(y)$  est strictement croissante d'une borne à l'autre.

La vérification de ce lemme est évidente, et vu la proposition 3, on n'a pas à s'occuper des autres cas. On en déduit la :

PROPOSITION 5 : Si (k+l) est pair (resp. impair) il n'existe que des solutions réelles de (1) [resp. (2)] dans  $\mathcal{A}_{l,k}^0$  et  $\mathcal{A}_{l,k}^2$ .

Démonstration : Vu le lemme 1,  $\hat{x}(y)$  solution de (1'') appartient à  $\mathcal{A}_{l,k}^1$  donc a fortiori les solutions de (1).

COROLLAIRE  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}$  étant fixé :

(i)  $l \neq 0$  (k+l) étant pair (resp. impair) si

$$1 - (-1)^k \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi} \sin \varphi \geq 0,$$

il n'existe pas de solution strictement complexe de (1) [resp. (2)] dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}$  ;

(ii)  $l=0$ , k étant pair et  $\varphi \geq \pi/2$  (resp. k impair) il n'existe pas de solution strictement complexe de l'équation (1) [resp. (2)] dans  $\mathcal{A}_{0,k|\varphi}$ .

Démonstration : (i)  $l \neq 0$ , k et l pairs, si  $(l + (1/2)) (\pi/\varphi) \sin \varphi \leq 1$  vu le (i) de la démonstration de la proposition 4, les solutions  $x_1$  et  $x_2$  de (1'a) vérifient :

$$x_1 < \frac{1}{\varphi} \left[ \text{Arc cos} \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) + l\pi \right] \quad \text{et} \quad x_2 \geq \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi}.$$

Pour tout y et  $\varphi$ ,  $\text{ch } y \varphi \geq 1$ , la pente de  $x \sin \varphi / \text{ch } y \varphi$  est inférieure ou égale à celle de  $x \sin \varphi$ , donc les 2 solutions  $\tilde{x}_1(y)$  et  $\tilde{x}_2(y)$  de (1') vérifient :

$$\begin{aligned} \frac{l\pi}{\varphi} &\leq \tilde{x}_1(y) \leq x_1 < \frac{1}{\varphi} \left[ \text{Arc cos} \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) + l\pi \right] \leq \hat{x}(y) \\ &\leq \tilde{x}(y) < \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi} \leq x_2 \leq \tilde{x}_2(y) \leq \frac{(l+1)\pi}{\varphi}, \end{aligned}$$

$\hat{x}(y)$  étant solution de (1''). On ne peut pas vérifier simultanément (1') et (1''). On démontrerait de même les trois autres cas, ce qui conduit à poser

$$1 - (-1)^k \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi} \sin \varphi \geq 0.$$

(ii)  $l=0, k$  pair et  $\varphi > \pi/2$ , d'après la proposition 4,  $x$  solution de (1' a) vérifie  $x \geq \pi/2 \varphi$  et  $\tilde{x}(y)$  solution de (1') qui est unique vérifie :  $\tilde{x}(y) \geq x \geq \pi/2 \varphi$ , mais  $\hat{x}(y)$  solution de (1'') vérifie  $\hat{x}(y) < \pi/2 \varphi$  vu le lemme 1. D'où le corollaire. On démontre de même pour  $k$  impair.

On va alors obtenir des renseignements sur les solutions des équations (1') et (2') qui avec l'algorithme développé ensuite, permettront de connaître toutes les solutions réelles ou complexes des équations (1) et (2).

PROPOSITION 6 :  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}$  étant fixé,  $t$  et  $f(t)$  définis comme à la proposition 4,  $(k+l)$  étant pair (resp. impair)  $l \neq 0$  (sauf si  $\varphi < \pi/2$ ) et

$$1 - (-1)^k \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi} \sin \varphi < 0.$$

Soit  $\tilde{x}(y)$  la solution de (1') [resp. (2')] dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}$  supérieure à  $x^*$  avec :

$x^*$  : solution de (1' a) [resp. (2' a)] dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}^1$  si  $f(t) \leq 0$ ;

$x^*$  : solution de  $x^* \varphi = \text{tg } x^* \varphi$  dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}^0$  si  $f(t) > 0$  [si  $k=l=0$  et  $\varphi < \pi/2$ ,  $\tilde{x}(y)$  est la solution de (1') et  $x^* = 1$ ] alors :

$$x^* \leq \tilde{x}(y) \leq \frac{(l+1)\pi}{\varphi}$$

et  $\tilde{x}$  est strictement croissante d'une borne à l'autre, en particulier de  $x^*$  à  $(l + (1/2))\pi/\varphi$  pour  $y$  croissant de  $y_g$  à  $y_d$ ; de plus

$$y(\tilde{x}) = \frac{1}{\varphi} \text{Arg ch} \left( \frac{(-1)^{k+l} \tilde{x} \sin \varphi}{\sin \tilde{x} \varphi} \right),$$

avec

$$y_g = y(x^*) \quad \text{et} \quad y_d = \frac{1}{\varphi} \text{Arg ch} \left( (-1)^k \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi} \sin \varphi \right).$$

Démonstration : Soient par exemple  $k$  et  $l$  pairs,  $l \neq 0$  on pose

$$\alpha = \left[ \text{Arc cos} \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) + l\pi \right] \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

et

$$\beta = \sin \left[ \text{Arc cos} \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) \right],$$

on distingue deux cas :  $\alpha \leq \beta$ , il existe une solution  $x^*$  de (1' a) dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}^1$ , mais comme  $(l + (1/2)) (\pi/\varphi) \sin \varphi > 1$ ; elle ne peut pas être, dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}^2$  car

$x \sin \varphi > \sin x \varphi$ . (1') est équivalente à  $x \sin \varphi / \operatorname{ch} y \varphi = \sin x \varphi$ , la pente de  $x \sin \varphi / \operatorname{ch} y \varphi$  est inférieure à celle de  $x \sin \varphi$  et décroît quand  $y$  croît. Comme  $\sin x \varphi$  est concave dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}$ ,  $\tilde{x}(y)$  solution de (1') est strictement croissante de  $x^*$  à  $(l+1)(\pi/\varphi)$  pour  $y$  allant de 0 à  $1^\infty$ . On a

$$(1') \Leftrightarrow y = \frac{1}{\varphi} \operatorname{Arg ch} \left( \frac{x \sin \varphi}{\sin x \varphi} \right)$$

d'où l'on tire

$$y_d = \frac{1}{\varphi} \operatorname{Arg ch} \left( \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi} \sin \varphi \right).$$

$\alpha > \beta$  on n'a pas de solution de (1' a), on cherche  $x^*$  pour lequel  $x^* \sin \varphi / \operatorname{ch} y \varphi$  est tangent à  $\sin x \varphi$ ; de l'égalité des pentes de  $x \sin \varphi / \operatorname{ch} y \varphi$  et  $\sin x \varphi$  et de (1') on tire

$$x^* \varphi = \operatorname{tg} x^* \varphi \quad \text{avec} \quad x^* \varphi \in \left] \frac{l\pi}{\varphi}, \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi} \right[.$$

On démontre que  $\tilde{x}(y)$  croît strictement de  $x^*$  à  $(l + (1/2))(\pi/\varphi)$  et en particulier de  $x^*$  à  $(l + (1/2))(\pi/\varphi)$  pour  $y$  allant de  $y_g = y(x^*)$  à  $y_d$  défini comme précédemment.

On démontre les autres cas de la même façon, ce qui conduit à la proposition 6.

*Remarque :* Pour  $0,622 \leq \varphi < \pi/2$  il n'y a pas de solution strictement complexe dans  $\mathcal{A}_{0,0}$ .

*Démonstration :* Dans le cas où  $\varphi < \pi/2$ ,  $x^* = 1$  si on montre que  $\hat{x}(y_d) < 1$ , il ne peut pas y avoir de solution commune à (1') et (1''). Soit en posant

$$t = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad \text{et} \quad v = \operatorname{Arg ch} \left( \frac{\pi t}{2} \right)$$

il suffit que

$$F(\varphi) = \frac{1}{\varphi} \operatorname{Arc cos} \left( \frac{tv}{\operatorname{sh} v} \right) < 1$$

mais  $F(\varphi)$  est décroissante pour  $\varphi \in ]0, \pi/2[$  et en particulier  $F(0.622) = 0.999875$ .

**PROPOSITION 7 :** *Sous les hypothèses de la proposition 6 et dans le cas où  $f(t) > 0$ , soit  $\tilde{x}_2(y)$  la solution de (1') [resp. (2')] dans  $\mathcal{A}_{l,k|\varphi}$  inférieure à  $x^*$ , vérifie  $l\pi/\varphi < \tilde{x}_2(y) \leq x^*$  et  $\tilde{x}_2(y)$  est strictement décroissante de  $x^*$  à  $l\pi/\varphi$  pour  $y \in [y_g, \infty[$ . De plus, si  $\hat{x}(y_g) \leq x^*$  il existe une unique solution complexe de (1) [resp. (2)] de partie réelle  $\bar{x}$  telle que  $\hat{x}(y_g) \leq \bar{x} \leq x^*$ .*

*Démonstration* : Le cas où  $k=l=0$  et  $\varphi < \pi/2$  n'étant pas considéré car  $\bar{x}_2(y)$  est la solution nulle quel que soit  $y$ , on fait le même raisonnement qu'à la proposition 6, pour démontrer l'existence et la décroissance de  $\bar{x}_2(y)$ . Si  $\hat{x}(y_g) \leq x^*$ ; comme  $\hat{x}(y)$  solution de (1'') [resp. (2'')] est croissante et  $\bar{x}_2(y)$  solution de (1') [resp. (2')] est décroissante à partir de  $x^*$ , il ne peut exister qu'une et une seule solution dont la partie réelle soit comprise entre  $l\pi/\varphi$  et  $x^*$  et en particulier entre  $\hat{x}(y_g)$  et  $x^*$ .

1.2.5. Dans le cadre de la proposition 6 si

$$y(x) = \text{Arg ch} \left( \frac{(-1)^{k+l} x \sin \varphi}{\sin x \varphi} \right)$$

et

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\varphi} \left[ \text{Arc cos} \left( \frac{(-1)^k (\sin \varphi / \varphi) y(x)}{\text{sh}(y(x))} \right) + l\pi \right]$$

les solutions de (1) si  $(k+l)$  est pair [(2) si  $(k+l)$  impair] strictement complexes ont pour partie réelle les solutions de  $\mathcal{F}(x) = x(I)$  auxquelles il faut ajouter la solution prévue par la proposition 7 si  $\mathcal{F}(x^*) \leq x^*$ , cette solution ayant une partie réelle  $\bar{x}$  comprise entre  $\mathcal{F}(x^*)$  et  $x^*$ ; de plus  $\mathcal{F}$  est continue et strictement croissante pour  $x \in [x^*, (l + (1/2))(\pi/\varphi)]$  car vu la proposition 6 et le lemme 1, elle est composée de fonctions strictement croissantes.

Vu le principe des solutions isolées des fonctions analytiques pour les équations (1) et (2), les solutions de (I) sont isolées.

On va développer un algorithme donnant tous les zéros de (I) pour  $x \in [a, b]$  qui s'applique dans ce cas.

### 1.3. L'algorithme

L'algorithme se démontre en deux parties :

**HYPOTHÈSE (H)** : Soient  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  un intervalle de longueur finie et  $f$  une application de  $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continue strictement monotone croissante, telle que  $f(a) \neq a$ ,  $f(b) \neq b$  et que les solutions de l'équation (I) :  $f(x) = x$  soient toutes isolées sur  $[a, b]$ .

**DÉFINITION** : On définit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de points de  $[a, b]$  de la façon suivante :

(i) si  $f(a) < a$  :  $x_0 = a$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} = x_i + \frac{b - x_i}{2^{k_i}}, \\ \text{si } x_i \neq b, \text{ avec } k_i \text{ le plus petit entier positif ou nul tel que} \\ f(x_{i+1}) < x_i, \\ x_{i+1} = x_i \quad \text{si } x_i = b; \end{array} \right.$$

(ii) si  $f(a) > a$ ,  $x_0 = a$  :

$$x_{i+1} = \min \left( b, \frac{f(x_i) + x_i}{2} \right).$$

Dans les deux cas, on démontre que la suite  $(x_n)$  est bien définie, croissante et qu'on a le théorème suivant :

1.3.1. THÉORÈME 1 : 1° s'il existe  $i_0$  tel que  $x_{i_0} = b$ , alors il n'y a pas de solution de (I) sur  $[a, b]$ ;

2° si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq b \Leftrightarrow x$  est la plus petite solution de (I) sur  $[a, b]$ .

Démonstration : (i)  $x_0$  est défini, montrons que  $x_1$  l'est aussi :

$$f(a) < a \Leftrightarrow x_0 - f(x_0) = \delta > 0,$$

$f$  est continue :  $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0$  tq,  $\forall x$  vérifiant

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \alpha &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ &\Rightarrow f(x) < f(x_0) + \epsilon < f(x_0) + \delta = x_0 \end{aligned}$$

si  $\epsilon < \delta$  (ici  $x > x_0$ ), il suffit de prendre  $(x_1 - x_0) < \alpha$  pour que  $x_1$  existe, soit  $[(b - \alpha_0)/2^{k_1}] < \alpha$ . On démontre de même pour  $x_i$  et la suite  $(x_n)$  est croissante par construction;

(ii) on montre par récurrence que  $\forall i \in \mathbf{N}, f(x_i) > x_{i+1}$  et  $x_{i+1} \geq x_i$  :

1° on appelle  $i_0$  le plus petit  $i$  tel que  $x_{i_0} = b$ , comme  $(x_n)$  est croissante  $[a, b]$  est « partitionné » en intervalles

$$[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{i_0-1}, x_{i_0}], \quad \forall x \in [a, b], \quad \exists i,$$

tel que  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  mais  $f$  est croissante et l'on a

$$f(x) \leq f(x_{i+1}) < x_i \leq x,$$

soit  $f(x) < x$  dans le cas (i) et

$$f(x) \geq f(x_i) > x_{i+1} \geq x$$

dans l'autre cas;

2° (i) on a

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b - x_i}{2^{k_i}} f(x_{i+1}) < x_i$$

et

$$y = x_i + \frac{b - x_i}{2^{k_i - 1}} = x_{i+1} + (x_{i+1} - x_i)$$

et  $f(y) \geq x_i$  par construction

$$f(x_{i+1}) < x_i \leq f[x_{i+1} + (x_{i+1} - x_i)]$$

et en passant à la limite

$$f(x) = x \quad (x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i),$$

$x$  est la plus petite solution de (I) : en faisant le même raisonnement qu'au 1° on montre que  $\forall x', a \leq x < x'$  on a  $f(x') < x'$ ;

2° (ii) on est dans le cas où  $x_i < b$  car

$$x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \neq b,$$

donc

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad x_{i+1} = \frac{f(x_i) + x_i}{2}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0 \text{ tq, } \forall n > N, \quad |x_n - x| < \varepsilon,$$

donc

$$|f(x_n) - x| \leq |f(x_n) + x_n - 2x| + |x - x_n| \leq 3\varepsilon$$

et

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = x = f(x),$$

de la même façon qu'au (i) :  $\forall x', a \leq x < x'$  on a  $f(x') > x'$ .

*Réciproquement* : Vu le 1° si  $x$  est la plus petite solution de (I) sur  $[a, b]$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \neq b$  avec  $y = x$  d'après ce qu'on a démontré.

On note  $G(f(x); a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  où les  $x_n$  sont définis comme au théorème 1, cette limite existe toujours car  $(x_n)$  est croissante et majorée.

1.3.2. THÉORÈME 2 : Sous l'hypothèse (H), il existe un nombre  $N < +\infty$  et une suite finie  $y_0 = a, y_1, \dots, y_{N-1}, y_N = b$  définie par

$$u_i = G(f(x); y_{i-1}, b)$$

si  $u_i = b$  alors  $y_i = b$  et  $N = i$  si  $u_i \neq b$  soit  $k_i$  le plus petit  $k \in \mathbb{N}$  pour lequel

$$u_i = -G(-f(-x + y_i + z_{i,k}); y_i, z_{i,k}) + y_i + z_{i,k_i}$$

avec

$$z_{i,k} = u_i + \frac{b - u_i}{2k}$$

et à condition que  $f(z_{1,k_1}) \neq z_{1,k_1}$ , alors  $y_i = z_{i,k_i}$ , telle que

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^{N-1} [y_i, y_{i+1}]$$

et que  $\forall i, i \leq N-2$  il existe une unique solution de (I) dans  $[y_i, y_{i+1}]$  et aucune dans  $[y_{N-1}, \bar{b}]$ , de plus les solutions sont les  $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_{N-1}$ .

· *Démonstration* : Vu le théorème 1,

$$\forall x \in [y, z] \subset [a, b], \quad -G(-f(-x+y+z); y, z) + y + z$$

est la plus grande solution de (I) sur  $[y, z]$ ,  $y_0$  étant défini, si (I) n'a pas de solution sur  $[a, b]$  alors  $u_1 = b = y_1$  et  $N = 1$ .

Si (I) a plusieurs solutions totalement isolées : soit  $\bar{x}$  la plus petite sur  $[a, b]$ , on a  $u_1 = \bar{x} \neq b$ , de plus il existe  $l_0 > 0$  tel que

$$\forall x \neq \bar{x}, \quad x \in [\bar{x} - l_0, \bar{x} + l_0] = J$$

on a  $f(x) \neq x$ , il suffit de prendre  $[(b - u_1)/2^{k_1}] < l_0$  pour que

$$z_{1,k_1} = u_1 + \frac{b - u_1}{2^{k_1}} \in J,$$

donc que  $f(z_{1,k_1}) \neq z_{1,k_1}$  et que la plus grande solution de (I) dans  $J$  soit aussi  $\bar{x} = u_1$ , donc que

$$u_1 = -G(-f(-x + y_0 + z_{1,k_1}); y_0, z_{1,k_1}) + y_0 + z_{1,k_1}$$

et que dans  $[a, z_{1,k_1}] = [y_0, y_1]$  il n'existe qu'une seule solution de (I) qui vaut  $u_1$ . On est ramené au même problème pour définir  $y_2$  dans  $[y_1, b]$  et le nombre de solutions étant fini, la suite  $(y_i)$  sera finie.

Pour tout  $(M x, M \varphi) \in (\mathbb{R}^+)^2$  fixé, on est en mesure de calculer toutes les solutions de (1) et de (2) dans l'ensemble

$$\{(x, y, \varphi) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid |x| < M x, |\varphi| < M \varphi\}$$

comme le résume le tableau I.

Dans chacun des  $\mathcal{A}_{i,k}^i$  donnés, on détermine le nombre de solutions que l'on calcule par l'algorithme dans les deux cas du tableau ci-après, et dans les autres cas, soit par la méthode de Newton, soit par la méthode de [3] (où on prend  $\varphi$  comme paramètre de bifurcation).

### 1.4. Multiplicité des solutions

Les solutions de (1) et (2) étant disjointes dans les  $\mathcal{A}_{l,k}$ , il suffit de connaître la multiplicité des solutions de (1) ou de (2).

TABLAU I

Équation (1)								
$\lambda = l = 0$		$l = 0, k \text{ pair}$		$(k + l) \text{ pair}, l \neq 0$		$k + l \text{ impair}$		
$\mathcal{A}^0$ 0 s r	$\mathcal{A}^1$ $\varphi < \pi/2$ 1 s r x = 1	$\mathcal{A}^2$ $\varphi < \pi/2$ 0 s r	$\mathcal{A}^{0,1}$ 0 s r	$\mathcal{A}^2$ 1 s r	$\mathcal{A}^0$ $f(t) < 0$ 1 s r	$\mathcal{A}^{1,2}$ $f(t) < 0$ 1 s r		$\mathcal{A}$ 0 s r
	$\varphi \geq \pi/2$ 0 s r	$\varphi \geq \pi/2$ 1 s r x = 1			$f(t) \geq 0$ 0 s r	$\mathcal{A}^1$ $f(t) = 0$ 1 s r	$\mathcal{A}^2$ $f(t) \geq 0$ 0 s r	
$\mathcal{A}^0$ 0 s c	$\mathcal{A}^1$ $\varphi < 0$ 622 voir prop 6,7 et alg	$\mathcal{A}^2$ 0 s c	$\mathcal{A}$ 0 s c		$\mathcal{A}^0$ 0 s c	$\mathcal{A}^1$ $g(\varphi) \geq 0$ 0 s c	$\mathcal{A}^2$ 0 s c	$\mathcal{A}$ 0 s c
	$\varphi \geq 0$ 622 0 s c				voir prop 6, 7 et alg			
Équation (2)		$l = 0, k \text{ impair}$		$(k + l) \text{ impair } l \neq 0$		$(k + l) \text{ pair}$		

s r, solution réelle, s c solution strictement complexe (partie imaginaire  $\neq 0$ )

$$t = \frac{(-1)^k \sin \varphi}{\varphi},$$

$$f(t) = \text{Arc cos } t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} + l\pi,$$

$$g(\varphi) = 1 - (-1)^k \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\varphi} \sin \varphi$$

PROPOSITION 8 : Toutes les solutions de (1) et de (2) dans les  $\mathcal{A}_{l,k}$  sont simples, sauf les solutions de la forme  $(x \varphi = \text{tg } x \varphi, y = 0)$  qui sont doubles.

Démonstration Soit pour (1)  $d(z \sin \varphi - \sin \varphi z)/dz = 0$  équivalent à

$$\sin \varphi - \varphi \cos x \varphi \text{ ch } y \varphi = 0, \tag{4}$$

$$\sin x \varphi \text{ sh } y \varphi = 0, \tag{5}$$

de (5) on a  $x \varphi = l\pi$  ou  $y = 0$ . On peut montrer [équation (1'a) plus proposition (5)] qu'il n'existe pas de solution de (1) dans les  $\mathcal{A}_{l,k}$  ayant  $l\pi$  pour partie réelle.  $y = 0$  donne en combinant (4) et (1')  $x \varphi = \text{tg } x \varphi$ .

Si on différencie une fois de plus, il vient  $\varphi^2 \sin \varphi z = 0$  équivalent à  $x \varphi = l \pi$  ce qui est impossible pour une solution de (1). De même pour (2).

2. EXEMPLE

On donne un tableau avec la solution de plus petite partie réelle pour  $\varphi$  variant régulièrement de  $\pi/8$  à  $15 \pi/8$  ( $\pi$  excepté).

TABLEAU II

$\varphi$	$x(\varphi)$	$y(\varphi)$
$\pi/8$	10,740	5,660
$\pi/4$	5,390	2,720
$3 \pi/8$	3,617	1,686
$\pi/2$	2,739	1,119
$5 \pi/8$	2,221	0,722
$3 \pi/4$	1,885	0,361
$7 \pi/8$	1,338	0
$9 \pi/8$	0,801	0
$5 \pi/4$	0,674	0
$11 \pi/8$	0,593	0
$3 \pi/2$	0,544	0
$13 \pi/8$	0,518	0
$7 \pi/4$	0,505	0
$15 \pi/8$	0,501	0

Il est à noter que la complexe conjuguée de cette solution est aussi solution quand elle est strictement complexe, c'est-à-dire pour  $\varphi \leq 2,553$  rad. Dans le problème de Stokes, si  $f \in [W_p^s(\Omega, \varphi)]^2$  alors  $u \in [W_p^{\inf\{s+2, x(\varphi)+2/p-\varepsilon\}}]^2$ .

3. ANNEXE

Dans [2], on montre que pour  $\omega_0 = \pi/2$ , il existe une solution de  $(\alpha + i \beta) \sin \omega_0 = \sin [(\alpha + i \beta) \omega_0]$  dans  $1 < \alpha < 2$  en définissant

$$F(\alpha) = \cos \frac{\alpha \pi}{2} \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sqrt{\alpha^2 - \sin^2 \frac{\alpha \pi}{2}} \operatorname{Log} \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \sin^2(\alpha \pi/2)}}{\sin(\alpha \pi/2)} \right),$$

car

$$F'(1) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 2} F(\alpha) = -\infty,$$

alors qu'il faut définir

$$F(\alpha) = \cos \frac{\alpha \pi}{2} \sqrt{\alpha^2 - \sin^2 \frac{\alpha \pi}{2}} - \frac{2}{\pi} \left[ \operatorname{Log} \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \sin^2(\alpha \pi/2)}}{\sin(\alpha \pi/2)} \right) \right] \sin \frac{\alpha \pi}{2}$$

et  $F(\alpha)$  est décroissante de 0 à  $-2$  pour  $1 \leq \alpha < 2$ .

## BIBLIOGRAPHIE

1. P. JAMET et P. A. RAVIART, *Numerical Solution of the Stationnary Navier-Stokes Equations by Finite Element Methods*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 10, Springer Verlag, 1973.
2. V. A. KONDRAT'EV, *Boundary Problems for Elliptic Equations in Domains with Conical or Angular Points*, Trans. Moscow Math. Soc., 1967, p. 227-313.
3. R. LOZI, *A Computing Method for Bifurcation Boughs of Nonlinear Eigenvalue Problems*, Bull. A.M.S., vol. 81, n° 6, novembre 1975, p. 1127-1129.
4. M. MERIGOT, *Solutions en normes  $L^p$  des problèmes elliptiques dans les polygones plans*, Thèse, Nice, 1974.
5. M. MERIGOT, *Régularité du problème de Stokes dans un polygone* (à paraître).
6. J. E. OSBORN, *Regularity of Solutions of the Stokes Problem in a Polygonal Domain. Numerical Solution of Partial Differential Equations III*, Academic Press, New York, 1976.
7. J. B. SEIF, *On the Green's Function for the Biharmonic Equation in an Infinite Wedge*, Trans. A.M.S., vol. 182, août 1973, p. 241-260.
8. G. STRANG et J. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, 1973.