

J. BARANGER

M. DUC-JACQUET

**Brève communication. Matrices tridiagonales
symétriques et matrices factorisables**

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, n° R3 (1971), p. 61-66

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_61_0

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Brèves communications

MATRICES TRIDIAGONALES SYMETRIQUES ET MATRICES FACTORISABLES

par J. BARANGER ⁽¹⁾ et M. DUC-JACQUET ⁽¹⁾

Sommaire. — *Les matrices factorisables, c'est-à-dire telles que*

$$M = (m_{ij}) \begin{cases} m_{ij} = a_i b_j & i \leq j \\ m_{ij} = m_{ji} & \end{cases} \quad a = (a_1, \dots, a_n) \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

ont une inverse tridiagonale calculable explicitement.

Réciproquement, les matrices tridiagonales symétriques ont une inverse factorisable, les vecteurs a et b pouvant être obtenus par un algorithme utilisant $6 \times n$ multiplications-divisions environ.

Les matrices factorisables et les matrices tridiagonales symétriques peuvent constituer deux classes intéressantes de matrices test.

1° Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ nombres réels (ou complexes) tels que

$$(1.1) \quad a_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$(1.2) \quad b_n \neq 0$$

et si l'on pose $v_i = \frac{b_i}{a_i}$

$$(1.3) \quad v_{i+1} \neq v_i \quad i = 1, \dots, n-1.$$

(1) Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Grenoble.

Définition

On appelle matrice factorisable toute matrice de la forme :

$$(1.4) \quad M = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 b_n & a_2 b_n & \dots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire telle que

$$m_{ij} = a_i b_j \quad \text{pour } j \geq i$$

et

$$m_{ji} = m_{ij}$$

Les conditions (1.1) (1.2) et (1.3) sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que M soit régulière. En effet :

$$(1.5) \quad M = DL^t \Lambda LD$$

où

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & a_{n-1} \\ & & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ 1 & & & & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 & & & & \\ & v_2 - v_3 & & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & & v_{n-1} - v_n \\ & & & & & v_n \end{pmatrix}$$

Théorème 1

Soit M une matrice factorisable inversible (i.e. vérifiant (1.1) à (1.4)).

Son inverse est la matrice tridiagonale

$$(1.6) \quad N = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

avec

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{a_2}{a_1} \frac{1}{\mu_{1,2}} \\ \alpha_i &= \frac{\mu_{i-1,i+1}}{\mu_{i-1,i} \mu_{i,i+1}} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \alpha_n &= -\frac{b_{n-1}}{b_n} \frac{1}{\mu_{n-1,n}} \\ \beta_i &= \frac{1}{\mu_{i,i+1}} \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

avec

$$\mu_{i,j} = a_i a_j (v_j - v_i).$$

Démonstration immédiate en utilisant (1.5).

2° On ne peut pas donner des formules aussi simples que (1.7) pour l'inversion de (1.6) mais on a

Théorème 2

Soit N une matrice tridiagonale symétrique, régulière, de la forme (1.6) telle que

$$(2.1) \quad \beta_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, n-1$$

Son inverse est une matrice factorisable définie par (1.4) où

$$(2.2) \quad \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_p &= (-1)^{p-1} \frac{D_{p-1}}{\beta_{p-1} \dots \beta_1} \quad p = 2, \dots, n \\ b_1 &= \frac{D'_n}{D_n} \\ b_p &= \frac{(-1)^{p-1}}{\beta_{p-1} \dots \beta_1} \left(\frac{D'_n}{D_n} D_{p-1} - D'_{p-1} \right) \quad p = 2, \dots, n \end{aligned}$$

avec

$$D_p = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & 0 \\ \beta_1 & & & \\ & & & \\ 0 & & \beta_{p-1} & \alpha_p \end{pmatrix} \quad p = 1, \dots, n$$

$$D'_p = \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & & 0 \\ \beta_2 & & & \\ & & & \\ 0 & & \beta_{p-1} & \alpha_p \end{pmatrix} \quad p = 2, \dots, n$$

Démonstration au paragraphe suivant.

3° Donnons un algorithme de calcul de N^{-1} .

On cherche cet inverse sous la forme M de (1.4).

La relation $NM = I$ donne les équations

$$(3.1) \quad \begin{cases} \alpha_1 a_1 b_1 + \beta_1 a_1 b_2 = 1 \\ \alpha_1 a_1 b_p + \beta_1 a_2 b_p = 0 \end{cases} \quad p = 2, \dots, n$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \beta_{q-1} a_{q-1} b_p + \alpha_q a_q b_p + \beta_q a_{q+1} b_p = 0 & q < p \\ \beta_{q-1} a_{q-1} b_q + \alpha_q a_q b_q + \beta_q a_q b_{q+1} = 1 \\ \beta_{q-1} a_p b_{q-1} + \alpha_q a_p b_q + \beta_q a_p b_{q+1} = 0 & q > p \end{cases}$$

(pour ces trois relations p et q sont compris entre 2 et $n-1$)

$$(3.3) \quad \begin{cases} \beta_{n-1} a_p b_{n-1} + \alpha_n a_p b_n = 0 \\ \beta_{n-1} a_{n-1} b_n + \alpha_n a_n b_n = 1. \end{cases} \quad p = 1, \dots, n-1$$

Lemme : Le système (3.1) à (3.3) est équivalent à

$$(3.4) \quad \begin{cases} a_1(\alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2) = 1 \\ \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 = 0 \end{cases}$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} \beta_{q-1} b_{q-1} + \alpha_q b_q + \beta_q b_{q+1} = 0 \\ \beta_{q-1} a_{q-1} + \alpha_q a_q + \beta_q a_{q+1} = 0 \end{cases} \quad q = 2, \dots, n-1$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} \beta_{n-1}b_{n-1} + \alpha_n b_n = 0 \\ b_n(\beta_{n-1}a_{n-1} + \alpha_n a_n) = 1. \end{cases}$$

Démonstration : Évidemment (3.1) équivaut à (3.4), (3.3) à (3.6) et (3.2) implique (3.5).

Reste à vérifier que les solutions de (3.4), (3.5), (3.6) vérifient la deuxième relation de (3.2). On pose

$$a_1 = 1, \quad b_1 \text{ arbitraire}$$

et on montre par récurrence que

$$(3.7) \quad \begin{cases} a_p = \frac{(-1)^{p-1}}{\beta_{p-1} \dots \beta_1} D_{p-1} & p = 2, \dots, n \\ b_p = \frac{(-1)^{p-1}}{\beta_{p-1} \dots \beta_1} (b_1 D_{p-1} - D'_{p-1}) & p = 2, \dots, n \end{cases}$$

Utilisant enfin la première relation (3.6) on obtient

$$b_1 = \frac{D'_n}{D_n}$$

La deuxième relation (3.2) se ramène à

$$\beta_{q-1}(a_{q-1}b_q - a_q b_{q-1}) = 1$$

que l'on transforme par (3.7) en

$$\beta_{q-1}(D_{q-2}D'_{q-1} - D_{q-1}D'_{q-2}) = (\beta_{q-2} \dots \beta_1)^2$$

qui se vérifie facilement par récurrence grâce aux relations

$$(3.8) \quad \begin{cases} D_q = \alpha_q D_{q-1} - \beta_{q-1}^2 D_{q-2} & q \geq 3 \\ D'_q = \alpha_q D'_{q-1} - \beta_{q-1}^2 D'_{q-2} & q \geq 4 \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration du lemme et du théorème 2.

Description de l'algorithme d'inversion de N

Il est tiré de (3.4) à (3.6)

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} a_1 \\ a_{q+1} = \frac{-\alpha_q a_q - \beta_{q-1} a_{q-1}}{\beta_q} & q = 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{\beta_{n-1}a_{n-1} + \alpha_n a_n} \\ b_{n-1} = -\frac{\alpha_n}{\beta_{n-1}} b_n \\ b_{q-1} = \frac{-\alpha_q a_q - \beta_q b_{q+1}}{\beta_{q-1}} \end{cases} \quad q = n-1, \dots, 2$$

Coût du calcul de a, b

$6n - 5$ multiplications-divisions

$2n - 1$ additions.

On obtient les deux vecteurs a et b de R^n qui « factorisent » N^{-1} . Pour avoir explicitement N^{-1} il reste à effectuer $\frac{n(n+1)}{2}$ multiplications.

Ainsi N^{-1} peut être mémorisée à l'aide de $2n$ mémoires, ce qui est très important dans la pratique.

REMARQUE

Une éventuelle singularité de N est détectée, lors du calcul de b_n .

Si $\beta_{n-1}a_{n-1} + \alpha_n a_n = 0$ N est singulière, le calcul de b_n est impossible.

Le professeur Householder nous a signalé que la propriété établie dans les théorèmes 1 et 2 a été démontrée dans [5] et [4] puis dans [3]. Ces trois publications n'étant pas aisées à trouver il nous a semblé bon de publier ce résultat (la démonstration en est d'ailleurs différente) que nous utilisons en optimisation (cf. [1] et [2]) et qui est utilisé également en statistique (cf. [6]).

Pour le cas tridiagonal non symétrique voir une méthode voisine dans [7]. Enfin la partie algorithmique est nouvelle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARANGER J. (1970). Approximation optimale de la somme d'une série *C.R.A.S.*, t. 271, Série A, 149-152.
- [2] DUC-JACQUET M. (1970). Meilleures formules d'intégration dans certains espaces de Hilbert de fonctions, *C.R.A.S.*, t. 271, Série A, 795-797.
- [3] GREENBERG G. B. and SARHAN A. E. (1959). Matrix inversion, its interest and application in analysis of data, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 54, 755-766.
- [4] GUTTMAN L. (1955). A generalized simplex for factor analysis, *Psychometrika*, 20, 173-195.
- [5] UTIKA Yoshimasa (1955). Characterization of 2-type diagonal matrices with an application to order statistics, *Journal of Hokkaido College of Art and Literature*, 6, 66-75.
- [6] UPPULURI V. R. R. and CARPENTER J. A. (1969). The inverse of a matrix occurring in first order moving average models, *Indian J. of Stat.*, A 31 part. 1, 79-82.
- [7] UPPULURI V. R. R. and CARPENTER J. A. (1970). An inversion method for band matrices, *J. of Math Analysis and Applications* 31, n° 3, 554-558.