

R. MOHR

**Brèves communications. Formalisation d'un
outil pour la description d'images**

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, n° R2 (1971), p. 118-123

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_2_118_0

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMALISATION D'UN OUTIL POUR LA DESCRIPTION D'IMAGES

par R. MOHR (1) (2)

Sommaire. — Pour généraliser la notion de langage en sortant du cadre des phrases linéaires et notamment obtenir des langages à plusieurs dimensions il est proposé de considérer des « figures » munies de deux « pôles » permettant des constructions par superposition d'un pôle d'une figure et d'un pôle d'une autre. On introduit alors trois lois de composition sur les figures, qui généralisent la concaténation. Le but de l'article est de montrer que les trois lois appliquées à des figures de base, permettent d'obtenir toutes les figures que l'on peut construire à partir des figures de base.

INTRODUCTION

Deux méthodes sont couramment employées pour la reconnaissance des figures :

— l'une cherche à classer la figure dans une des familles P_1, \dots, P_n définies à l'avance;

— l'autre analyse la figure en considérant des relations entre sous-figures, comme on opère pour l'analyse des phrases des langages.

La seconde méthode permet une utilisation beaucoup plus intéressante comme cela a été montré dans [1] et [2]. Pour pouvoir procéder à l'analyse syntaxique, il semble naturel de généraliser la concaténation. La généralisation proposée ici est la suite d'une conclusion de [4]. Elle se situe entre les concaténations définies par Shaw dans [5] et [6] et celles de Narasimhan dans [3].

(1) Institut Universitaire de Calcul Automatique, Nancy.

(2) Groupe de recherche sur la théorie des langages sous la direction de M. Pair.

1. Définitions

Soient E et F deux ensembles et $F \subset E$.

Une *représentation* r sur (E, F) est un triplet (K, o, e) tel que :

$$K \subset E$$

$$o \in F$$

$$e \in F$$

K est appelé le *support* de r , o l'*origine* de r , e l'*extrémité* de r et $\{o, e\}$ les *pôles* de r . \mathcal{R} désignera l'ensemble des représentations sur (E, F) .

Soit alors G un *groupe d'applications* de E dans E tel que :

a) G restreint à F est encore un groupe d'applications de F dans F .

b) Pour tout x et y de F il existe un g unique de G tel que $g(x) = y$.

G induit une relation d'équivalence S sur \mathcal{R}

$$(r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow \exists g \in G \ g(r_1) = r_2).$$

Une *figure* est une classe d'équivalence de $\mathcal{R}/S = \mathcal{F}$. Un élément de \mathcal{F} sera noté f , ou parfois aussi \bar{r} lorsqu'il est la classe de $r \in \mathcal{R}$.

EXEMPLES :

1. $E = \mathbf{R}^3$, $F = \mathbf{R}^3 - \{(o, o, o)\}$ et G est le groupe de similitudes centrées en (o, o, o) .

2. $E = F = \mathbf{R}^2$ et G est le groupe des translations. Parmi les figures se trouvent en particulier les vecteurs libres. C'est cet exemple qui servira d'illustration dans la suite.

2. Opérations sur les figures

Nous allons maintenant nous servir des pôles pour composer des représentations entre elles. Nous définirons trois types de concaténations notées : $+$, $-$ et \times . Pour définir $f_1 + f_2$ (f_1 et $f_2 \in \mathcal{F}$) considérons une représentation $r_1 = (K_1, o_1, e_1)$ de f_1 et l'unique représentation $r_2 = (K_2, o_2, e_2)$ de f_2 telle que $o_2 = e_1$ (l'unique d'après les propriétés de G). $f_1 + f_2$ est alors par définition la classe d'équivalence de $(K_1 \cup K_2, o_1, e_2)$. $+$ correspond intuitivement à l'addition vectorielle.

Si on choisit la représentation (K_2, o_2, e_2) de f_2 telle que $o_2 = o_1$, alors $f_1 \cdot f_2$ est la classe d'équivalence de $(K_1 \cup K_2, o_1, e_2)$ (mise en commun des origines).

Enfin si on choisit r_2 telle que $e_2 = e_1$, alors $f_1 \times f_2$ est la classe de $(K \cup K_2, o_1, e_2)$ (mise en commun des extrémités).

La figure 1 montre ce que sont ces opérations, dans le cadre de l'exemple 2.

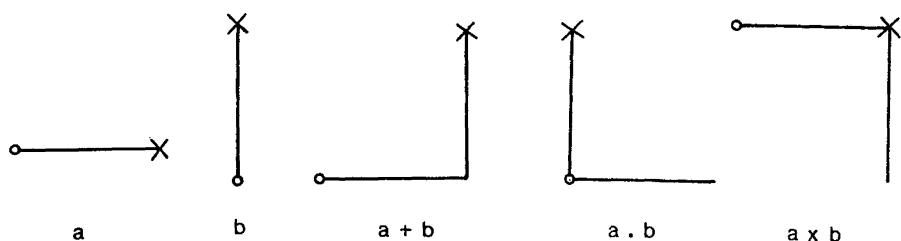


Figure 1

o schématise l'origine.
x schématise l'extrémité.

Les propriétés du groupe G permettent de montrer que nous avons bien ainsi défini des lois de composition interne sur \mathcal{F} .

Il est immédiat que ces lois sont associatives :

$$f_1 \text{ T } (f_2 \text{ T } f_3) = (f_1 \text{ T } f_2) \text{ T } f_3 \quad \forall \text{ T} \in \{ + ; \cdot ; \times \}$$

et que \cdot et \times sont « idem-potentes » :

$$f \times f = f \cdot f = f.$$

Nous pouvons alors envisager de construire des figures en concaténant des symboles de base. Soit S une famille de figures appelée *alphabet*; soit Σ un ensemble de lois de composition interne sur \mathcal{F} ; on appelle ensemble des figures engendrées par (S, Σ) et on note $\mathcal{F}(S; \Sigma)$ le plus petit sous-ensemble de \mathcal{F} contenant S et stable par les lois de Σ . On note $\mathcal{R}(S; \Sigma)$ l'ensemble de représentations des figures de $\mathcal{F}(S; \Sigma)$. Le choix de S est déterminé par le type de figures que l'on veut aborder; nous allons montrer dans la suite qu'en choisissant pour Σ l'ensemble des lois de composition précédemment introduites, on peut générer toutes les figures connexes comprenant de manière quelconque des figures de S , les points d'articulation étant les pôles.

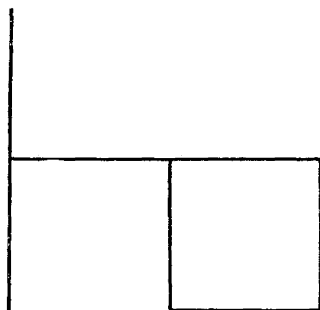


Figure 2

Par exemple si S est l'ensemble $\{a, b\}$ de la figure 1, et si on se place dans le cadre de l'exemple 2, on espère obtenir à partir de S tous les « quadrillages connexes normés ». On obtient par exemple le dessin de la figure 2 avec :

$$b + ((b \cdot a) + (a \times ((b \cdot a) + b))).$$

Nous allons d'abord formaliser la notion de « toutes les figures connexes obtenues en ajustant sur leurs pôles des figures de S ».

3.1. On appelle *S-représentation* tout ensemble fini non vide de représentations de figures de S . Le support d'une *S-représentation* est la réunion des supports de ses éléments.

Étant donné une *S-représentation* R , introduisons sur R la relation binaire Γ définie par :

$$(r_1 \Gamma r_2 \Leftrightarrow (r_1 \text{ et } r_2 \text{ ont au moins un pôle en commun}).$$

On associe ainsi un graphe symétrique à toute *S-représentation* R et on dit que R est connexe lorsque le graphe (R, Γ) est connexe.

3.2. Lemme de décomposition

Soient (R, Γ) le graphe associé à une *S* représentation connexe et r un élément de R . Le sous graphe obtenu en enlevant r possède au plus deux composantes connexes et dans chacune d'elles il existe un s tel que $s \Gamma x$.

Démonstration : Soient o et e l'origine et l'extrémité de r . Pour tout p de $R - \{r\}$, comme R est connexe, il existe un chemin de p à r dont l'avant dernier nœud est un élément de r ayant un pôle en o ou e .

L'ensemble des chemins dont le dernier nœud a un pôle en o définit un sous graphe connexe de $R - \{r\}$; de même pour e ; donc $R - \{r\}$ a au plus deux composantes connexes et dans chacune d'elles il existe un s tel que $r \Gamma s$ (si elle est non vide).

Nous pouvons alors démontrer le principal résultat de cette étude :

3.3. Théorème : Pour toute *S* représentation connexe R de support K , pour tout x origine (resp. extrémité) d'un élément de R , il existe y tel que

$$(K, x, y) \in \mathcal{R}(S; \Sigma) \quad (\text{resp. } (K, y, x) \in \mathcal{R}(S; \Sigma)).$$

Nous démontrerons le résultat par récurrence sur $\text{card}(R)$. Il est bien clair que le résultat est vrai si $\text{card}(R) = 1$.

Soit maintenant $\text{card}(R) = n + 1$. x est l'origine de r et l'extrémité de r est e . D'après 3.2, $R = P \cup Q \cup \{r\}$ et, p de P et q de Q ont un pôle commun avec r . Supposons que x soit origine de p et e l'extrémité de q . D'après l'hypothèse de récurrence il existe y et z tels que, si K' et K'' sont les supports de P et Q , $(K', x, y) = r'$ et $(K'', z, e) = r''$ sont des représentations de $\mathcal{R}(S; \Sigma)$.

Alors $((\bar{r}' \cdot \bar{r}) \times \bar{r}'')$ a une représentation unique ayant son origine en x et son support est celui de R .

Dans les autres cas : x (resp. e) pôle quelconque de p (resp. q), on reprend la même démonstration en considérant les formules suivantes :

- 3.4. x origine de p , e origine de q : $((\bar{r}' \cdot \bar{r}) + (\bar{r} + \bar{r}'))$
 x extrémité de p , e extrémité de q : $((\bar{r} \times (\bar{r}' + \bar{r})) \times \bar{r}')$
 x extrémité de p , e origine de q : $((\bar{r} \times (\bar{r}' + \bar{r})) + \bar{r}')$

On refait de même la démonstration dans le cas où x est extrémité d'un élément de R .

De la démonstration, on déduit un algorithme qui, étant donné une représentation r de $\mathcal{R}(S; \Sigma)$, donne une formule (en $+$, \cdot , \times) correspondante.

4. Quelques remarques

4.1. Le théorème 3.3 montre que $\Sigma = \{+, \cdot, \times\}$ est suffisant pour engendrer ce que l'on désire. (Il a été montré que si on restreint à deux des lois précédentes ce n'est plus le cas.) Cependant on a vu dans certains cas (3.4) que l'utilisation est parfois mal commode; on est obligé d'utiliser plusieurs fois la même représentation pour ramener l'origine au point désiré par exemple. Il sera donc commode d'introduire un opérateur unaire qui échange l'origine et l'extrémité des représentations (c'est d'ailleurs ce que fait Shaw).

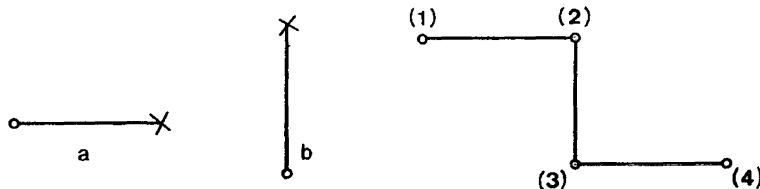


Figure 3

4.2. On ne peut pas raffiner le théorème en fixant l'origine et l'extrémité d'une S -représentation connexe pour qu'elle soit l'origine et l'extrémité d'une représentation de $\mathcal{R}(S, \Sigma)$. Dans le cadre de l'exemple 2 avec $S = \{a, b\}$ il n'existe pas de représentation appartenant à $\mathcal{R}(S, \Sigma)$ dont le support soit celui de la figure 3, et dont l'origine soit (1) et l'extrémité (4). (C'est évidemment possible si on utilise l'opérateur unaire de 4.1).

4.3. La condition sur le groupe G semble interdire de choisir pour G les déplacements du plan. En réalité, on n'utilise jamais dans ce qui précède, du fait que $F \subset E$; on peut donc généraliser : choisissons $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi$, et G le groupe graphe opérant sur $E \cup S$ et défini comme suit : G restreint à E est le groupe des déplacements du plan, et G restreint à F est défini par :

Si $g_E^{(1)}$ est une rotation d'angle θ alors $g_E(x, y, \alpha) = ((g_F(x, y), \alpha + \theta(2\pi))$. Cet exemple nous permet en particulier de traiter le cas des constructions avec raccordements des tangentes qui est proposé par différents auteurs.

La figure 4 donne un exemple de construction dans ce cas. Un pôle sera schématisé par un point du plan et un vecteur unitaire.

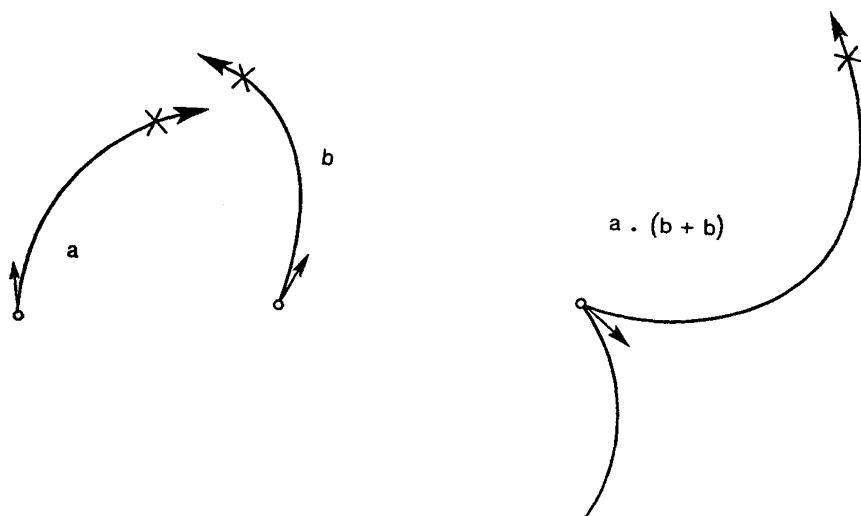


Figure 4

Je me permets ici de remercier M. Pair qui a eu l'idée de ce travail et qui m'a guidé par ses conseils judicieux.

REFERENCES

- [1] LIPKIN, WATT et KIRSCH, « The analysis, synthesis and description of biological images », *Annals N.Y. Acad. Sc.*, 128, 1966, 984-1012.
- [2] R. NARASIMHAN, « Labeling schemata and syntactic dscription of pictures », *Inf. and Control*, 1964, 7, 151-179.
- [3] R. NARASIMHAN, « Syntax-directed interpretation of classes of pictures », *Comm. ACM*, 1966, 9, 166-173.
- [4] A. QUERE, *Étude des ramifications et bilangages*, Thèse, Fac. des Sciences, Nancy, 1969.
- [5] A. C. SHAW, *The formal description and parsing of pictures*, Ph. D. Thesis Comp. Sc. Dept. Stanford Univ., 1967.
- [6] A. C. SHAW, « Parsing of graph representable pictures », *Journal of the ACM*, 1970, 17, 3.

(1) Soit $g \in G$, on note g_E la restriction de g à E .