G. TISSIER

Approximation d'une fonction définie sur une sphère dans une base de fonctions sphériques de Legendre

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R3 (1971), p. 9-28

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_9_0>

R.I.R.O.
(5e année, N° R-3, 1971, p. 9-28)

APPROXIMATION D'UNE FONCTION DEFINIE SUR UNE SPHERE DANS UNE BASE DE FONCTIONS SPHERIQUES DE LEGENDRE

par G. TISSIER (1)

Résumé. — *Soit f une fonction définie sur la sphère Σ et développable en série de Laplace uniformément convergente de fonctions sphériques de Legendre.*

Dans cet article, on étudie une approximation de f par une somme de rang N *de polynômes de Laplace obtenue à partir d'un polynôme trigonométrique des deux variables θ, φ habituelles qui interpole f en des points équirépartis sur Σ. Une majoration de l'erreur d'approximation est donnée qui montre que l'approximant obtenu converge uniformément vers f sur Σ quand* N $\to \infty$, *pour une vaste classe de fonctions f, la vitesse de convergence étant comparable à celle de la série de Laplace de f.*

Une formule numérique simple et économique est donnée pour le calcul des coefficients.

INTRODUCTION

Soit $f(\theta, \varphi) = f(\mathrm{P})$ une fonction définie et continue de P sur une sphère Σ. Dans de nombreux problèmes de la physique (électromagnétisme, calcul d'antenne, potentiel, ...) on a souvent besoin d'approximer une telle fonction dans une base de fonctions sphériques de Legendre; sur le plan pratique, l'approximation cherchée est en général obtenue par un calcul numérique approché des premiers coefficients de la série de Laplace de f. Dans cet article, on étudie une approximation de $f(\mathrm{P})$ par un polynôme de Laplace de rang N obtenu à partir d'un polynôme trigonométrique d'interpolation fourni par une méthode étudiée dans [9] par l'auteur.

Une majoration de l'erreur d'approximation est donnée qui montre que l'approximant obtenu converge uniformément sur Σ vers f quand $\mathrm{N} \to \infty$, pour une vaste classe de fonctions f, la vitesse de convergence étant comparable à celle de la série de Laplace de f.

---

(1) Institut Universitaire de Technologie, Département Informatique, Nancy.

I. INTERPOLATION TRIGONOMETRIQUE SUR LA SPHERE. RAPPELS

Dans tout ce qui suit, Σ est la sphère de rayon 1 centrée à l'origine des coordonnées. θ et φ sont les coordonnées sphériques habituelles (θ étant la colatitude), $P_0 = (0, \varphi)$ et son antipode $P'_0 = (\pi, \varphi)$ sont les pôles du système.

Soit $f(\theta, \varphi)$ une fonction définie sur Σ sauf peut-être en P_0 et P'_0, les fonctions $f(0, \varphi)$ et $f(\pi, \varphi)$ étant toutefois définies.

$f(\theta, \varphi)$ est définie sur la bande $[0, \pi] \times]-\infty, \infty[$ et est 2π-périodique en φ.

On considère alors le prolongement de f défini par :

$$
(1) \qquad F(\theta, \varphi) = \begin{cases} f(\theta, \varphi) & \text{si} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad \theta \in [0, \pi] \\ f(-\theta, \varphi + \pi) & \text{si} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad \theta \in]-\pi, 0[\\ F \text{ est } 2\pi\text{ - périodique par rapport à } \theta \text{ et à } \varphi \end{cases}
$$

Définition 1 :

On désigne par $\sum^{p,q}(P_0)$ l'espace vectoriel des fonctions $f(\theta, \varphi)$ définies sur Σ et qui sont telles que leur prolongée F au sens de (1) vérifie :

- $\forall$ φ fixé dans $[0, 2\pi]$, $F(\theta, \varphi)$ est une fonction de la seule variable θ, qui appartient à $\tilde{\mathcal{S}}_\infty^{(p)}$ et telle que $\dfrac{\partial^p F}{\partial \theta^p}(\theta, \varphi)$ soit uniformément bornée sur Σ.
- $\forall$ θ fixé dans $[-\pi, \pi]$ F est une fonction de la seule variable φ qui appartient à $\tilde{\mathcal{S}}_\infty^{(q)}$ et telle que $\dfrac{\partial^q F}{\partial \varphi^q}(\theta, \varphi)$ soit uniformément bornée sur Σ.

Dans cette définition et tout ce qui suit, $\mathcal{S}_\infty^{(r)}[a, b]$ désigne, d'après Golomb ([3], p. 5 et 114), l'espace des fonctions f ayant sur $[a, b]$ des dérivées $f', \ldots, f^{(r-1)}$ avec $f^{(r-1)}$ absolument continue, et $f^{(r)}$ mesurable et bornée. Cet espace contient en particulier les fonctions ayant une dérivée d'ordre r continue par morceaux.

$$
\tilde{\mathcal{S}}_\infty^{(r)} = \{ f \in \mathcal{S}_\infty^{(r)}[0, 2\pi] \qquad \text{et} \qquad f \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \}.
$$

Considérons le polynôme trigonométrique des 2 variables θ et φ.

$P_{N,M}(f; \theta, \varphi)$ qui interpole f aux nœuds du réseau rectangulaire

$$
(\theta_i, \varphi_j) = (i\pi/N, j\pi/M) \qquad \text{avec} \qquad i = 0, 1, \ldots N \text{ et } j = 0, 1, \ldots, 2M - 1.
$$

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$(u_n(\theta)) = (1, \sin\theta, \cos\theta, ..., \sin(N-1)\theta, \cos(N-1)\theta, \cos N\theta)$$

et

$$(v_m(\varphi)) = (1, \sin\varphi, \cos\varphi, ... \sin(M-1)\varphi, \cos(M-1)\varphi, \cos M\varphi).$$

L'interpolant $P_{N,M}(f;\ \theta, \varphi)$ s'écrit alors : ([9], 1.2.4.)

$$P_{NM}(f\,;\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{2N-1}{}'' \sum_{m=0}^{2M-1}{}'' \alpha_{n,m}(f)\cdot u_n(\theta)\cdot v_m(\varphi). \tag{2}$$

avec

$$\alpha_{n,m}(f) = \frac{2}{NM}\sum_{j=0}^{2M-1}\sum_{i=1}^{N-1} f(\theta_i,\varphi_j)\cdot u_n(\theta_i)\cdot v_m(\varphi_j) + \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq 0 \\ \dfrac{2}{N}(f(P_0) + (-1)^n f(P_0')) \text{ si } m = 0 \end{cases} \tag{3}$$

avec la notation :

$$\sum_{i=0}^{K}{}'' a_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{K-1} a_i + \frac{a_K}{2} \tag{4}$$

On démontre alors le

Théorème 1 ([9], 1.2.6.1., th. 2) :

Si $f(\theta, \varphi)$ définie sur la sphère Σ appartient à l'espace $\overset{p,q}{\Sigma}(P_0)(p, q \geqslant 1)$ alors l'erreur commise en remplaçant f par le polynôme trigonométrique (2) muni de (3) vérifie :

$$\|f - P_{NM}(f)\|_\Sigma \leqslant \mu_p\left(2 + \frac{2}{\pi}\operatorname{Log} M\right)\left(3 + \frac{2}{\pi}\operatorname{Log} N\right)\frac{\|f_\theta^{(p)}\|_\Sigma}{N^p} + \mu_q\left(3 + \frac{2}{\pi}\operatorname{Log} M\right)\frac{\|f_\varphi^{(q)}\|_\Sigma}{M^q}$$

μ_p et μ_q sont des constantes définies dans [3] (p. 114) et vérifient

$$\mu_0 < \mu_2 < \text{-----} < \frac{4}{\pi} < \text{-----} < \mu_3 < \mu_1\,;\ \mu_0 = 1\,;$$

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2}\,;\ \mu_2 = \frac{\pi^3}{8}\,;\ \mu_3 = \frac{\pi^3}{24};$$

une notation du type $\|f_\theta^{(p)}\|_\Sigma$ désigne $\sup_{P\in\Sigma}\left|\dfrac{\partial^p f(P)}{\partial\theta^p}\right|$

d'où on tire le

Théorème 1 *bis*

Sous les hypothèses du théorème 1, l'interpolant $P_{N,M}(f)$ converge uniformément sur Σ vers f, quand on augmente indéfiniment la densité du réseau de points d'interpolation. De plus, la vitesse de convergence est au moins celle de l'expression $\sup\left(\frac{(\mathrm{Log}\,N)^2}{N^p}, \frac{(\mathrm{Log}\,M)^2}{M^q}\right)$.

II. DEVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SERIE DE LEGENDRE. RAPPELS

Étant donné une fonction $f(x)$ définie sur $[-1, 1]$, on appelle série de Legendre de la fonction f, la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \cdot P_n(x) \tag{5}$$

avec

$$a_n(f) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) \, dx$$

et où $P_n(x)$ est le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre.

On posera :

$$\underset{N}{L}(f\,;x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(f) \cdot P_n(x) \tag{6}$$

On démontre le :

Théorème 2 ([8], t. 2, p. 282 et 288; [2], p. 76) :

Si une fonction $f(x)$ est à variation bornée sur $[-1, 1]$ alors la suite $L_N(f\,;x)$ converge vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ en tout point $x \in]-1, 1[$ et vers $f(\pm 1 \mp 0)$ aux extrémités de cet intervalle. Si, de plus, elle admet une dérivée d'ordre $p \geqslant 1$ et si V_p désigne la variation totale de $f^{(p)}$ sur $[-1, 1]$, on a :

$$|f(x) - \underset{N}{L}(f\,;x)| \leqslant \frac{Q_p V_p}{N^{p-\frac{1}{2}}} \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Q_p ne dépendant que de p; $N \geqslant p$.

$$|f(x) - \underset{N}{L}(f\,;x)| \leqslant \frac{Q_{p,\eta} V_p}{N^p} \qquad -1+\eta \leqslant x \leqslant 1-\eta$$

$Q_{p,\eta}$ ne dépendant que de p et η; $N \geqslant p$.

III. DEVELOPPEMENT SUR LA SPHERE D'UNE FONCTION EN SERIE DE LAPLACE (rappels)

Soient θ, φ les coordonnées sphériques traditionnelles attachées au système ayant pour pôle le point fixe P_0 de Σ (θ est la colatitude).

Soit $M = (\theta, \varphi)$ le point courant de Σ et soit $f(M) = f(\theta, \varphi)$ une fonction définie sur Σ. Soit maintenant $(\chi, \bar{\varphi})$ les coordonnées sphériques attachées au système de pôle M. On appelle série de Laplace de f la série ([8], t. 2, p. 341 et 344).

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) \tag{7}$$

où $Y_n(M) = Y_n(\theta, \varphi)$ est le polynôme de Laplace défini par :

$$Y_n(M) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} P_n(\cos \chi) \cdot G_M(\chi) \sin \chi \, d\chi \tag{8}$$

$G_M(\chi)$ étant la fonction définie par :

$$G_M(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_M(\chi, \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} \tag{9}$$

où $F(\chi, \bar{\varphi})$ est ce que devient $f(\theta', \varphi')$ dans le changement de variables (θ', φ') attachées à $P_0 \rightarrow (\chi, \bar{\varphi})$ attachées a M.

En utilisant la relation ([8], t. 1, p. 168) :

$$P_n(\cos \chi) = 2 \sum_{m=0}^{n}{}' \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \cdot P_n^m(\cos \theta') \cdot \cos m(\varphi' - \varphi)$$

$Y_n(M)$ peut encore s'écrire :

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n}{}' a_{n,m}^{(f)} \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{n} b_{n,m}^{(f)} \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin m\varphi \tag{10}$$

avec

$$\begin{matrix} a_{n,m}^{(f)} \\ (b_{n,m}^{(f)}) \end{matrix} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n^m(\cos \theta') \cdot \begin{matrix} \cos \\ (\sin) \end{matrix} m\varphi' \cdot f(\theta', \varphi') \cdot \sin \theta' \, d\theta' \, d\varphi' \tag{11}$$

Dans ce qui précède, les notations sont les suivantes :

$$\sum_{i=0}^{p}{}' a_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{p} a_i \, ; \; P_n^m(\cos \theta) = (-1)^m \cdot \sin^m \theta \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta)$$

sont les fonctions associées de Legendre de première espèce ([8], t. 1, chap. 2, p. 67). $P_n^{(m)}$ est la dérivée d'ordre m du $n^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre.

On démontre alors le :

Théorème 3 ([8], t. 2, p. 348) :

Soit $f(\theta, \varphi)$ une fonction continue en chaque point $M(\theta, \varphi)$ de Σ.

Soit $V_M(\bar{\varphi})$ la variation totale de f sur le 1/2 grand cercle de longitude $\bar{\varphi}$ dans le système $(M ; \chi, \bar{\varphi})$ joignant M à son antipode M′.

Alors, si $V_M(\bar{\varphi})$ est bornée uniformément par rapport à $\bar{\varphi}$ et à M, la série de Laplace de f converge vers f uniformément sur Σ.

Remarque 1 ([8], t. 2, p. 344, § 106) :

D'après (8), la série de Laplace de f donnée par (7) peut encore s'écrire :

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot G_M(\text{Arcos } x)\, dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot H_M(x)\, dx$$

En comparant à (5) et en remarquant que $P_n(1) = 1$, on voit que (7) n'est autre que la valeur au point $x = 1$ de la série de Legendre de la fonction $H_M(x)$ définie par :

$$(13) \qquad H_M(x) = G_M\,(\text{Arcos } x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_M\,(\text{Arcos } x, \bar{\varphi})\, d\bar{\varphi}$$

Cette constatation est à l'origine de la démonstration du théorème 3.

IV. EXTENSION DES RESULTATS PRECEDENTS

Dans la suite, nous noterons la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de Laplace :

$$(14) \qquad \mathcal{L}_N(f ; M) = \sum_{n=0}^{N} Y_n(\theta ; \varphi)$$

D'après la remarque 1, et avec les notations de (6) et (13), il vient :

$$(15) \qquad \mathcal{L}_N(f ; M) = L_N(H_M ; 1)$$

On peut donc énoncer le théorème suivant qui est une conséquence immédiate du théorème 2 sur les séries de Legendre :

Théorème 4 :

Si la fonction $f(\theta, \varphi)$ définie sur Σ et telle que la fonction $H_M(x)$ définie par (13) appartienne à $\mathcal{S}_\infty^{(p)}[-1, 1]$ et que sa dérivée d'ordre p $\geqslant 1$ soit à variation bornée sur $[-1, 1]$ et de variation totale $V_p(M)$ sur cet intervalle, alors on a :

$$|f(M) - \mathcal{L}_N(f\,; M)| < \frac{Q_p V_p(M)}{N^{p-1/2}}$$

où Q_p ne dépend que de p; $N \geqslant p$;

Dans [8] (t. 2, p. 346), L. Robin montre que pour que $G_M(\chi)$ définie par (9) (resp. $H_M(x)$ définie par (13)) soit à variation bornée sur $[0, \pi)$ (resp. sur $[-1, 1]$, il suffit que la fonction $F_M(\chi, \bar{\varphi})$ soit à variation bornée sur $[0, \pi]$, uniformément par rapport à $\bar{\varphi} \in [0, 2\pi]$.

Nous allons étendre maintenant ce résultat et donner une condition suffisante pour que la fonction $H_M(x)$ admette une dérivée d'ordre p sur $[-1, 1]$. Donnons d'abord la

Définition 2 :

On désigne par $C^{p,q}(P_0)$ l'espace des fonctions $f(P)$ continues de P sur Σ et qui sont telles que :

- $f \in \overset{p,q}{\Sigma}(P_0)$
- $f, \dfrac{\partial^i f}{\partial \theta^i}, \dfrac{\partial^j f}{\partial \varphi^j}$ sont sommables sur Σ, $\forall\, i \leqslant p$ et $\forall\, j \leqslant q$.

On a alors la

Proposition 1 :

Si la fonction f définie sur Σ appartient à l'espace $C^{r,s}(M)$ avec $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, et si $\dfrac{\partial^r F_M}{\partial \chi^r}(\chi, \bar{\varphi})$ est à variation bornée par rapport à $\chi \in [0, \pi]$ de variation totale sur $[0, \pi]$ uniformément bornée par rapport à $\bar{\varphi}$, alors :

1) la fonction $G_M(\chi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F_M(\chi, \bar{\varphi})\, d\bar{\varphi}$ appartient à $\mathcal{S}_\infty^{(r)}[0, \pi]$

$G_M^{(r)}(\chi)$ est à variation bornée sur $[0, \pi]$ et l'intégrale peut être dérivée r fois sous le signe $\int$;

2) la fonction $H_M(x) = G_M$ (Arcos x) est continuement dérivable sur $[-1, 1]$ jusqu'à l'ordre $p \leqslant \dfrac{r-1}{2}$.

Soit $F_M^*(\chi, \bar{\varphi})$ la prolongée de $F_M(\chi, \bar{\varphi})$ au sens de (1) et

$$G_M^*(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_M^*(\chi, \bar{\varphi})\, d\bar{\varphi}$$

Il résulte des hypothèses faites que $F_M^*(\chi, \bar{\varphi})$ appartient, $\forall\ \bar{\varphi}$ fixé dans $[0, 2\pi]$, à $\mathcal{S}_\infty^{(r)}[-\pi, \pi]$ et que $\dfrac{\partial^r F_M^*}{\partial \chi^r}$ est à variation bornée de $\chi \in [-\pi, \pi]$ de variation totale sur $[-\pi, \pi]$ bornée par un nombre V_r indépendant de $\bar{\varphi}$. On a aussi, $\forall\ \bar{\varphi}$ fixé, à cause de la périodicité de F_M^* par rapport à χ,

$F_M^*(\chi, \bar{\varphi}) \in \mathcal{S}_\infty^{(r)}(\Omega)$ où Ω est un ouvert quelconque mais borné, contenant $[0, \pi]$.

Soit Ω un de ces ouverts; on a alors, $\forall\ i \leqslant r - 1$:

- $\forall\ \bar{\varphi}$ fixé dans $[0, 2\pi]$, $\dfrac{\partial^i F_M^*}{\partial \chi^i}$ est continue de χ sur Ω.
- $\forall\ \chi$ fixé dans Ω, $\dfrac{\partial^i F_M^*}{\partial \chi^i}$ est intégrable par rapport à $\bar{\varphi}$ sur $[0, 2\pi]$.
- $\left\| \dfrac{\partial^i F_M^*}{\partial \chi^i} \right\|_\Sigma$ est bornée.

Il en résulte que $\forall\ i \leqslant (r-1)$, $G_M^{*(i)}$ est continue sur Ω (donc sur $[0, \pi]$) ([7], th. 114, p. 718) et que ${}^{*(i)}_{M}(\chi) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^i F_M^*}{\partial \chi^i}(\chi, \bar{\varphi})\, d\bar{\varphi}$, $\forall\ \chi \in \Omega$ ([7], th. 115, p. 721).

Considérons maintenant la fonction

$$G_M^{*(r-1)}(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{r-1} F_M^*}{\partial \chi^{r-1}}\, d\bar{\varphi}$$

- $\dfrac{\partial^{r-1} F_M^*}{\partial \chi^{r-1}}$ admet par hypothèse, une dérivée à droite (resp. à gauche) intégrable par rapport à $\bar{\varphi}$ sur $[0, 2\pi]$
- $\left\| \dfrac{\partial^r F_M^*}{\partial \chi^r} \right\|_\Sigma$ est finie.

Il en résulte, en reprenant point par point la démonstration faite par L. Schwartz du théorème utilisé ci-dessus ([7], th. 115, p. 721), mais en y remplaçant le mot dérivée partielle par dérivée partielle « à droite » (resp. « à gauche ») que $G_M^{*(r-1)}(\chi)$ admet en tout point de Ω une dérivée à droite (resp. à gauche) donnée par :

$$G_M^{*(r)}(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^r F_M^*}{\partial \chi^r}\, d\bar{\varphi}$$

Enfin, $\dfrac{\partial^r F_M}{\partial \chi^r}$ étant à variation bornée de χ, de variation totale sur $[0, \pi]$ uniformément bornée par rapport à $\bar{\varphi}$, il en résulte que $G_M^{*(r)}(\chi)$ est aussi à variation bornée sur $[0, \pi]$ en utilisant les résultats qui suivent immédiatement le théorème 4. Le premier point de la proposition est démontré, puisque $F_M(\chi, \bar{\varphi})$ est la restriction de $F_M^*(\chi, \bar{\varphi})$ à $\chi \in [0, \pi]$. Il résulte maintenant du point précédent et du fait que $\int_0^{2\pi} F_M^*(\chi, \bar{\varphi})\, d\bar{\varphi}$ est une fonction paire (on le vérifie aisément sur (1)) que $G_M^*(\chi)$ admet un développement en série de Fourier trigonométrique ne comportant que des cosinus.

(16)

$$G_M^*(\chi) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \alpha_n \cos n\chi \qquad \text{avec} \qquad |\alpha_n| < \frac{V_r}{\pi n^{r+1}} \quad , \quad n \geqslant 1 \quad ; \qquad ([2]\text{ p. } 50)$$

On vérifie en effet que la variation totale de $\overset{(i)}{G_M^*}(\chi)$ sur un intervalle $[a, b]$ est majorée par la borne supérieure quand $\bar{\varphi}$ balaie $[0, 2\pi]$ de la variation totale à $\bar{\varphi}$ fixé de $\dfrac{\partial^i F_M^*}{\partial \chi^i}(\chi, \bar{\varphi})$ sur le même intervalle, et ceci, $\forall\, i \leqslant r$.

On peut donc écrire, puisque $G_M(\chi)$ est la restriction de G_M^* à $[0, \pi]$:

$$H_M(x) = G_M(\text{Arcos } x) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \alpha_n T_n(x)$$

où $T_n(x)$ est le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev de première espèce.

En dérivant formellement cette série p fois, terme à terme, il vient :

$$\overset{(p)}{\underset{M}{H}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \alpha_n \overset{(p)}{T_n}(x) \tag{17}$$

Or, en vertu de l'inégalité de Markov ([4], p. 125), on a, sur $[-1, 1]$:

$$|\overset{(p)}{\underset{n}{T}}(x)| < n^2(n-1)^2 \ldots (n-p+1)^2 \sup_x |T_n(x)| \leqslant n^{2p}$$

On a donc, sous les hypothèses faites

$$|\alpha_n T_n^{(p)}| \leqslant \frac{V_r}{\pi n^{r+1-2p}}$$

L'hypothèse $r \geqslant 2p + 1$ impliquant la convergence absolue donc uniforme de la série (16) sur $[-1, 1]$, il résulte que $H_M(x)$ est p fois continuement dérivable sur $[-1, 1]$ et donc que $H_M^{(p)}$ est bornée.

Nous allons maintenant démontrer le

Théorème 5 :

Si $\forall$ M $\in \Sigma$ la fonction f définie sur Σ est telle que $F_M \in C^{r, r}_{(M)}$, $(r \geqslant 2)$, $\dfrac{\partial^r F^*_M}{\partial \chi^r}(\chi, \bar{\varphi})$ étant à variation bornée de $\chi \in [-\pi, \pi]$, de variation totale sur $[-\pi, \pi]$ uniformément bornée par rapport à $\bar{\varphi} \in [0, 2\pi]$ et à M par un nombre V_r, alors il existe une constante Q ne dépendant que de f et de r telle que :

$$\|f - \mathcal{L}_N(f)\| < \frac{Q}{(N-1)^{r-3/2}} \qquad (N \geqslant 2)$$

$F^*_M(\chi, \bar{\varphi})$ est la prolongée au sens de (1) de la fonction $F_M(\chi, \bar{\varphi})$ définie en (9). Ce résultat s'obtient en majorant le terme général $Y_n(M)$ de la série de Laplace de f, donnée par (7). D'après (8), on a :

$$Y_n(M) = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_n(\cos\chi)\cdot G_M(\chi)\cdot\sin\chi\, d\chi$$

D'après la proposition précédente, on peut développer $G_M(\chi)$ en série de cosinus de type :

$$G_M(\chi) = {\sum_{p=0}^{\infty}}' \alpha_p \cos p\chi \qquad \text{avec} \qquad |\alpha_p| < \frac{V_r}{\pi p^{r+1}}$$

En portant dans Y_n et en intégrant terme à terme, ce qui est loisible en vertu de la convergence uniforme de la série ${\sum_{p=0}^{\infty}}' \alpha_p \cos p\chi \cdot \sin\chi \cdot P_n(\cos\chi)$ il vient :

$$Y_n(M) = \frac{2n+1}{2}{\sum_{p=0}^{\infty}}' \alpha_p \int_0^\pi P_n(\cos\chi)\cdot\cos p\chi\cdot\sin\chi\cdot d\chi$$

Or, $\displaystyle\int_0^\pi P_n(\cos\chi)\cdot\cos p\chi\cdot\sin\chi\, d\chi = \int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot T_p(x)\cdot dx = 0 \quad \forall\, p < n$
en vertu de l'orthogonalité sur $[-1, 1]$ d'un polynôme de Legendre à tout polynôme de degré moindre, donc à tout polynôme de Tchebychev de première espèce, $T_p(x)$, de degré $p < n$. On peut donc écrire :

$$Y_n(M) = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi\left(\sum_{p=n}^{\infty}\alpha_p\cos p\chi\right)\cdot P_n(\cos\chi)\cdot\sin\chi\cdot d\chi$$

On connaît le résultat ([2], p. 52) donnant une majoration du reste de la série de Fourier de $G_M(\chi)$:

$$\left|\sum_{p=n}^{\infty}\alpha_p\cos p\chi\right| < \frac{2V_r}{r\pi}\cdot\frac{1}{(n-1)^r} \qquad (r \geqslant 1\,;\, n \geqslant 2)$$

D'où la majoration uniforme sur Σ

$$\|Y_n(M)\|_\Sigma < \frac{V_r \cdot (2n+1)}{r \cdot \pi \cdot (n-1)^r} \int_{-1}^{1} |P_n(x)| \, dx \qquad (r \geqslant 1 \,;\, n \geqslant 2)$$

Soit maintenant $W_n(x) = \int_{-1}^{x} P_n(t) \, dt = \dfrac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1}$ ([8], t. 2, p. 310) et x_1, x_2, ..., x_n les n zéros de P_n. Il vient alors, en remarquant que $W_n(1) = W_n(-1) = 0$ et que les x_i sont les zéros de $W_n'(x)$

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)| \, dx = 2 \sum_{i=1}^{n} |W_n(x_i)|$$

On connaît par ailleurs l'inégalité de Stieltjes ([6], p. 172 et [8], t. 2, p. 273).

$$|P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)| < \frac{C}{\sqrt{n}} \quad , \quad \text{C étant une constante fixe.}$$

Il vient donc finalement :

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)| \, dx < \frac{2C\sqrt{n}}{2n+1}$$

D'où la majoration uniforme, en remarquant que $(n/(n-1))^{1/2} < \dfrac{3}{2}$ pour $n \geqslant 2$:

$$\|Y_n(M)\| < \frac{3CV_r}{r\pi} \cdot \frac{1}{(n-1)^{r-1/2}}$$

On obtient enfin :

$$\|f - \underset{N}{\mathcal{L}}(f)\|_\Sigma = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} Y_n(M) \right\|_\Sigma \leqslant \frac{3CV_r}{r\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{r-1/2}}$$

$$< \frac{3CV_r}{r\pi} \int_{N}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{r-1/2}}$$

Soit encore :

$$\|f - \underset{N}{\mathcal{L}}(f)\|_\Sigma < \frac{6CV_r}{\pi r(2r-3)} \frac{1}{(n-1)^{r-3/2}}$$

C'est le résultat cherché en posant $Q = \dfrac{6CV_r}{\pi r(2r-3)}$

V. NORME DE L'OPERATEUR DE LAPLACE, $\mathcal{L}_N(f)$

D'après ([8], t. 2, p. 289), la formule (15) peut encore s'écrire :

$$\underset{N}{\mathcal{L}}(f\,;\mathrm{M}) = \underset{N\ \ M}{\mathrm{L}(\mathrm{H}\,;1)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\underset{N}{\mathrm{P}'(t)} + \underset{N+1}{\mathrm{P}'(t)})\underset{M}{\mathrm{H}(t)}\,dt$$

d'où, en revenant à la définition (13) de $H_M(t)$, la majoration uniforme sur Σ :

$$|\underset{N}{\mathcal{L}}(f\,;\mathrm{M})| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\Sigma \int_{-1}^{1}|\underset{N}{\mathrm{P}'(t)} + \underset{N+1}{\mathrm{P}'(t)}|\,dt \tag{18}$$

où $P_N(x)$ est le $N^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre.

On a alors la

Proposition 2 :

P_n' étant la dérivée du $n^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre, on a :

$$\int_{-1}^{1}|P_n'(t)|\,dt < 2\left(1 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n-2}\right) \qquad \forall\, n \geqslant 3$$

Posons

$$I_n = \int_{-1}^{1}|P_n'(t)|\,dt = \int_0^\pi \left|\frac{d}{d\theta}(P_n(\cos\theta))\right| d\theta$$

Soient $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ les racines de $P_n(\cos\theta)$ et $\theta_1' < \theta_2' < \dots < \theta_{n-1}'$ les racines de $\dfrac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)$ comprises entre 0 et π :

On sait qu'alors :

$$0 < \theta_1 < \theta_1' < \theta_2 < \theta_2' < \dots < \theta_{n-1}' < \theta_n < \pi \tag{19}$$

Avec ces notations, il vient, puisque $|P_n(-1)| = P_n(1) = 1$

$$I_n = 2\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1}|P_n(\cos\theta')|\right)$$

ce qui s'écrit encore, compte tenu de la symétrie des θ_i et θ_i' par rapport à $\pi/2$

$$I_n = \begin{cases} 2\left(1 + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{(n-2/)2}|P_n(\cos\theta_i')| + |P_n(0)|\right) & (n \text{ pair}) \\ 2\left(1 + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{(n-1/)2}|P_n(\cos\theta_i')|\right) & (n \text{ impair}) \end{cases} \tag{20}$$

Considérant maintenant le résultat de Bernstein ([6], p. 165)

$$(20\ bis) \qquad |P_n(\cos\theta)| < \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} \qquad 0 < \theta < \pi$$

et celui de Stieltjes ([6], p. 122, th. 6.2.1.3.) : $\frac{(2i-1)\pi}{2n} < \theta_i$ et utilisant la relation :

$$\frac{2\theta_i}{\pi} < \frac{2\theta'_i}{\pi} < \sin\theta'_i \qquad 0 < \theta'_i < \frac{\pi}{2}$$

On obtient aisément la majoration

$$\left|P_n(\cos\theta'_i)\right| < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2i-1}}$$

d'où, en portant dans (20), remarquant que $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2_i - 1}} < \sqrt{2p-1}$ et utilisant (20 *bis*) pour $|P_n(0)|$,

$$\left|\begin{array}{ll} I_n < 2\left(1 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n-3} + \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\right) & (n \text{ pair}) \\ I_u < 2\left(1 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n-2}\right) & (n \text{ impair}) \end{array}\right.$$

Un calcul élémentaire montre que la majoration pour n impair est encore vraie pour n pair $\geqslant 2$ et achève la démontration de la proposition.

Enfin, utilisant la proposition 2 pour majorer (18), on obtient immédiatement le

Théorème 6 :

Si $f(M)$ est une fonction du point $M \in \Sigma$ alors $\mathfrak{L}_N(f\,; M)$ étant l'opérateur de Laplace défini par (14), on a :

$$|\underset{N}{\mathfrak{L}}(f\,; M)| < \left(2 + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{N-1}\right)\|f\|_\Sigma$$

d'où

$$\|\mathfrak{L}_N\| < 2 + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{N-1}$$

VI. APPROXIMATION DE f PAR LE POLYNOME DE LAPLACE $\mathcal{L}_N(P_{N,M}(f)\,;\,M)$

Soient $\mathcal{L}_K(f\,;\,M')$ le polynôme de Laplace défini en (14) et $P_{N,M}(f\,;\,\theta,\varphi)$ le polynôme trigonométrique d'interpolation de f sur Σ et défini par (2) et (3). M' est ici le point courant de Σ.

Considérons l'approximation

$$(21)\qquad f(\theta,\varphi) = \underset{K}{\mathcal{L}}(\underset{N,M}{P}(f)\,;\,\theta,\varphi) + \underset{N,M,K}{E}(f\,;\,\theta,\varphi) \qquad (K \leqslant \inf(N, M))$$

On a alors :

$$\|\underset{N,M,K}{E}(f)\|_\Sigma = \|f - \underset{K}{\mathcal{L}}(\underset{N,M}{P}(f))\|_\Sigma \leqslant \|f - \underset{K}{\mathcal{L}}(f)\|_\Sigma + \|\underset{K}{\mathcal{L}}(f - \underset{N,M}{P}(f))\|_\Sigma$$

d'où, en notant maintenant $\|\cdot\|_\Sigma = \|\cdot\|$:

$$(22)\qquad \|E_{N,M,K}\| \leqslant \|f - \underset{K}{\mathcal{L}}(f)\| + \|\mathcal{L}_K\|\,\|f - \underset{N,M}{P}(f)\|$$

On a alors le :

Théorème 7 :

Soit P le pôle des coordonnées sphériques θ, φ et $f(\theta, \varphi)$ une fonction continue du point (θ, φ) sur Σ.

Si $f \in C^{p,q}(P)$ $(p \geqslant 1\,;\,q \geqslant 1)$ et si elle admet un développement en série de Laplace uniformément convergent sur Σ, alors la série de Laplace tronquée à l'ordre K du polynôme trigonométrique $P_{N,M}(f)$ de type (2) muni de (3) qui interpole f sur Σ converge uniformément vers f sur Σ quand K tend vers l'infini en respectant la relation $K \leqslant \inf(N, M)$.

Soit donné $\varepsilon > 0$. Alors $\exists\, K_1$ tel que $K > K_1 \Rightarrow \|f - \underset{K}{\mathcal{L}}(f)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Par ailleurs, le théorème 1 *bis* permet d'affirmer qu'il existe un nombre Q ne dépendant que de f et un entier K_2 tels que :

$$\inf(N, M) > K_2 \Rightarrow \|f - \underset{N,M}{P}(f)\| < Q \cdot \max\left(\frac{(\operatorname{Log} N)^2}{N}, \frac{(\operatorname{Log} M)^2}{M}\right)$$

et puisque la fonction $(\operatorname{Log} x)^2/x$ est décroissante sur $[e^2, \infty[$,

$$8 \leqslant K_2 < K \leqslant \inf(N, M) \Rightarrow \|f - \underset{N,M}{P}(f)\| < \frac{Q\,(\operatorname{Log} K)^2}{K}$$

d'où, en utilisant le théorème 11 :

$$8 \leqslant K_2 < K \leqslant \inf(N, M) \Rightarrow \|\mathcal{L}_K\| \, \|f - P(f)\|_{N,M}$$
$$< \frac{Q\,(\operatorname{Log} K)^2}{K} \cdot \left(2 + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{K-1}\right) = C$$

Or, on peut évidemment trouver un entier K_3 tel que $K > K_3 \Rightarrow C < \frac{\varepsilon}{2}$.

On peut donc finalement écrire, en utilisant (22)

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists\, K' = \sup(K_1, K_2, K_3)$$

tel que

$$K' < K \leqslant \inf(N, M) \Rightarrow \|f - \mathcal{L}_K(P_{N,M})\| < \varepsilon$$

On peut encore énoncer le

Théorème 8 :

Soit P_0 le pôle des coordonnées sphériques (θ, φ) et $f(\theta, \varphi)$ une fonction continue du point (θ, φ) sur Σ.

Soit $\chi, \bar{\varphi}$ les coordonnées sphériques associées au système de pôle $P = (\theta, \varphi)$. Soit M' le point courant de Σ, de coordonnées (θ', φ') dans le système de pôle P_0 et $\chi, \bar{\varphi}$ dans le système de pôle P. On note

$$F_P(\chi, \bar{\varphi}) = f(\theta', \varphi').$$

Si $\forall P \in \Sigma$, $F_P(\chi, \bar{\varphi}) \in C^{r,r}(P)$, $\dfrac{\partial^r F_P}{\partial \chi_r}$ étant à variation bornée de $\chi \in [0, \pi]$, de variation totale sur $[0, \pi]$ uniformément bornée par rapport à $\bar{\varphi} \in [0, 2\pi]$ et à P, alors il existe deux constantes Q et Q' ne dépendant que de f et de r telles que

1) $$\|f - \mathcal{L}_K(P_{N,M}(f))\| < \|f - \mathcal{L}_K(f)\|$$
$$+ Q\left(2 + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{K-1}\right) \max\left(\frac{(\operatorname{Log} N)^2}{N^r}, \frac{(\operatorname{Log} M)^2}{M^r}\right)$$

2) $$\|f - \mathcal{L}_K(f)\| < \frac{Q'}{(K-1)^{r-3/2}}$$

Le premier point est la conséquence immédiate de la formule (22), du théorème 1 *bis* et du théorème 6. Le second point est un rappel du théorème 5.

VII. QUADRATURE INDUITE PAR L'APPROXIMATION DE f PAR $\mathcal{L}_K(P_{NM}(f))$

$\mathcal{L}_K(P_{N,M})$ est définie par (14) munie de (10), dans lesquelles on fait $N = K$ et $f = P_{N,M}$. Intégrant sur Σ et remarquant que toutes les intégrales du type $\iint_\Sigma P_n^m(\cos\theta)\cdot\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(m\varphi)\cdot d\sigma$ sont nulles sauf pour $m = n = 0$, il vient :

$$\iint_\Sigma \underset{K}{\mathcal{L}}(\underset{NM}{P}(f))\, d\sigma = 2\pi a_{0,0}(P_{NM})$$

Soit encore, d'après (11) :

$$\iint_\Sigma \underset{K}{\mathcal{L}}(\underset{NM}{P}(f))\, d\sigma = \iint_\Sigma \underset{NM}{P}(f)\, d\sigma$$

Il en résulte que la quadrature induite par l'approximation de f par $\mathcal{L}_K(P_{N,M}(f))$ est identique à celle induite par l'interpolation de f par $P_{N,M}(f)$ et étudiée aux paragraphes 1.2.5 et 1.2.6 dans [9].

VIII. CALCUL PRATIQUE DU POLYNOME DE LAPLACE $\mathcal{L}_K(P_{NM}(f))$

Le polynôme $\mathcal{L}_K(P_{N,M}(f))$ peut encore s'écrire, en utilisant (14) et (10)

$$\underset{K}{\mathcal{L}}(\underset{NM}{P}(f)) = \sum_{n=0}^{K} Y_n(\theta, \varphi)$$

avec

$$Y_n(\theta, \varphi) = {\sum_{m=0}^{n}}' A_{n,m}(f) P_n^m(\cos\theta)\cdot\cos m\varphi + \sum_{m=1}^{n} B_{n,m}(f)\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\sin m\varphi$$

Les coefficients $A_{n,m}(f)$ et $B_{n,m}(f)$ étant obtenus en remplaçant dans (11) la fonction $f(\theta', \varphi')$ par $P_{N,M}(f;\, \theta', \varphi')$.

Il reste à expliciter une formule numérique permettant le calcul effectif de ces coefficients à partir des valeurs de f au points

$$(\theta_i, \varphi_j) = (i\pi/N, j\pi/M)(i = 0, 1, \ldots, N\, ; j = 0, 1, \ldots, 2M - 1)$$

D'après (11), il vient :

$$\begin{matrix}A_{n,m}(f)\\ (B_{n,m})\end{matrix} = \frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)\cdot\sin\theta\cdot\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos\\ (\sin)\end{matrix}\, m\varphi\cdot \underset{NM}{P}(f;\theta,\varphi)\, d\varphi\right) d\theta$$

On sait que l'intégrale figurant dans (...) est une fonction ayant la parité de m. Elle s'écrit encore en utilisant un développement classique :

$$(\ldots) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{2M-1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{(\sin)} m\varphi_j \cdot P_{NM}(f\,;\theta, \varphi_j) \qquad (\varphi_j = j\pi/M)$$

Soit $\mathcal{L}_k^N(\theta)$ le $k^{\text{ème}}$ polynôme trigonométrique de Lagrange relatif à l'interpolation en θ; il vient, alors, en rappelant que $P_{NM}(f;\theta_k, \varphi_j) = f(\theta_k, \varphi_j)$ en $\theta_k = k\pi/N$ ($k = 0, 1, \ldots, N$) et $f(\theta_k, \varphi_j + \pi)$ en $-\theta_k = -k\pi/N$:

$$P_{NM}(f\,;\theta, \varphi_j) = \sum_{k=-N+1}^{N} P_{N,M}(\theta_k, \varphi_j) \cdot \mathcal{L}_k^N(\theta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} f(\theta_k, \varphi_j) \cdot \mathcal{L}_k^N(\theta) + \sum_{k=1}^{N-1} f(\theta_k, \varphi_j + \pi) \cdot \mathcal{L}_{-k}^N(\theta)$$

On vérifie aisément que $\mathcal{L}_{-k}^N(\theta) = \mathcal{L}_k^N(-\theta)$, il vient donc :

$$(\ldots) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{N} \mathcal{L}_k^N(\theta) \sum_{j=0}^{2M-1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{(\sin)} m\varphi_j \cdot f(\theta_k, \varphi_j)$$
$$+ \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{L}_k^N(-\theta) \sum_{j=0}^{2M-1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{(\sin)} m\varphi_j \cdot f(\theta_k, \varphi_j + \pi)$$

d'où, en utilisant le fait que

$$\sum_{j=0}^{2M-1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} m\varphi_j \cdot f(\theta_k, \varphi_j + \pi) = (-1)^m \sum_{j=0}^{2M-1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} m\varphi_j \cdot f(\theta_k, \varphi_j)$$

puisque f est 2π-périodique en φ, et en notant que

$$f(0, \varphi_j) = f(P_0) \text{ et } f(\pi, \varphi_j) = f(P'_0)$$

$$(\ldots) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{2M-1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{(\sin)} m\varphi_j \cdot f(\theta_k, \varphi_j) \cdot \{ \mathcal{L}_k^N(\theta) + (-1)^m \mathcal{L}_k^N(-\theta) \}$$
$$+ \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } m \neq 0 \\ h \text{ si } m = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$h = 2(f(P_0) \cdot \mathcal{L}_0^N(\theta) + f(P'_0) \cdot \mathcal{L}_N^N(\theta))$$

Remarquant enfin que $\mathcal{L}_0^N(\theta)$ et $\mathcal{L}_N^N(\theta)$ sont des polynômes trigonométriques pairs, on obtient, avec une notation plus condensée :

$$(\ldots) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{N}{}'' \sum_{j=0}^{2M-1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{(\sin)} m\varphi_j \cdot f(\theta_k, \varphi_j) \cdot \{ \mathcal{L}_k^N(\theta) + (-1)^m \mathcal{L}_k^N(-\theta) \}$$

On a donc :

$$(23)\quad \begin{matrix} A_{n,m}(f) \\ (B_{n,m}) \end{matrix} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2M(n+m)!} \sum_{k=0}^{N}{}'' \sum_{j=0}^{2M-1} f(\theta_k, \varphi_j) \cdot \int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) \cdot \{ \mathcal{L}_k^N(\theta) + (-1)^m \mathcal{L}_k^N(-\theta) \} \sin\theta \cdot d\theta \cdot \begin{matrix}\cos \\ (\sin)\end{matrix} m\varphi_j$$

et on est ramené au calcul d'intégrales du type :

$$(24)\quad I_{n,m,k}^N = \int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) \cdot \{ \mathcal{L}_k^N(\theta) + (-1)^m \mathcal{L}_k^N(-\theta) \} \cdot \sin\theta \cdot d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} P_n^m(\cos\theta) \cdot \mathcal{L}_k^N(\theta) \cdot |\sin\theta| \, d\theta \quad (0 \leqslant k \leqslant N)$$

Posons $\Phi_k = P_n^m(\cos\theta) \cdot \mathcal{L}_k^N(\theta)$. C'est un polynôme trigonométrique de rang $(N + n) \leqslant 2N$ puisqu'on ne s'intéresse au développement de Laplace de $P_{N,M}$ que jusqu'à l'ordre $n \leqslant K \leqslant \inf(N, M)$. Il admet un développement de la forme

$$\Phi_k(\theta) = \sum_{p=0}^{2N}{}'' \alpha_p \cos p\theta + \sum_{p=1}^{2N} \beta_p \sin p\theta$$

et on peut écrire :

$$I_{n,m,k}^N = \sum_{p=0}^{2N}{}'' \alpha_p \int_{-\pi}^{\pi} \cos p\theta \cdot |\sin\theta| \cdot d\theta = 4 \sum_{p=0}^{N}{}'' \frac{\alpha_{2p}}{1 - 4p^2}$$

La formule (1) donnée dans [9] (1.1) permet d'obtenir, en y remplaçant N par 2N et en remarquant que dans (1) l'opérateur $a_n^N(f)$ est linéaire et s'annule pour $f = \sin N\theta$:

$$\alpha_{2p} = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{4N-1} \Phi_k(\theta_i') \cdot \cos 2p\theta_i' = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{2N}{}'' \cos 2p\theta_i' \cdot (\varphi_k(\theta_i') + \varphi_k(-\theta_i'))$$

avec $\theta_i' = i\pi/2N$.

d'où, tous calculs effectués :

$$I_{n,m,k}^N = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{2N}{}'' \{ \Phi_k(\theta_i') + \Phi_k(-\theta_i') \} \cdot \sum_{p=0}^{N}{}'' \frac{\cos 2p\theta_i'}{1 - 4p^2}$$

Mais on vérifie que

$$\Phi_k(\theta_i') + \Phi_k(-\theta_i') = 0 \text{ en } \theta_i' = 0, \frac{\pi}{N}, \ldots, \frac{(k-1)\pi}{N}, \frac{(k+1)\pi}{N}, \ldots, \pi,$$

c'est-à-dire pour i pair et différent de $2k$, et vaut $P_n^m(\cos\theta'_{2k})$ pour $i = 2k$. On a donc :

$$I_{n,m,k}^{N} = \frac{2}{N}\left\{\sum_{i=0}^{N-1}(\Phi_k(\theta'_{2i+1}) + \Phi_k(-\theta'_{2i+1}))H_{2i+1}^{2N} + H_{2k}^{2N}\cdot P_n^m(\cos(k\pi/N))\right\}$$

où l'on note :

$$H_i^{2N} = \sum_{p=0}^{N}{}'' \frac{\cos(pi\pi/N)}{1-4p^2} \qquad \text{si } i \neq 0 \text{ et } 2N\,;$$

$$H_i^{2N} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{N}{}'' \frac{1}{1-4p^2} \qquad \text{si } i = 0 \text{ et } i = 2N\,;$$

On a donc finalement, en portant ces résultats dans (23) :

$$\begin{matrix} A_{n,m}(f) \\ (B_{n,m}) \end{matrix} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{MN(n+m)!}\sum_{k=0}^{N}{}''\sum_{j=0}^{2M-1} f(\theta_k,\varphi_j)\cdot\begin{matrix}\cos\\(\sin)\end{matrix}\, m\varphi_j\cdot C_{n,m,k}^{N}$$

avec

$$C_{n,m,k}^{N} = \sum_{i=0}^{N-1} P_n^m(\cos\theta'_{2i+1})(\mathcal{L}_k^N(\theta'_{2i+1}) + (-1)^m\mathcal{L}_k^N(-\theta'_{2i+1}))\cdot H_{2i+1}^{2N} + H_{2k}^{2N}\cdot P_n^m(\cos k\pi/N)$$

$$\mathcal{L}_k^N(\theta) = \frac{1}{2N}\sin N(\theta-\theta_k)\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right) \qquad ([1],\ \text{p. } 486)$$

$$\theta_k = k\pi/N\,;\ \varphi_j = j\pi/M\,;\ \theta'_i = i\pi/2N.$$

Ces formules étant valables pour $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \inf(N, M)$.

Remarque 2 :

Le changement de variable $x = \cos\theta$ transforme la 1^{re} intégrale de (24) en une intégrale sur $[-1, 1]$ d'un polynôme de degré $\leqslant 2N$ qui peut donc être calculée exactement par la méthode de Gauss classique de $d^o N$; ce résultat nécessite le calcul de la fonction $(\Phi_k(\theta) + \Phi_k(-\theta))$ en $N+1$ points, tout comme dans la méthode décrite ci-dessus. Cette dernière a cependant l'avantage de faire intervenir des points et des poids H_i^{2N}. d'un calcul très simple et très stable, même pour de très grandes valeurs de N.

On pouvait enfin envisager le calcul de (24) par méthode algébrique, mais nous n'avons pas su trouver à partir des formules connues permettant d'obtenir les coefficients du développement de $P_n^m(\cos\theta)$, une expression plus simple et moins onéreuse que celle ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. QUADE, *Abschäßungen zur trigonometrischen Interpolation*, Deutsche Mathematik, 5 (1940), p. 482 à 512.

[2] D. JACKSON, *The theory of Approximation*, American Mathematical Society, 1930.

[3] M. GOLOMB, *Lectures on theory of Approximation*, Argonne National Laboratory, 1962.

[4] J. P. NATANSON, *Konstruktive Funktionentheorie*, Akademie, Verlag Berlin, 1955.

[5] C. de LA VALLÉE POUSSIN, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris, Gauthiers-Villars, 1919.

[6] G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society Colloquium publications, vol. XXIII, 1939.

[7] L. SCHWARTZ, *Cours d'Analyse*, tome 1, Hermann, 1967.

[8] L. ROBIN, *Fonctions sphériques de Legendre et Fonctions sphéroïdales*, tomes 1 et 2, Collection technique et scientifique du C.N.E.T., Paris, Gauthiers-Villars, 1958.

[9] G. TISSIER, *Interpolation à plusieurs variables sur la sphère, dans le disque et dans la sphère*. A paraître dans la Revue Numerische Mathematik.