

C. CARASSO

**Densité des hypothèses assurant la convergence  
de l'algorithme de Remes**

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques*, tome 6, n° R3 (1972), p. 69-84

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1972\\_\\_6\\_3\\_69\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_3_69_0)

© AFCET, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DENSITE DES HYPOTHESES ASSURANT LA CONVERGENCE DE L'ALGORITHME DE REMES

par C. CARASSO <sup>(1)</sup>

Résumé. — *Etant données trois fonctions  $f, f_1$  et  $f_2$ , l'algorithme de Remes permet de construire un meilleur approximant de  $f$  dans le sous-espace vectoriel engendré par  $f_1$  et  $f_2$ . Cet algorithme converge si :*

(c) *à chaque étape le déterminant d'une certaine matrice est non nul ;*

(h)  *$f_1$  et  $f_2$  ne s'annulent pas en un même point.*

*On montre dans cet article que  $f_1, f_2$  et les conditions initiales étant données, les fonctions  $f$  qui vérifient (c) sont partout denses.*

### INTRODUCTION

Soient  $f, f_1, \dots, f_n, n + 1$  fonctions réelles, continues et linéairement indépendantes sur  $[0,1]$ . L'algorithme de Rémès permet de déterminer numériquement un meilleur approximant de  $f$  au sens de la norme du max parmi les éléments du sous-espace vectoriel engendré par  $f_1, \dots, f_n$ .

Dans [1] nous avons établi la convergence de l'algorithme, lorsque  $n = 2$  moyennant les deux hypothèses suivantes :

(C) l'algorithme est itératif.

(H)  $f_1$  et  $f_2$  ne s'annulent pas en un même point.

Nous démontrons ici la « généralité » de ces deux hypothèses en montrant que :

1) pour  $f_1, f_2$  (tels que tout élément de  $V$  s'annule au plus une infinité dénombrable de fois) et des conditions initiales données l'ensemble des fonctions  $f$  de  $C[0, 1]$  pour lesquelles l'hypothèse (C) est vérifiée est partout dense ;

2) l'ensemble des fonctions  $(f_1, f_2)$  de  $(C[0, 1])^2$  vérifiant l'hypothèse (H) est un ouvert dense.

---

(1) Université Scientifique et Médicale de Grenoble (Mathématiques Appliquées), I.R.M.A.

# **I. DESCRIPTION GEOMETRIQUE DE L'ALGORITHME DE REMES [1]**

On note  $\psi^+$  l'application de  $[0,1]$  dans  $\mathbf{R}^3$  définie par :

$$\psi^+ : t \mapsto (f(t), f_1(t), f_2(t)) ; \psi^- = -\psi^+$$

et  $\theta$  l'application de  $[0,1]$  dans  $\mathbf{R}^2$  définie par  $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ .

Posons  $\Gamma^+ = \psi^+([0, 1])$  et  $\Gamma = (\Gamma^+) \cup (-\Gamma^+)$ .

Pour  $A \subset \mathbf{R}^3$ , on note :

$$\hat{A} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \text{il existe } x_0 \in \mathbf{R} : (x_0, x_1, x_2) \in A \}$$

$$e_0 = (1, 0, 0)$$

$$D_0^+ = \{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \text{il existe } \lambda \geq 0 : x = \lambda e_0 \}.$$

On se donne au départ trois points  $X_1^0, X_2^0$  et  $X_3^0$  de  $\Gamma$  non alignés formant un triangle  $S^0$  et définissant un plan  $H^0$  tel que  $H^0$  coupe  $D_0^+$  en  $I^0$  appartenant à l'intérieur relatif de  $S^0$ . On note :

$$X_j^0 = \epsilon_j^0 \psi^+(t_j^0), j = 1, 2, 3 \text{ avec } (\epsilon_i^0, t_i^0) \in \{-1, +1\} \times [0, 1].$$

On suppose qu'à l'étape  $k$  on dispose de trois points :

$$X_j^k = \epsilon_j^k \psi^+(t_j^k), j = 1, 2, 3$$

ayant les mêmes propriétés que  $X_j^0 (j = 1, 2, 3)$ . On définit de même  $S^k, H^k, I^k = i^k e_0$  et  $g^k = \lambda_1^k f_1 + \lambda_2^k f_2$  avec  $(1, -\lambda_1^k, -\lambda_2^k)$  orthogonal à  $H^k$ .

Pour passer à l'étape  $k+1$  on considère le plan d'appui  $\bar{H}^k$  à  $\Gamma$  qui est parallèle à  $H^k$  et qui coupe  $D_0^+$  en  $\bar{I}^k = \bar{i}^k e_0$ . (on a  $\bar{i}^k = \|f - g^k\|$  voir [1]).

Soit  $Z^{k+1} = \epsilon^{k+1} \psi^+(z^{k+1})$  le premier point rencontré de  $\Gamma \cap H^k$  lorsque l'on décrit simultanément les segments :

$$t \mapsto \psi^+(t) \text{ et } t \mapsto \psi^-(t) \text{ de } 0 \text{ vers } 1.$$

Trois cas peuvent se produire :

1. Aucun des segments  $Z^{k+1} X_j^k (j = 1, 2, 3)$  ne coupe  $D_0^+$ .

On pose alors :

$$X_j^{k+1} = \begin{cases} Z^{k+1} & \text{si } j = j_0^k \\ X_i^k & \text{si } j \neq j_0^k \end{cases} \quad j = 1, 2, 3.$$

L'indice  $j_0^k$  étant tel que  $D_0^+$  traverse le triangle de sommets  $X_i^{k+1} (i = 1, 2, 3)$ .

2. Un des segments  $Z^{k+1} X_j^k (j = 1, 2, 3)$  coupe  $D_0^+$ . On ne peut alors itérer.

3.  $H^k = \bar{H}^k$ ;  $g^k$  est alors un meilleur approximant de  $f$  dans  $V$ . Dans ce cas on pose *conventionnellement* :

$$X_j^{k+1} = X_j^k \quad j = 1, 2, 3.$$

*Définitions :*

**1.1.** On dit que *l'algorithme s'itère n fois* si le cas 2 ne se produit à aucune étape  $k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ .

**1.2.** On dit que *l'algorithme est itératif* s'il s'itère une infinité de fois.

**1.3.** On dit que *l'algorithme converge* si :

i) l'algorithme est itératif,

ii) zéro est une valeur d'adhérence de la suite  $\{\bar{i}^k - i^k\}$ .

## II. DENSITÉ DES FONCTIONS POUR LESQUELLES L'ALGORITHME EST ITERATIF

*Définition :*

**2.1.** On dit que  $V$  (ou  $(f_1, f_2)$ ) vérifie l'hypothèse (D) si : quels que soient les réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , il existe au plus une *infinité dénombrable* d'abscisses  $t$  de  $[0, 1]$  vérifiant :

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0.$$

### REMARQUES

**2.1.** Cette hypothèse est à rapprocher de celle de Haar d'après laquelle  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  ne peut s'annuler qu'une fois sur  $[0, 1]$ .

**2.2.** L'hypothèse (D) peut s'exprimer géométriquement en disant que : « toute droite de  $\mathbb{R}^2$  passant par 0 ne rencontre qu'au plus une infinité dénombrable de fois la courbe  $\hat{\Gamma}^+$  de  $\mathbb{R}^2$ , chaque point étant compté avec son ordre de multiplicité.

### Proposition 2.1

Si  $V$  vérifie l'hypothèse (D), l'ensemble des fonctions  $f$  de  $C[0,1]$  pour lesquelles l'algorithme de Rémès est itératif est partout dense.

La démonstration se fera en trois phases :

#### Phase A :

On définit les fonctions  $N$ -régulières qui sont des fonctions  $f$  particulières telles que l'algorithme s'itère au moins  $N$  fois.

#### Phase B :

On montre comment on peut transformer par une petite perturbation toute fonction  $N$ -régulière en une fonction  $N+1$ -régulière.

#### Phase C :

A partir d'une fonction  $f$  de  $C[0,1]$  et de conditions initiales :

$$(\epsilon_j^0, t_j^0)(j = 1, 2, 3)$$

données, en itérant le processus de la phase B on définit, par passage à la limite, une fonction  $\tilde{f}_\epsilon$  aussi proche que l'on veut de  $f$  (au sens de la norme du max) telle que l'algorithme appliqué à  $\tilde{f}_\epsilon$ , avec les mêmes conditions initiales, soit itératif.

Les conditions initiales  $(\epsilon_j^0, t_j^0)(j = 1, 2, 3)$  choisies une fois pour toute sont telles que 0 appartient à  $S^0$ , où  $S^0$  est le triangle de  $\mathbb{R}^3$  de sommets

$$X_j^0 = \epsilon_j^0 \psi^+(t_j^0)(j = 1, 2, 3).$$

De même les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  qui vérifient l'hypothèse (D) sont fixes.

#### Phase A :

Soit  $f$  une fonction de  $C[0,1]$  telle que l'algorithme appliqué à  $f$  s'itère au moins  $N$  fois. Si  $(\epsilon_j^k, t_j^k)(j = 1, 2, 3)$  définit le point  $X_j^k$ , on notera par  $R_n$  la suite des abscisses utilisées jusqu'à l'étape  $n$  (pour  $n \leq N$ ), soit :

$$R_n = \{ t_j^k \mid j = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \}.$$

*Définition 2.2*

Les « points interdits » à l'étape  $n$  d'une fonction  $f$  telle que l'algorithme appliqué à  $f$  s'itère au moins  $n$  fois sont tous les points  $t$  de  $[0,1]$  n'appartenant pas à  $R_n$  tels que la droite joignant le point  $\theta(t)$  à l'origine rencontre l'ensemble  $\theta(R_n)$ . On notera  $\mathfrak{J}(f, n)$  l'ensemble des « points interdits » à l'étape  $n$ .

*Définition 2.3*

Soit  $f$  une fonction pour laquelle l'algorithme s'itère au moins  $N$  fois. On dit que  $f$  est  $N$ -régulière si pour tout  $k$  inférieur ou égal à  $N$  on a :

i) le premier point  $z^{k+1}$  où  $|f - g^k|$  atteint son maximum n'appartient pas à  $\mathfrak{J}(f, k)$ .

ii) tous les autres points (s'il en existe) où  $|f - g^k|$  atteint son maximum sont des points de  $R_k$ .

**Lemme 2.1**

Si  $f$  est  $N$ -régulière, l'algorithme appliqué à  $f$  s'itère au moins  $N - 1$  fois.

*Démonstration :*

Il suffit de montrer que la  $N + 1^{\text{ème}}$  itération est possible, ou que l'éventualité 2 de la description de l'algorithme ne peut se produire.

Si  $Z^{N+1}$  est l'un des trois points  $X_j (j = 1, 2, 3)$  on est dans l'éventualité 3.

Si  $Z^{N+1}$  n'appartient pas à  $R_N$ , par définition de  $\mathfrak{J}(f, N)$  les droites construites sur  $X_j^N (j = 1, 2, 3)$  et  $Z^{N+1}$  ne rencontrent pas  $D_0$  (c'est l'éventualité 1).

Si  $Z^{N+1}$  appartient à  $R_N$ , il est facile de voir que l'on se trouvait encore dans l'éventualité 1.

*Définition 2.4.*

La « fonction de garde »  $g_f^N$  d'une fonction  $N$ -régulière  $f$  est définie par :

$$g_f^N(t) = \text{Inf} \{ \varphi(t), \|f - g^k\| - |f(t) - g^k(t)| \mid k = 0, \dots, N \}$$

avec :

$$\varphi(t) = (t - t_1^0)^2(t - t_2^0)^2(t - t_3^0)^2.$$

On voit que,  $f$  étant  $N$ -régulière,  $g_f^N$  ne s'annule que sur  $R_{N+1}$ .

### Notations

Tous les « objets »  $R_N$  (suite des points utilisés),  $g^n$  (meilleur approximant à l'étape  $n$ ),  $z^{n+1}$  (premier point où  $|f - g^n|$  atteint son maximum), etc... sont des objets qui dépendent de  $f$ ; aussi, chaque fois que cela sera nécessaire, on écrira  $R_N(f)$ ,  $z^{n+1}(f)$ ,  $g^n(f)$ ,  $t_i^k(f)$ , etc...

### Phase B

#### Lemme 2.2

Soit  $f$  une fonction  $N$ -régulière,  $g_f^N$  sa fonction de garde; si la fonction  $f$  est telle que :

$$(2-1) \quad |f(t) - f_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon g_f^N(t) \quad \text{avec } \varepsilon < 1 \quad \text{et } t \in [0, 1]$$

alors la fonction  $f_\varepsilon$  est  $N$ -régulière et on a :

$$(2-2) \quad X_j^k(f) = X_j^k(f_\varepsilon) \quad j = 1, 2, 3; k = 0, 1, \dots, N.$$

où  $X_j^k(f)$  et  $X_j^k(f_\varepsilon)$  représentent les points de  $\mathbf{R}^3$  obtenus en appliquant  $N$  itération de l'algorithme de Rémès à  $f$  et à  $f_\varepsilon$ .

#### Démonstration :

Puisque  $g_f^N$  s'annule sur  $(t_1^0, t_2^0, t_3^0)$  on peut déjà affirmer que

$$X_j^0(f) = X_j^0(f_\varepsilon) \quad (j = 1, 2, 3) \quad \text{et} \quad g^0(f) = g^0(f_\varepsilon).$$

De la relation (2.1) on tire :

$$f(t) - \varepsilon g_f^N(t) \leq f_\varepsilon(t) \leq f(t) + \varepsilon g_f^N(t)$$

ce qui entraîne, par définition de  $g_f^N$ , que :

i) si  $t$  est un point où :

$$\bar{i}^0 = \|f - g^0(f)\| = |f(t) - g^0(f)(t)|$$

on a :

$$f_\varepsilon(t) = f(t)$$

d'où :

$$\bar{i}^0 = |f_\varepsilon(t) - g^0(f)(t)|.$$

ii) si  $t$  n'est pas un point où  $|f - g^0|$  atteint son maximum on a alors :

$$|f_\varepsilon(t) - g^0(f)(t)| \leq |f(t) - g^0(f)(t)| + \varepsilon(\bar{i}^0 - |f(t) - g^0(f)(t)|)$$

soit :

$$|f_\varepsilon(t) - g^0(f)(t)| < \bar{i}^0.$$

Ceci prouve que les fonctions  $|f - g^0(f)|$  et  $|f_\varepsilon - g^1(f)|$  atteignent leur maximum  $\bar{i}^0$  sur le même ensemble et que de plus  $f$  et  $f_\varepsilon$  sont égales sur cet ensemble. On en déduit :

$$X_j^1(f) = X_j^1(f_\varepsilon) \quad (j = 1, 2, 3) \text{ et } g^1(f) = g^1(f_\varepsilon).$$

On procède de même pour montrer que  $|f - g^1(f)|$  et  $|f_\varepsilon - g^1(f)|$  atteignent leur maximum sur le même ensemble et ainsi de proche en proche le lemme est démontré.

On va maintenant décrire un procédé permettant d'associer à toute fonction  $N$ -régulière une fonction  $f_\varepsilon$   $N+1$ -régulière et arbitrairement proche.

Soient donc  $f$  une fonction  $N$ -régulière et  $\varepsilon$  un réel strictement positif plus petit que 1.

$f$  étant  $N$ -régulière,  $|f - g^N|$  atteint son maximum en  $z^{N+1}$  n'appartenant pas à  $\mathcal{J}(f, N)$ .

i) Si  $|f - g^{N+1}|$  n'atteint son maximum qu'en des points de  $R_{N+1}$ . (C'est le cas en particulier si  $g^N$  est un meilleur approximant de  $f$  dans  $V$  car conventionnellement on a  $g^{N+1} = g^N$ .) Le point  $z^{N+2}$  est alors un point de  $R_{N+1}$  n'appartenant pas à  $\mathcal{J}(f, N+1)$ .  $f$  est donc  $N+1$ -régulière, on pose alors :

$$f_\varepsilon = f.$$

ii) Si  $|f - g^{N+1}|$  atteint son maximum en un point  $t$  n'appartenant pas à  $R_{N+1}$ .

En  $t$ , la fonction de garde de  $f$  est strictement positive, soit  $a$  tel que :

$$(2-3) \quad g_f^N(t) > a > 0.$$

Il existe  $\eta_1 > 0$  tel que pour  $|t - \zeta| \leq \eta_1$  on ait  $g_f^N(\zeta) \geq a$ .

On va supposer que  $f(t) - g^{N+1}(t)$  est strictement positif, les modifications à apporter dans le cas contraire sont évidentes.



Il existe  $\eta_2 > 0$  tel que pour  $|t - \zeta| \leq \eta_2$  on ait :

$$(2.4) \quad f(\zeta) - g^{N+1}(\zeta) > \|f - g^{N+1}\| - \frac{1}{2}\varepsilon a \quad \text{avec} \quad 0 < \varepsilon < 1$$

$f$  étant  $N$ -régulière, l'ensemble  $R_{N+1}$  est fini, d'après l'hypothèse (D) l'ensemble  $\mathfrak{J}(f, N+1)$  étant au plus dénombrable est d'intérieur vide il existe donc un intervalle :

$$J = [\tau - 2\lambda, \tau + 2\lambda] \quad \text{avec} \quad \lambda > 0$$

tel que :

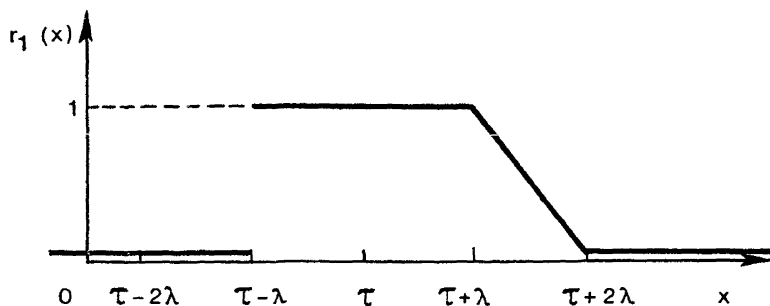
$$(2.5) \quad \alpha) \quad J \cap R_{N+1} = \emptyset$$

$$(2.6) \quad \beta) \quad \tau \text{ n'appartient pas à } I(f, N+1)$$

$$(2.7) \quad \gamma) \quad J \subset [z_{N+2} - \text{Min}(\eta_1, \eta_2), z_{N+2} + \text{Min}(\eta_1, \eta_2)]$$

*Définitions 2.5.*

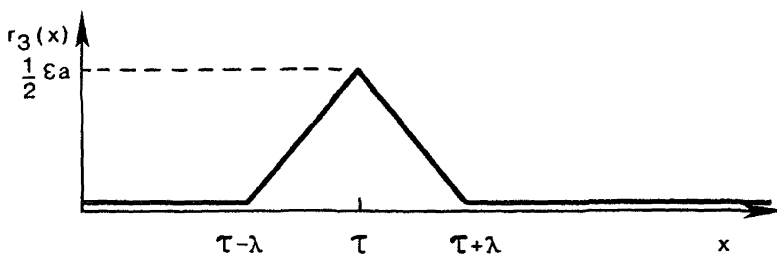
On note  $r_1$  la fonction définie par le graphe :



$r_2$  la fonction définie par :

$$r_2(x) = r_1(x) \cdot [f(\tau-\lambda) - g^{N+1}(\tau-\lambda) - f(x) + g^{N+1}(x)].$$

$r_3$  la fonction définie par le graphe :



Soit  $p_\varepsilon$  la fonction :

$$p_\varepsilon = r_2 + r_3$$

et  $\chi_J$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $J$ .

### Lemme 1.3

La fonction  $p_\varepsilon$  est continue et possède les trois propriétés suivantes :

$$(2.8) \quad i) \quad \|p_\varepsilon\| \leq \varepsilon a$$

$$(2.9) \quad ii) \quad 0 \leq p_\varepsilon \leq g_f^N \cdot \chi_J$$

iii) la fonction

$$x \mapsto |f(x) + p_\varepsilon(x) - g^{N+1}(x)|$$

atteint son maximum uniquement au point  $\tau$ .

*Démonstration :*

Vérification immédiate.

Dans le cas *ii)* on pose :

$$f_\varepsilon = f + p_\varepsilon.$$

On a alors le lemme 2.4.

### Lemme 2.4

La fonction  $f_\varepsilon$  associée à  $f$  par la procédure qui vient d'être décrite possède les trois propriétés suivantes :

$$(2.10) \quad i) \quad |f - f_\varepsilon| \leq \varepsilon g_f^N$$

ii)  $f_\varepsilon$  est  $N + 1$ -régulière

iii) la fonction de garde  $g_{f_\varepsilon}^N$  de  $f_\varepsilon$ , considérée comme fonction  $N$ -régulière, satisfait la relation :

$$(2-11) \quad g_{f_\varepsilon}^N \leq (1 + \varepsilon)g_f^N$$

*Démonstration :*

Dans le premier cas on a  $f_\varepsilon = f$ , ce qui démontre donc *i)*; dans le deuxième cas on a :

$$|f - f_\varepsilon| = |p_\varepsilon|.$$

Par construction  $|p_\varepsilon|$  est nul en dehors de  $J$  et plus petit que  $\varepsilon a$  sur  $J$ ; comme  $J$  est inclus dans  $[t - \eta_1, t + \eta_1]$ , intervalle sur lequel  $g_f^N$  est plus grand que  $a$ , le point *i)* est complètement démontré.

Le fait que  $f_\varepsilon$  soit  $N$ -régulière est une conséquence du lemme 2.2. Dans le premier cas  $f$  est déjà  $N + 1$ -régulière, comme  $f = f_\varepsilon$  le point *ii*) est démontré. Dans le deuxième cas,  $|f_\varepsilon - g^{N+1}(f_\varepsilon)|$  est égal d'après le lemme 2.2, à  $|f_\varepsilon - g^{N+1}(f)|$  par construction de  $f_\varepsilon$  cette dernière fonction atteint son maximum en un unique point  $\tau$  n'appartenant pas à  $\mathcal{J}(f, N)$  qui est égal à  $\mathcal{J}(f_\varepsilon, N)$  (d'après le lemme 2.2), ceci démontre complètement *ii*).

Le point *iii*) est immédiat dans le premier cas; dans le deuxième cas il découle facilement de ce que, d'une part pour  $n \leq N$  on a

$$(g^n(f_\varepsilon) = g^n(f))$$

et d'autre part :

$$|f - f_\varepsilon| \leq \varepsilon g_f^N.$$

*Phase C.*

Nous allons construire maintenant une fonction  $f_\varepsilon$  arbitrairement proche de la fonction donnée  $f$ .

La fonction  $f$  est supposée 1-régulière; les points initiaux  $X_{ji}^0 (j = 1, 2, 3)$  étant choisis pour qu'il en soit ainsi, la fonction de garde de  $f$  est alors  $g_f^0 = \varphi$ .

Définissons une suite  $f_n$  par récurrence de la manière suivante : soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$

$$(2-12) \quad f_0 = f_{\varepsilon_0} ; \quad \varepsilon_0 = \varepsilon ; \quad f_{n+1} = (f_n)_{\varepsilon_{n+1}} ;$$

$$\varepsilon_{n+1} = \text{Min} \left( \frac{\varepsilon}{2^{n+1} \|g_{f_n}^n\|} , \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right),$$

Les fonctions  $f_n$  sont  $n$ -régulières et on a (lemme 1.3) :

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \varepsilon_{n+1} \|g_{f_n}^n\|$$

Soit :

$$(2-13) \quad \|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

La suite  $\{f_n\}$  est donc une suite de Cauchy, elle tend vers une limite  $\tilde{f}_\varepsilon$  qui possède les propriétés énoncées dans le :

#### Lemme 2.4

La fonction  $\tilde{f}_\varepsilon$  satisfait, pour  $\varepsilon < \frac{1}{4} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{-1}$ , les points *i*) et *ii*) ci-dessous :

$$i) \quad \|f - \tilde{f}_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$$

*ii*) L'algorithme de Rémès appliqué à la recherche d'un meilleur approximant de  $\tilde{f}_\varepsilon$  est itératif.

*Démonstration :*

On a :

$$\|f - f_n\| \leq \|f_0 - f\| + \sum_{i=1}^n \|f_i - f_{i-1}\|$$

d'après 2.13 :

$$\|f - f_n\| \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^i} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \varepsilon$$

En passant à la limite on a  $i$ ).

Pour démontrer *ii*), nous allons évaluer  $|\tilde{f}_\varepsilon - f_n|$  et appliquer le lemme 2.2 :

On a :

$$|f_{n+p} - f_n| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |f_{n+i+1} - f_{n+i}|$$

D'après 2.10 et 2.12 :

$$|f_{n+p} - f_n| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon_{n+i} g_{f_{n+i}}^{n+i} \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{2^i} g_{f_{n+i}}^{n+i}.$$

La fonction de garde est un « inf », donc :

$$g_{f_{n+i}}^{n+1} \leq g_{f_{n+i}}^n$$

et d'après 2.11 :

$$g_{f_{n+1}}^n \leq (1 + \varepsilon_{n+1}) g_{f_n}^n$$

soit :

$$g_{f_{n+i}}^n \leq \prod_{j=1}^i (1 + \varepsilon_{n+j}) g_{f_n}^n.$$

Le produit infini :

$$\prod_{j=1}^i (1 + \varepsilon_{n+j}) \text{ est inférieur à } \prod_{j=1}^i \left( 1 + \frac{1}{2^j} \right) = k < \infty$$

d'où la majoration :

$$g_{f_{n+i}}^n \leq k g_{f_n}^n$$

ce qui donne enfin :

$$|f_{n+p} - f_n| \leq \frac{k\varepsilon}{2^n} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{2^i} g_{f_n}^n \leq \frac{2k\varepsilon}{2^n} g_{f_n}^n.$$

Pour  $\varepsilon < \frac{1}{4k}$  on a :

$$|f_{n+p} - f_n| \leq \frac{1}{2} g_{f_n}^n$$

et :

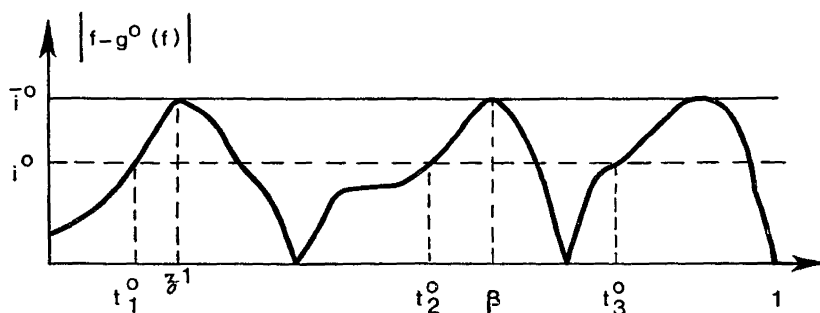
$$|\tilde{f}_\varepsilon - f_n| \leq \frac{1}{2} g_{f_n}^n$$

ce qui prouve, d'après le lemme 1-2, que  $\tilde{f}_\varepsilon$  est  $n$ -régulière. Comme  $\tilde{f}_\varepsilon$  est  $n$ -régulière pour tout  $n$ , l'algorithme de Rémès appliqué à  $\tilde{f}_\varepsilon$  sera itératif.

Le lemme 2.4 achève la démonstration de la proposition 2.1.

REMARQUE 2.3 :

Il serait intéressant que l'ensemble des fonctions pour lesquelles l'algorithme est itératif soit ouvert dans  $C[0,1]$ , cela est faux même pour une norme de  $C^k[0,1]$  ; il suffit de considérer une situation dans laquelle  $|f - g^0(f)|$  à l'allure du dessin :



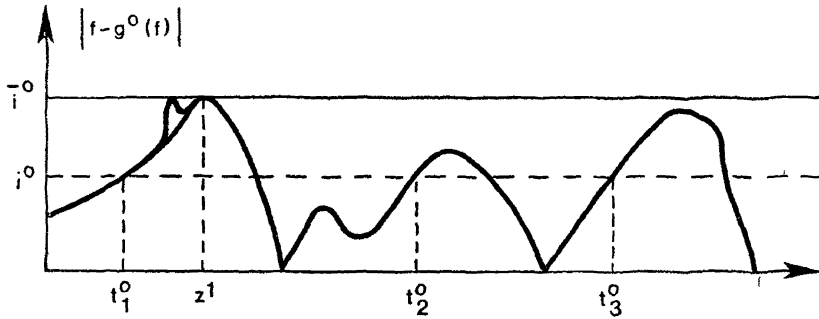
où  $z^1$  est un point non interdit et  $\beta$  un point interdit. Par une perturbation arbitrairement petite de  $f$  au voisinage de  $z^1$ , on peut s'arranger pour que le premier point où  $|f - g^0(f)|$  atteint son maximum soit le point  $\beta$ .

REMARQUE 2.4

L'ensemble des fonctions pour lesquelles l'algorithme est itératif contient-il un ouvert? La question est ouverte.

## REMARQUE 2.5

L'ensemble des fonctions  $n$ -régulières n'est pas ouvert : en effet on peut toujours en perturbant  $f$  très peu, faire « apparaître » des points où  $|f - g^0(f)|$  atteint son maximum comme le montre la figure :



### III. COMPARAISON DE L'HYPOTHESE (H) AVEC LA CONDITION DE HAAR

Nous démontrons dans ce paragraphe que l'ensemble des couples  $(f_1, f_2)$  de  $C[0,1]^2$  ne s'annulant pas en un même point (hypothèse (H)) est un ouvert dense; ceci n'est pas le cas de la condition de Haar. L'hypothèse (H) est donc générique <sup>(1)</sup>; une telle proposition est intéressante car elle prouve que, si  $(f_1, f_2)$  ne vérifie pas l'hypothèse (H), on pourra trouver arbitrairement près un couple la satisfaisant.

**Proposition 3.1**

L'ensemble des couples de fonctions ne s'annulant pas en un même point (hypothèse (H)) est un ouvert dense dans  $(C[0,1])^2$  muni de la topologie produit.

*Démonstration*

Notons  $E$  l'ensemble des couples  $(f_1, f_2)$  de  $(C[0,1])^2$  tels que :  $|f_1(t)| + |f_2(t)| > 0$  pour tout  $t$  de  $[0,1]$ .

Posons :

$$\|(f_1, f_2)\| = \|f_1\| + \|f_2\|.$$

L'ensemble  $E$  représente aussi l'ensemble des couples  $(f_1, f_2)$  qui vérifient l'hypothèse (H);  $f_1$  et  $f_2$  étant continues,  $E$  est ouvert.

(1) On dit qu'une hypothèse est générique si elle est vérifiée sur une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Montrons que  $E$  est dense. On sait que  $(C^1[0,1])^2$  est dense dans  $(C[0,1])^2$ ; il nous suffit donc de montrer que  $E$  est dense dans  $(C^1[0,1])^2$ .

Soit  $(f_1, f_2) \in (C^1[0,1])^2$  et  $F$  l'application de  $[0,1] \times \mathbb{R}^2$  dans  $[0,1] \times \mathbb{R}^2$  définie par :

$$(t, \alpha_1, \alpha_2) \mapsto (t, f_1(t) + \alpha_1, f_2(t) + \alpha_2).$$

Posons :

$$S = [0, 1] \times \{0, 0\} \quad \text{et} \quad \Sigma = F^{-1}(S).$$

On va montrer que l'on peut trouver  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  suffisamment petits tels que :

$$[0,1] \times \{\alpha_1, \alpha_2\} \cap \Sigma = \emptyset$$

On aura alors  $(f_1 + \alpha_1, f_2 + \alpha_2) \in E$  et la proposition sera démontrée.

L'ensemble  $\Sigma$  est l'intersection des ensembles de  $\mathbb{R}^3$  définis par

$$g_1(t, \alpha_1, \alpha_2) = f_1(t) + \alpha_1 = 0$$

$$g_2(t, \alpha_1, \alpha_2) = f_2(t) + \alpha_2 = 0.$$

On a :

$$\text{grad } g_1(t, \alpha_1, \alpha_2) = (f'_1(t), 1, 0) \quad \text{et} \quad \text{grad } g_2(t, \alpha_1, \alpha_2) = (f'_2(t), 0, 1).$$

Les gradients de  $g_1$  et  $g_2$  étant linéairement indépendants en tout point de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Sigma$  est une sous-variété régulièrement plongée de codimension 2. Soit  $\pi$  l'application projection de  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :  $(t, \alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)$ .  $\pi$  est une application différentiable de  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^2$ ; en appliquant le théorème de Sard ([4], page 10) on en déduit que le complémentaire de  $\text{Im } \pi$  est partout dense. Il existe donc dans le complémentaire de  $\text{Im } \pi$  des  $(\alpha_1, \alpha_2)$  arbitrairement proches de  $O$ ; pour un tel couple  $(\alpha_1, \alpha_2)$  on a :

$$[0,1] \times \{\alpha_1, \alpha_2\} \cap \Sigma = \emptyset.$$

### REMARQUE 3.1

La proposition 3.1 indique que l'hypothèse  $(H)$  est générique.

### Proposition 3.2

**La condition de Haar n'est pas générique dans  $(C[0,1])^2$ .**

*Démonstration :*

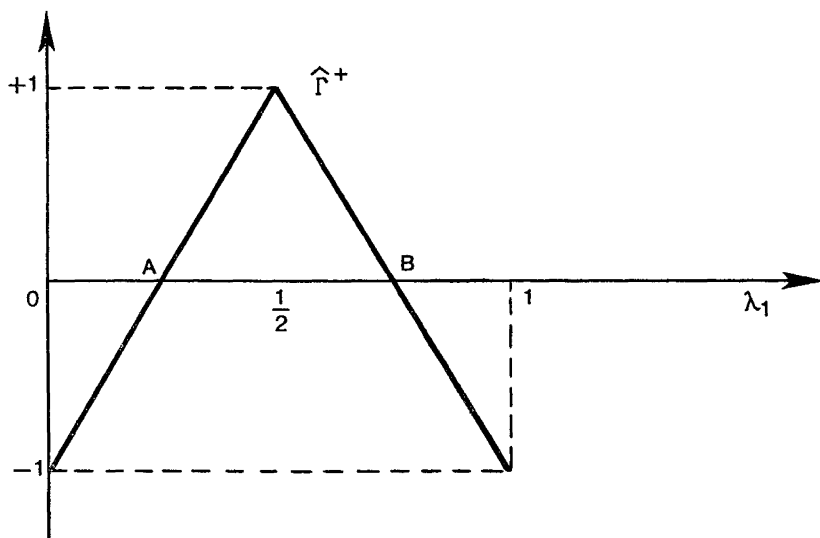
$(f_1, f_2)$  vérifie la condition de Haar si et seulement si  $(f_1(t_1), f_2(t_1))$  et  $(f_1(t_2), f_2(t_2))$  sont linéairement indépendants pour tout  $t_1 \neq t_2$  de  $[0,1]$ . On

peut encore énoncer géométriquement :  $(f_1, f_2)$  vérifie la condition de Haar si et seulement si toute droite de  $\mathbb{R}^2$  passant par zéro a au plus un point commun (compté avec son ordre de multiplicité) avec  $\hat{\Gamma}^+$ .

Considérons les fonctions :

$$f_1(t) = t$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 4t - 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -4t + 3 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



La courbe  $\hat{\Gamma}^+$  coupe en deux points  $A$  et  $B$  la droite  $0\lambda_1$  et on voit d'une manière évidente que dans la boule de  $(C[0,1])^2$  de centre  $(f_1, f_2)$  et de rayon  $\varepsilon = \frac{1}{8}$  n'existe aucun couple  $(f'_1, f'_2)$  vérifiant la condition de Haar.

L'hypothèse  $(H)$  est donc générique alors que la condition classique de Haar ne l'est pas. Lorsque  $n > 2$ , on peut montrer ([2]) que l'algorithme de Rémès converge s'il est itératif et si l'ensemble des fonctions  $f_1, \dots, f_n$  ne s'annulent pas en un même point.



## REMERCIEMENTS

L'auteur remercie Monsieur C. Lobry (Université de Bordeaux) dont l'amical soutien et les nombreux entretiens ont permis l'élaboration de ce travail.

## RÉFÉRENCES

- [1] C. CARASSO, *Étude de l'algorithme de Rémès en l'absence de conditions de Haar* Numer. Math. 20, 165-178 (1972).
- [2] C. CARASSO, *Convergence de l'algorithme de Rémès*, (à paraître).
- [3] P. J. LAURENT, *Approximation et Optimisation*, Hermann, Paris (1972).
- [4] MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, 1965.
- [5] E. REMES, *Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tchebichef*, C.R.A.S., 199, 337-340 (1935).