

CHRISTIANE ODIARD

**Brèves communications. Un corollaire du
théorème de Perron-Frobenius**

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, n° R2 (1971), p. 124-129

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_2_124_0

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN COROLLAIRE DU THEOREME DE PERRON-FROBENIUS

par Christiane ODIARD ⁽¹⁾

Sommaire. — On montre que pour toute matrice carrée A à éléments ≥ 0 , le rayon spectral $\rho(A)$ est la borne inférieure de $S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ)$ lorsque Z décrit l'ensemble des matrices diagonales à éléments > 0 , $S_{\infty\infty}$ désignant la norme de matrices issue de la norme du max sur \mathbf{R}^n .

On caractérise de deux manières (dont l'une s'énonce ainsi : il existe $z > 0$ tel que $Az \leq \rho(A)z$) le fait que cette borne inférieure soit atteinte, le résultat classique ([1], [2]) assurant que cet inf est atteint lorsque A est *irréductible* apparaît comme un cas particulier.

Dans tout ce qui suit, A désigne une matrice réelle, de type (n, n) , à éléments a_{ij} positifs ou nuls et de rayon spectral $\rho(A)$.

Un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est positif (> 0), si pour tout i , $1 \leq i \leq n$, on a $x_i > 0$ dans \mathbf{R} .

On notera $Z = \text{diag} \{ z_1, z_2, \dots, z_n \}$, la matrice diagonale Z , ayant z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pour éléments diagonaux.

φ_∞ désigne la norme du max sur \mathbf{R}^n ($\varphi_\infty(x) = \text{Max}_i |x_i|$) et $S_{\infty\infty}$ la norme de matrice engendrée par φ_∞ ; de sorte que :

$$S_{\infty\infty}(A) = \text{Max}_i \sum_j a_{ij} \quad (a_{ij} \geq 0)$$

Alors, il est bien connu que, pour tout vecteur $z > 0$,

$$(1) \quad \rho(A) = \rho(Z^{-1}AZ) \leq S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ) = \text{Max}_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}z_j}{z_i}$$

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences d'Alger et Section d'Analyse Numérique du Département de Mathématiques, Université de Lyon 1.

1. PROPOSITION 1

Si A est une matrice (n, n) , à éléments positifs ou nuls, alors :

$$\rho(A) = \inf S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ),$$

où la borne inférieure est prise sur les matrices diagonales Z , positives.

1° Remarquons d'abord qu'il résulte du théorème 3.8 de ([1]) que pour $\alpha > \rho(A)$, il existe un vecteur u positif, tel que :

$$(\alpha I - A)u \text{ soit positif.}$$

2° Démontrons la proposition 1 :

Soit ε positif, posons $\alpha = \rho(A) + \varepsilon$; d'après 1°, il existe un vecteur $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, positif, et tel que

$$[\rho(A) + \varepsilon]u > Au.$$

En prenant la matrice $v = \text{diag} \{ u_1, u_2, \dots, u_n \}$, nous obtenons la relation :

$$(2) \quad S_{\infty\infty} v^{-1} A v < \rho(A) + \varepsilon.$$

Ceci, joint à la relation (1), achève la preuve.

2. CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE LA BORNE INFÉRIEURE DE LA PROPOSITION 1 SOIT ATTEINTE

2-1. Si A est irréductible

La borne inférieure est atteinte d'après le théorème de Perron-Frobenius ([2] : théorème 2.1).

En effet, il suffit de prendre la matrice $Z = \text{diag} \{ z_1, \dots, z_n \}$, où le vecteur $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ est le vecteur propre (> 0) de A correspondant à la valeur propre $\rho(A)$.

Nous avons alors :

$$\rho(A) = S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ).$$

2.2. Si A est réductible

Soit B la forme normale de A ([1], page 74), nous avons $B = P^T A P$, où P est une matrice de permutation et $\rho(A) = \rho(B)$.

B s'écrit alors :

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_g & 0 & \dots & 0 \\ A_{g+1,1} & A_{g+1,2} & \dots & A_{g+1,g} & A_{g+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sg} & A_{s,g+1} & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_1, A_2, \dots, A_s , sont des matrices carrées irréductibles et où, pour $g+1 \leq f \leq s$, une au moins des matrices $a_{f,1}, A_{f,2}, \dots, A_{f,f-1}$, n'est pas nulle.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2

La borne inférieure de la proposition 1 est atteinte si et seulement si A vérifie i) et ii) :

- i) il existe $j_0 \in \{1, 2, \dots, g\}$, tel que $\rho(A) = \rho(A_{j_0})$,
- ii) cela n'est vrai pour aucune matrice A_k , ($k = g+1, \dots, s$).

Démontrons d'abord le

Lemme

Soit A matrice réelle, à éléments positifs ou nuls, alors A vérifie i) et ii), si et seulement si il existe un vecteur z , positif, tel que $Az \leq \rho(A)z$.

Démonstration

1° *Remarquons d'abord* que la relation : « il existe un vecteur z , positif, tel que $Az \leq \rho(A)z$ » est équivalente à la relation : « il existe un vecteur u , positif, tel que $Bu \leq \rho(B)u$ ».

En effet, si il existe un vecteur u positif tel que $Bu \leq \rho(B)u$, cela s'écrit :

$$P^T A P u \leq \rho(B)u,$$

ou encore :

$$A P u \leq \rho(B) P u,$$

soit enfin, puisque $\rho(A) = \rho(B)$, et en posant $z = P u$, vecteur positif

$$Az \leq \rho(A)z.$$

Nous allons donc démontrer le lemme en prenant la relation sur la matrice B .

— Notons r_j la valeur propre maximale de A_j , pour $1 \leq j \leq s$, et v^j le vecteur propre correspondant; v^j est positif pour $1 \leq j \leq s$, d'après le théorème de Perron-Frobenius.

2° *La condition est nécessaire :*

D'après i), nous avons :

$$A_{j_0} v^{j_0} = \rho(A) v^{j_0} \quad \text{avec} \quad v^{j_0} > 0$$

et

$$\begin{cases} r_j \leq \rho(A) \\ A_j v^j \leq \rho(A) v^j \quad (j = 1, 2, \dots, g \text{ et } j \neq j_0) \end{cases}$$

D'après ii), nous avons :

$$(3) \quad r_k < \rho(A) \quad (k = g + 1, \dots, s).$$

A la forme normale de A , il correspond une décomposition de \mathbf{R}^n en sous-espaces R_1, R_2, \dots, R_s , tels que $\mathbf{R}^n = R_1 + R_2 + \dots + R_s$. Pour tout vecteur x de \mathbf{R}^n , nous noterons x^i la projection de x dans R_i pour $1 \leq i \leq s$.

Considérons le vecteur x défini par :

$$\begin{cases} x^j = v^j & (j = 1, 2, \dots, g) \\ x^k = [\rho(A)I_k - A_k]^{-1} \sum_{h=1}^{k-1} A_{kh} v^h & (k = g + 1, \dots, s), \end{cases}$$

où I_k est la matrice unité de même ordre que A_k ($k = g + 1, \dots, s$).

Nous déduisons de la relation (3) et du théorème 3-9 de ([2]) que x^k est positif pour $g + 1 \leq k \leq s$. Le vecteur x ainsi défini est donc positif, et il vérifie la relation :

$$Bx \leq \rho(A)x$$

soit aussi :

$$Bx \leq \rho(B)x.$$

3° *Réciproquement*, supposons qu'il existe un vecteur z , positif, tel que $B_z \leq \rho(B)z$.

Nous avons alors les deux inégalités suivantes :

$$(4) \quad A_j z^j \leq \rho(B) z^j \quad (j = 1, 2, \dots, g)$$

$$(5) \quad \sum_{h=1}^{k-1} A_{kh} z^h + A_k z^k \leq \rho(B) z^k \quad (k = g + 1, \dots, s).$$

De (4), nous déduisons :

$$r_j \leq \rho(B) \quad (j = 1, 2, \dots, g)$$

et de (5), nous déduisons :

$$(6) \quad \begin{cases} A_k z^k \leq \rho(B) z^k \\ A_k z^k \neq \rho(B) z^k \end{cases} \quad (k = g + 1, \dots, s),$$

ce qui entraîne, pour $g + 1 \leq k \leq s$:

$$\begin{aligned} r_k &\leq \rho(B) && \text{soit } r_k \leq \rho(A) \text{ d'après la première inégalité de (6), et} \\ r_k &\neq \rho(B) && \text{soit } r_k \neq \rho(A) \text{ d'après (6) et la remarque 5 page 65 de ([1]).} \end{aligned}$$

D'où la condition ii) :

$$r_k < \rho(A) \quad (k = g + 1, \dots, s).$$

Soit $u = (u^1, u^2, \dots, u^s)$, le vecteur propre de B correspondant à la valeur propre $\rho(B)$; u vérifie les relations :

$$(7) \quad \begin{cases} u \geq 0 & \text{et} & u \neq 0 \\ A_j u^j = \rho(B) u^j & (j = 1, 2, \dots, g) \\ \sum_{h=1}^{k-1} A_{kh} u^h + A_k u^k = \rho(B) u^k & (k = g + 1, \dots, s). \end{cases}$$

Si pour tout j , $1 \leq j \leq g$, nous avons $u^j = 0$, alors (7) entraîne :

$$A_{g+1} u^{g+1} = \rho(B) u^{g+1}$$

et

$$\rho(A) \leq r_{g+1}, \text{ d'après la définition de } r_{g+1}.$$

Ce qui contredit :

$$r_{g+1} < \rho(A).$$

Donc il existe un indice j_0 , avec $1 \leq j_0 \leq g$, tel que $u^{j_0} \neq 0$. D'après (7), nous avons :

$$A_{j_0} u^{j_0} = \rho(B) u^{j_0},$$

c'est-à-dire que $\rho(B)$ est valeur propre de A_{j_0} . Ce qui entraîne la condition i) : $\rho(B) = r_{j_0}$, ou encore $\rho(A) = r_{j_0}$.

La démonstration de la proposition 2 est alors immédiate :

1° Si A vérifie i) et ii) : d'après le lemme, il existe un vecteur z , $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, positif tel que :

$$Az \leq \rho(A)z,$$

et donc

$$\rho(A) = S_{\infty}(Z^{-1}AZ),$$

où $Z = \text{diag} \{ z_1, \dots, z_n \}$.

2° Si la borne inférieure est atteinte : il existe une matrice diagonale positive $Z = \text{diag} \{ z_1, \dots, z_n \}$ telle que :

$$\rho(A) = S_{\infty}(Z^{-1}AZ),$$

soit :

$$\rho(A) = \max_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j}{z_i}$$

d'où :

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j}{z_i} \leq \rho(A) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si z est le vecteur ayant pour composantes z_1, z_2, \dots, z_n , nous avons :

$$Az \leq \rho(A)z,$$

ce qui achève la preuve.

REMARQUE : On trouve dans [1] une caractérisation des matrices non négatives A pour lesquelles existe $z > 0$ avec $Az = \rho(A)Z_0$. L'idée de la proposition 2 consiste à chercher, de façon plus générale, un vecteur $z > 0$ tel que $Az \leq \rho(A)z$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. R. GANTMACHER, *The theory of Matrices*, vol. II, Chelsea Publishing Company New York.
- [2] R. S. VARGA, *Matrix iterative Analysis*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey. 1962.