

J. C. ZENOUDA

**Étude d'un schéma aux différences finies pour la
résolution numérique des équations de Navier-
Stokes couplées à celle de la chaleur**

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, n° R1 (1971), p. 49-72

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_1_49_0

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ETUDE D'UN SCHEMA AUX DIFFERENCES FINIES POUR LA RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES COUPLEES A CELLE DE LA CHALEUR

par J. C. ZENOUDA

Résumé. — Après avoir formulé de façon précise le problème, on étudie la stabilité et la convergence d'un schéma aux différences finies semi-explicite (l'équation de Navier-Stokes en explicite, et l'équation de la chaleur en implicite) pour résoudre numériquement ces équations. La dimension d'espace étant égale à deux.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier les équations de libre convection non stationnaire dans un domaine borné du plan. Soit Ω ce domaine borné, de point générique $X = \{x, y\} = \{x_1, x_2\}$, de frontière Γ , supposée « suffisamment » régulière. On désigne par Q , le cylindre $Q = \Omega \times]0, T[$, T étant fini, et par Σ , la frontière latérale de Q ; $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$. On désigne par $U(X, t)$ un vecteur (vecteur vitesse) $U(X, t) = \{u(X, t), v(X, t)\}$, par $p(X, t)$ (pression) et $w(X, t)$ (température) des fonctions scalaires.

Les équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de la chaleur correspondent à un couplage « parabolique-parabolique ». Elles s'énoncent, dans le cas d'évolution :

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} - \nu \Delta U + uD_1U + vD_2U + \xi w = F(X, t) - \text{grad } p$$

$$\left(\text{où } D_i U = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \right)$$

$$(2) \quad \text{div } U = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + U \cdot \text{grad } w = 0$$

avec les conditions aux limites

$$(4) \quad U = 0, \quad w = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et les conditions initiales

$$(5) \quad U(X, 0) = U_0(X); \quad w(X, 0) = w_0(X)$$

où : ξ est un vecteur donné de \mathbf{R}^2 , $F(X, t)$ et $U_0(X)$ sont des fonctions vectorielles données, $w_0(X)$ une fonction scalaire donnée et ν une constante positive (coefficient de viscosité).

L'objet de ce travail est l'étude de l'approximation par une méthode de différences finies du problème (1) ... (5). Les équations de Navier-Stokes ont fait l'objet de nombreux travaux dont, en particulier, ceux de Ladyzenskaya [8], Chorin [4], Chernyakov [3], Jamet-Lascaux-Raviart [5], Krzywicki [7], Teman [13] et [14], Raviart [12]. De nombreuses méthodes de résolution numérique y sont étudiées dans le cas stationnaire, [10], [7], [12] comme dans le cas non stationnaire [5], [6], [10], [13], avec différents types de conditions aux limites. Certains résultats de cet article sont extraits de la thèse [15] où de nombreux schémas aux différences finies explicite, semi-explicite et implicite, sont étudiés et où un théorème d'unicité y est établi.

Le plan est le suivant :

- I. Formulation précise du problème.
- II. Étude du schéma aux différences.
- III. Étude de la stabilité.
- IV. Étude de la convergence.
- V. Résolution numérique des équations aux différences.

I. FORMULATION PRECISE DU PROBLEME

I.1. Espaces fonctionnels, notation

Nous ne considérerons que des fonctions à valeurs réelles. On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact dans Ω ; par $L^2(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω . Si $f, g \in L^2(\Omega)$ leur produit scalaire est :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

Pour ce produit scalaire, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On désigne par $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre 1.

$$H^1(\Omega) = \left\{ v/v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx$$

$H_1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, nous avons aussi :

$$H_0^1(\Omega) = \{v/v \in H^1(\Omega), \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

l'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la structure Hilbertienne de sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$.

On désigne par :

$$\mathcal{V} = \{ \Phi / \Phi \in (\mathcal{D}(\Omega))^2, \operatorname{div} \Phi = 0 \}$$

$$H = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } (L^2(\Omega))^2$$

pour $\varphi, \psi \in H$ nous posons :

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \varphi_i \psi_i dx; \quad |\varphi| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$$

On désigne par \mathbf{V} l'adhérence de \mathcal{V} dans $(H^1(\Omega))^2$ nous avons la définition équivalente, cf. Lions [9] [10]

$$\mathbf{V} = \{ V / V \in (H_0^1(\Omega))^2, \operatorname{div} V = 0 \}$$

On munit \mathbf{V} du produit scalaire :

$$((U, V)) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)$$

en identifiant H à son dual ($H \equiv H'$), nous avons :

$$\mathbf{V} \subset H \subset \mathbf{V}'$$

(l'injection de \mathbf{V} dans H est continue en raison de l'inégalité de Poincaré).

Posons :

$$b_1(U, V, W) = \sum_{i,k=1}^2 \int_{\Omega} U_k (D_k V_i) W_i dx; \quad b_2(U, v, w) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} U_k (D_k v) w dx$$

pour U, V, W des vecteurs, v et w des fonctions scalaires telles que les intégrales convergent.

Rappelons quelques résultats relatifs aux formes énoncées ci-dessus (Lions [9], [10], Ladyzenskaya [8])

la forme trilinéaire $U, V, W \rightarrow b_1(U, V, W)$ est continue sur $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}$

(car $n = 2$) (en raison de l'inégalité de Hölder) de même, la forme trilinéaire $U, v, w \rightarrow b_2(U, v, w)$ est continue sur $\mathbf{V} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

Nous avons :

$$b_1(U, U, U) = 0, \quad b_1(U, U, V) = -b_1(U, V, U) \Rightarrow b_1(U, V, V) = 0$$

$$b_2(U, v, w) = -b_2(U, w, v) \Rightarrow b_2(U, v, v) = 0$$

$$U, V \in \mathbf{V}; \quad v, w \in H_0^1(\Omega)$$

Ces égalités proviennent de l'équation :

$$\operatorname{div} U = 0$$

De façon générale, soit $T > 0$ fixé, et soit X un espace de Banach; on désigne par $L^p(0, T; X)$ l'espace des (classes de) fonctions $t \rightarrow f(t)$ de

$$]0, T[\rightarrow X,$$

qui sont mesurables, à valeurs dans X , et telles que :

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0, T; X)} < \infty;$$

$$(\text{ou si } p = \infty; \sup_{t \in]0, T[} \operatorname{ess} \|f(t)\|_X = \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} < \infty)$$

ainsi normé, l'espace $L^p(0, T; X)$ est complet (cf. Bourbaki [1]).

On désigne par $\zeta(0, T; X)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans X (cf. Lions [9]).

Le problème de la recherche des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes couplées à celle de la chaleur est, le suivant :

I.2. Problème

On donne $F \in L^2(0, T; H)$; $U_0 \in H$; $w_0 \in L^2(\Omega)$: trouver une fonction vectorielle U et une fonction scalaire w telle que :

$$U \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2), \quad w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

et vérifiant :

$$\int_0^T \{ -(U(t), \Phi'(t)) + \nu((U(t), \Phi(t))) + b_1(U(t), U(t), \Phi(t)) + (\xi w(t), \Phi(t)) \} dt \\ = \int_0^T (F(t), \Phi(t)) dt + (U_0, \Phi(0))$$

$$\int_0^T \{ -(w(t), \varphi'(t)) + ((w(t), \varphi(t))) + b_2(U(t), w(t), \varphi(t)) \} dt = (w_0, \varphi(0))$$

pour toute fonction Φ telle que :

$$\Phi \in \zeta(0, T; \mathbf{V}); \quad \Phi' \in L^2(0, T; H); \quad \Phi(T) = 0$$

et pour toute fonction φ telle que :

$$\varphi \in \zeta(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \varphi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)); \quad \varphi(T) = 0$$

Considérons maintenant les deux théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème 1

Le problème admet au moins une solution $\{U, w\}$ (cf. Chernyakov [3]). La démonstration de la convergence de notre schéma numérique constituera une nouvelle démonstration de ce théorème.

Théorème 2

Si la dimension n est égale à 2, le problème (1) ... (5) admet une solution $\{U, w\}$ unique. La démonstration se trouve dans [15].

REMARQUE

En utilisant l'équation (2), il est évident que l'on peut écrire les formes trilineaires comme suit :

$$b_1(U, V, W) = \left(\frac{\partial}{\partial x} (uV), W \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} (vV), W \right)$$

$$b_2(U, \varphi, \psi) = \left(\frac{\partial}{\partial x} (u\varphi), \psi \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} (v\varphi), \psi \right)$$

$$U, V, W \in \mathbf{V}; \quad U = \{u, v\}; \quad \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$$

II. SCHEMA AUX DIFFERENCES

Posons :

$$X = \{x, y\} = \{x_1, x_2\}; \quad U = \{u, v\}; \quad F = \{f, g\}; \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2\}$$

avec ces notations, le système (1) ... (5), sous forme conservative, s'écrit :

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \xi_1 w = f - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(7) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) + \xi_2 w = g - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(9) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial y}(vw) = 0$$

$$(10) \quad u = v = w = 0 \text{ sur } \Sigma$$

$$(11) \quad u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0 \text{ à l'instant } t = 0.$$

Soit h un nombre positif destiné à tendre vers zéro, on considère le réseau \mathcal{R}_h^0 : ensemble des points du plan :

$$M_0 = \{m_1 h, m_2 h\}, \quad m_i \in \mathbf{Z}.$$

Nous convenons d'exprimer la première composante u (resp. f) du vecteur vitesse (resp. F donné) aux points $(i + 1/2, j)$ et la seconde composante v (resp. g) aux points $(i, j + 1/2)$, alors que la température w de la pression p s'exprimeront aux points (i, j) du réseau \mathcal{R}_h^0 (voir figure ci-dessous).

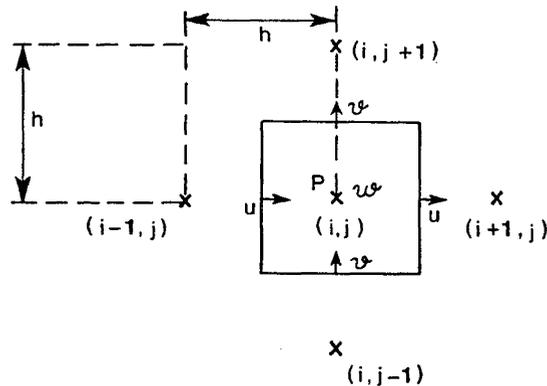


Figure 1

Introduisons les réseaux \mathcal{R}_h^1 et \mathcal{R}_h^2 définis de la façon suivante :

$$\mathcal{R}_h^1 = \{M_1 \in \mathbf{R}^2; M_1 = \{(m_1 + 1/2)h, m_2 h\}, m_i \in \mathbf{Z}\}$$

$$\mathcal{R}_h^2 = \{M_2 \in \mathbf{R}^2; M_2 = \{m_1 h, (m_2 + 1/2)h\}, m_i \in \mathbf{Z}\}$$

posons :

$$v(M_0) = \{(m_1 h, (m_2 \pm 1)h), ((m_1 \pm 1)h, m_2 h)\}$$

$$v(M_1) = \{((m_1 + 1/2) \pm 1)h, m_2 h\} \cup \{(m_1 + 1/2)h, (m_2 \pm 1)h\}$$

$$v(M_2) = \{m_1 h, ((m_2 + 1/2) \pm 1)h\} \cup \{(m_1 \pm 1)h, (m_2 + 1/2)h\}$$

On désigne par :

Ω_h^i = l'ensemble des points $M_i \in \mathcal{R}_h^i$ tels que : M_i et $v(M_i)$ sont contenus dans $\bar{\Omega}(i = 0, 1, 2)$

$\bar{\Omega}$ étant la fermeture de Ω dans \mathbf{R}^2 .

A chaque pas h , nous allons considérer les espaces suivants :

$H_{1,h}$ = l'espace des fonctions définies sur $\mathcal{R}_h^1 \times \mathcal{R}_h^2$ à valeurs dans \mathbf{R}^2 , nulles sur $(\mathcal{R}_h^1 \times \mathcal{R}_h^2) - (\Omega_h^1 \times \Omega_h^2)$

$H_{2,h}$ = l'espace des fonctions définies sur \mathcal{R}_h^0 à valeurs dans \mathbf{R} , nulles sur $\mathcal{R}_h^0 - \Omega_h^0$

Pour toute fonction $U \in H_{1,h}$ nous avons :

$U = \{u_{i+1/2,j}, v_{i,j+1/2}\}$ où u (resp v) est l'ensemble des composantes définies sur \mathcal{R}_h^1 (resp \mathcal{R}_h^2).

On définit sur $H_{1,h}$ les deux produits scalaires suivants : pour

$$U^{(1)} \text{ et } U^{(2)} \in H_{1,h}$$

$$(U^{(1)}, U^{(2)})_h = h^2 \sum_{i,j} (u_{i+1/2,j}^{(1)} u_{i+1/2,j}^{(2)} + v_{i,j+1/2}^{(1)} v_{i,j+1/2}^{(2)})$$

$$((U^{(1)}, U^{(2)}))_h = (\nabla_x U^{(1)}, \nabla_x U^{(2)})_h + (\nabla_y U^{(1)}, \nabla_y U^{(2)})_h$$

où

$$(\nabla_x U) = \begin{cases} (\nabla_x u)_{i+1/2,j} = \frac{1}{h} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \\ (\nabla_x v)_{i,j+1/2} = \frac{1}{h} (v_{i+1/2,j+1/2} - v_{i-1/2,j+1/2}) \end{cases}$$

$$(\nabla_y U) = \begin{cases} (\nabla_y u)_{i+1/2,j} = \frac{1}{h} (u_{i+1/2,j+1/2} - u_{i+1/2,j-1/2}) \\ (\nabla_y v)_{i,j+1/2} = \frac{1}{h} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) \end{cases}$$

On désigne par $|U|_h$ et $\|U\|_h$ les normes correspondantes, elles sont équivalentes puisque $H_{1,h}$ est de dimension finie.

De même, on définit sur $H_{2,h}$ les deux produits scalaires suivants : pour $\varphi, \psi \in H_{2,h}$

$$(\varphi, \psi)_h = h^2 \sum_{i,j} \varphi_{i,j} \cdot \psi_{i,j}$$

$$((\varphi, \psi))_h = \sum_{i,j} [(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}) \cdot (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) + (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}) \cdot (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j})]$$

On désigne de même par $|\varphi|_h$ et $\|\varphi\|_h$ les normes correspondantes, elles sont équivalentes puisque $H_{2,h}$ est de dimension finie. Évidemment, les espaces $H_{1,h}$ et $H_{2,h}$ ainsi normés sont des espaces de Hilbert.

Posons :

$$(\operatorname{div}_h U)_{i,j} = \frac{1}{h} [(u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}) + (v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2})]$$

On désigne par V_h le sous-espace des fonctions $U \in H_{1,h}$ telles que : $(\operatorname{div}_h U)_{i,j} = 0$ sur tout le réseau \mathfrak{R}_h^0 .

Soit le vecteur $(\operatorname{div}_h U)U$ défini par :

$$(\operatorname{div}_h U)U = \begin{cases} [(\operatorname{div}_h U)u]_{i+1/2,j} = \frac{1}{h} [(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \\ \quad + (v_{i+1/2,j+1/2} - v_{i+1/2,j-1/2})]u_{i+1/2,j} \\ [(\operatorname{div}_h U)v]_{i,j+1/2} = \frac{1}{h} [(u_{i+1/2,j+1/2} - u_{i-1/2,j+1/2}) + \\ \quad + (v_{i,j+1} - v_{i,j})]v_{i,j+1/2} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{1}{2} (u_{i-1/2,j} + u_{i+1/2,j}) \\ v_{i,j} &= \frac{1}{2} (v_{i,j-1/2} + v_{i,j+1/2}) \\ u_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} (u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j+1}) \\ v_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} (v_{i,j+1/2} + v_{i+1,j+1/2}) \end{aligned}$$

Posons de même :

$$\begin{aligned} \nabla_x(uU) &= \begin{cases} \nabla_x(uu)_{i+1/2,j} = \frac{1}{h} (u_{i+1,j}u_{i+1,j} - u_{i,j}u_{i,j}) \\ \nabla_x(uv)_{i,j+1/2} = \frac{1}{h} (u_{i+1/2,j+1/2}v_{i+1/2,j+1/2} - \\ \quad - u_{i-1/2,j+1/2}v_{i-1/2,j+1/2}) \end{cases} \\ \nabla_y(vU) &= \begin{cases} \nabla_y(vu)_{i+1/2,j} = \frac{1}{h} (v_{i+1/2,j+1/2}u_{i+1/2,j+1/2} - \\ \quad - v_{i+1/2,j-1/2}u_{i+1/2,j-1/2}) \\ \nabla_y(vv)_{i,j+1/2} = \frac{1}{h} (v_{i,j+1}v_{i,j+1} - v_{i,j}v_{i,j}) \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{\sim} &= \begin{cases} u_{i-1/2,j} & \text{si } u_{i,j} \geq 0 \\ u_{i+1/2,j} & \text{si } u_{i,j} < 0 \end{cases} \\
 v_{i,j}^{\sim} &= \begin{cases} v_{i,j-1/2} & \text{si } v_{i,j} \geq 0 \\ v_{i,j+1/2} & \text{si } v_{i,j} < 0 \end{cases} \\
 u_{i+1/2,j+1/2}^{\sim} &= \begin{cases} u_{i+1/2,j} & \text{si } u_{i+1/2,j+1/2} \geq 0 \\ u_{i+1/2,j+1} & \text{si } u_{i+1/2,j+1/2} < 0 \end{cases} \\
 v_{i+1/2,j+1/2}^{\sim} &= \begin{cases} v_{i,j+1/2} & \text{si } v_{i+1/2,j+1/2} \geq 0 \\ v_{i+1,j+1/2} & \text{si } v_{i+1/2,j+1/2} < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pour $U, V, W \in H_{1,h}$, discrétisons la forme trilineaire $b_1(U, V, W)$.

Si nous posons : $U = \{u, v\}$, alors nous aurons par définition :

$$b_{1,h}(U, V, W) = (\nabla_x(uV), W)_h + (\nabla_y(vV), W)_h$$

D'où l'expression de :

$$b_{1,h}(U, U, U) = (\nabla_x(uU), U)_h + (\nabla_y(vU), U)_h$$

et finalement :

$$\begin{aligned}
 b_{1,h}(U, U, U) &= h \sum_{i,j} [(u_{i+1,j} u_{i+1,j}^{\sim} - u_{i,j} u_{i,j}^{\sim}) u_{i+1/2,j} + \\
 &+ (v_{i+1/2,j+1/2} u_{i+1/2,j+1/2}^{\sim} - v_{i+1/2,j-1/2} u_{i+1/2,j-1/2}^{\sim-1/2}) u_{i+1/2,j} + \\
 &+ (u_{i+1/2,j+1/2} v_{i+1/2,j+1/2}^{\sim} - u_{i-1/2,j+1/2} v_{i-1/2,j+1/2}^{\sim-1/2}) v_{i,j+1/2} + \\
 &+ (v_{i,j+1} v_{i,j+1}^{\sim} - v_{i,j} v_{i,j}^{\sim}) v_{i,j+1/2}]
 \end{aligned}$$

nous discrétisons de même la forme $b_{2,h}(U, \varphi, \psi)$:

$$b_{2,h}(U, \varphi, \psi) = (\nabla_x(u\varphi), \psi)_h + (\nabla_y(v\varphi), \psi)_h$$

où

$$\nabla_x(u\varphi)_{i,j} = \frac{1}{h} (u_{i+1/2,j} \varphi_{i+1/2,j}^{\sim} - u_{i-1/2,j} \varphi_{i-1/2,j}^{\sim-1/2})$$

$$\nabla_y(v\varphi)_{i,j} = \frac{1}{h} (v_{i,j+1/2} \varphi_{i,j+1/2}^{\sim} - v_{i,j-1/2} \varphi_{i,j-1/2}^{\sim-1/2})$$

où, de façon analogue, nous posons :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{i+1/2,j}^{\sim} &= \begin{cases} \varphi_{i,j} & \text{si } u_{i+1/2,j} \geq 0 \\ \varphi_{i+1,j} & \text{si } u_{i+1/2,j} < 0 \end{cases} \\
 \varphi_{i,j+1/2}^{\sim} &= \begin{cases} \varphi_{i,j} & \text{si } v_{i,j+1/2} \geq 0 \\ \varphi_{i,j+1} & \text{si } v_{i,j+1/2} < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant la discrétisation par rapport au temps. Soit $k = \Delta t = \frac{T}{N}$ le pas dans le temps.

Donnons-nous :

- $U_{0,h}$ une fonction de $H_{1,h}$
 - $w_{0,h}$ une fonction de $H_{2,h}$
 - une famille de fonctions F_h^n (n étant un entier, $0 \leq n \leq N-1$) de $H_{1,h}$.
- $U_{0,h}$, $w_{0,h}$ et les F_h^n seront choisies telles que :

$$(12) \quad \begin{cases} |U_{0,h}|_h \rightarrow |U_0|_H & \text{quand } h \rightarrow 0 \\ |w_{0,h}|_h \rightarrow |w_0|_{L^2(\Omega)} & \text{quand } h \rightarrow 0 \\ \left(k \sum_{n=0}^{N-1} |F_h^n|_h^2 \right)^{1/2} \rightarrow |F|_{L^2(0,T;H)} & \text{quand } h \text{ et } k \rightarrow 0 \end{cases}$$

(U_0 , w_0 et F sont les fonctions données du problème (1) ... (5).)

Nous pouvons ainsi formuler notre schéma aux différences finies de la façon suivante : à partir du couple $\{U_{0,h}, w_{0,h}\}$ donné dans $H_{1,h} \times H_{2,h}$, on définit de proche en proche la famille de couples de fonctions

$$\{U_h^1, w_h^1\}, \{U_h^2, w_h^2\} \dots \{U_h^N, w_h^N\}$$

dans $V_h \times H_{2,h}$.

$\{U_{0,h}, w_{0,h}\} \dots \{U_h^n, w_h^n\}$ ($0 \leq n < N$) étant supposée déterminée, on définit $\{U_h^{n+1}, w_h^{n+1}\}$ suivant le schéma :

$$(13) \quad \frac{1}{k} (U_h^{n+1} - U_h^n, \Phi)_h + \nu (U_h^n, \Phi)_h + b_{1,h}(U_h^n, U_h^n, \Phi) + (\xi w_h^n, \Phi)_h = (F_h^n, \Phi)_h$$

$$(14) \quad \frac{1}{k} (w_h^{n+1} - w_h^n, \varphi)_h + ((w_h^{n+1}, \varphi))_h + b_{2,h}(U_h^n, w_h^{n+1}, \varphi) = 0$$

pour toutes $\Phi \in V_h$ et $\varphi \in H_{2,h}$ et pour $n = 0, 1, \dots (N-1)$ et d'après le théorème de Riesz, le couple $\{U_h^{n+1}, w_h^{n+1}\}$ est déterminé de façon unique.

III. ETUDE DE LA STABILITE DU SCHEMA

Lemme 3.1

Soit $U = \{u, v\}$ un élément quelconque de V_h , alors, nous avons l'égalité suivante :

$$(15) \quad b_{1,h}(U, U, U) = \frac{h}{2} \sum_{i,j} [|u_{i+1,j}| (u_{i+3/2,j} - u_{i+1/2,j})^2 + |v_{i+1/2,j+1/2}| (u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j})^2 + |u_{i+1/2,j+1/2}| \times (v_{i+1,j+1/2} - v_{i,j+1/2})^2 + |v_{i,j+1}| (v_{i,j+3/2} - v_{i,j+1/2})^2]$$

Démonstration

Pour tout $U \in \mathbf{V}_h$ nous avons : (puisque $\operatorname{div}_h U = 0$)

$$b_{1,h}(U, U, U) = b_{1,h}(U, U, U) - \frac{1}{2} ((\operatorname{div}_h U)U, U)_h$$

soit

$$(16) \quad b_{1,h}(U, U, U) = h \sum_{i,j} \llbracket u_{i+1,j} u_{i+1,j} - u_{i,j} u_{i,j} + \\ + v_{i+1/2,j+1/2} u_{i+1/2,j+1/2} - v_{i+1/2,j-1/2} u_{i+1/2,j-1/2} - \\ - 1/2[(u_{i+1,j} - u_{i,j})u_{i+1/2,j} + (v_{i+1/2,j+1/2} - v_{i+1/2,j-1/2}) \\ \times u_{i+1/2,j}] \rrbracket u_{i+1/2,j} + h \sum_{i,j} \llbracket u_{i+1/2,j+1/2} v_{i+1/2,j+1/2} - \\ - u_{i-1/2,j+1/2} v_{i-1/2,j+1/2} + v_{i,j+1} v_{i,j+1} - v_{i,j} v_{i,j} - \\ - 1/2[v_{i,j+1/2}(u_{i+1/2,j+1/2} - u_{i-1/2,j+1/2}) + v_{i,j+1/2} \times \\ \times (v_{i,j+1} - v_{i,j})] \rrbracket v_{i,j+1/2}$$

autrement dit : $b_{1,h}(U, U, U) = h(\Sigma_1 + \Sigma_2)$

Considérons Σ_1 , après quelques transformations élémentaires, il s'écrit sous la forme :

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_{i+1,j} (u_{i+1/2,j} - u_{i+3/2,j}) (2u_{i+1,j} - u_{i+1/2,j} - \\ - u_{i+3/2,j}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_{i+1/2,j+1/2} (u_{i+1/2,j} - u_{i+1/2,j+1}) \times \\ \times (2u_{i+1/2,j+1/2} - u_{i+1/2,j} - u_{i+1/2,j+1})$$

soit finalement

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |u_{i+1,j}| (u_{i+3/2,j} - u_{i+1/2,j})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} |v_{i+1/2,j+1/2}| \\ \times (u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j})^2$$

en opérant de même sur Σ_2 , nous déduisons (3.1).

C.Q.F.D.

Lemme 3.2

Soit $U = \{u, v\}$ un élément quelconque de \mathbf{V}_h ; w un élément quelconque de $H_{2,h}$, alors, nous avons l'égalité :

$$(17) \quad b_{2,h}(U, w, w) = \frac{h}{2} \sum_{i,j} [|u_{i+1/2,j}| |w_{i+1,j} - w_{i,j}|^2 + \\ + |v_{i,j+1/2}| |w_{i,j+1} - w_{i,j}|^2]$$

Démonstration

Elle est analogue à celle du lemme précédent.

Lemme 3.3

Soient $U = \{ u, v \}$ et Φ quelconques dans V_h , w et φ deux éléments de $H_{2,h}$.
Posons par définition :

$$M(U) = \text{Max}_{i,j} \text{Max} \{ |u_{i+1/2,j}|, |v_{i,j+1/2}| \},$$

alors, nous avons :

$$(18) \quad |b_{1,h}(U, U, \Phi)| \leq S(h, U)[b_{1,h}(U, U, U)]^{1/2} |\Phi|_h$$

$$(19) \quad |b_{2,h}(U, w, \varphi)| \leq S(h, U)[b_{2,h}(U, w, \varphi)]^{1/2} |\varphi|_h$$

où
$$S(h, U) = 2 \sqrt{\frac{2M(U)}{h}}$$

Démonstration

On peut écrire :

$$b_{1,h}(U, U, \Phi) = b_{1,h}(U, U, \Phi) - ((\text{div}_h U)U, \Phi)_h$$

soit aussi, $b_{1,h}(U, U, \Phi) = \frac{1}{h} (A + B, \Phi)_h$ où A et B sont des fonctions de V_h définies par les formules :

$$A = \begin{cases} A_{i+1/2,j}^{(1)} = u_{i+1,j} u_{i+1,j} - u_{i,j} u_{i,j} - (u_{i+1,j} - u_{i,j}) u_{i+1/2,j} \\ A_{i,j+1/2}^{(2)} = u_{i+1/2,j+1/2} v_{i+1/2,j+1/2} - u_{i-1/2,j+1/2} v_{i-1/2,j+1/2} - \\ \quad - (u_{i+1/2,j+1/2} - u_{i-1/2,j+1/2}) v_{i,j+1/2} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} B_{i+1/2,j}^{(1)} = v_{i+1/2,j+1/2} u_{i+1/2,j+1/2} - v_{i+1/2,j-1/2} u_{i+1/2,j-1/2} - \\ \quad - (v_{i+1/2,j+1/2} - v_{i+1/2,j-1/2}) u_{i+1/2,j} \\ B_{i,j+1/2}^{(2)} = v_{i,j+1} v_{i,j+1} - v_{i,j} v_{i,j} - (v_{i,j+1} - v_{i,j}) v_{i,j+1/2} \end{cases}$$

Or nous avons :

$$|b_{1,h}(U, U, \Phi)|^2 \leq \frac{1}{h^2} |A + B|_h^2 |\Phi|_h^2 \leq \frac{2}{h^2} (|A|_h^2 + |B|_h^2) |\Phi|_h^2$$

et
$$\frac{1}{h^2} |A|_h^2 = \sum_{i,j} [(A_{i+1/2,j}^{(1)})^2 + (A_{i,j+1/2}^{(2)})^2]$$

soit, il est facile de voir que nous avons :

$$\sum_{i,j} (A_{i+1/2,j}^{(1)})^2 \leq 2 \sum_{i,j} |u_{i+1,j}|^2 |u_{i+3/2,j} - u_{i+1/2,j}|^2$$

$$\sum_{i,j} (A_{i,j+1/2}^{(2)})^2 \leq 2 \sum_{i,j} |u_{i+1/2,j+1/2}|^2 |v_{i+1,j+1/2} - v_{i,j+1/2}|^2$$

soit finalement :

$$\frac{1}{h^2} |A|_h^2 \leq 2M(U) \sum_{i,j} [|u_{i+1,j}| (u_{i+3/2,j} - u_{i+1/2,j})^2 + |u_{i+1/2,j+1/2}| (v_{i+1,j+1/2} - v_{i,j+1/2})^2]$$

en raisonnant de même pour B , nous déduisons facilement (18). La démonstration de (19) se fait de façon analogue.

C.Q.F.D.

Lemme 3.4

Soit U quelconque dans V_h et soit w quelconque dans $H_{2,h}$, alors, nous avons :

$$(20) \quad \|U\|_h \leq N(h) |U|_h; \quad \|w\|_h \leq N(h) |w|_h$$

où

$$N(h) = \frac{2\sqrt{2}}{h}$$

Démonstration

Voir [15].

Corollaire

Soient U et Φ quelconques dans V_h , w et φ quelconques dans $H_{2,h}$, alors, nous avons les inégalités suivantes :

$$|((U, \Phi))_h| \leq N(h) \|U\|_h |\Phi|_h; \quad ((w, \varphi))_h \leq N(h) \|w\|_h |\varphi|_h$$

Lemme 3.5 (inégalité de Gronvall discrète)

n étant un entier naturel, $0 \leq n \leq \frac{T}{k}$, T étant fixé, positif, fini. On considère une suite de nombres $u_n \geq 0$ tels que : il existe des constantes positives C_0 et C_1 pour lesquelles nous avons :

$$u_0 \leq C_0; \quad u_n \leq C_0 + C_1 k \sum_{i=0}^{n-1} u_i \quad \text{pour } n \geq 1$$

Alors, il existe une constante C ne dépendant que de C_0 , C_1 et T , et telle que nous ayons :

$$u_n \leq C \quad \text{pour tout } n.$$

Démonstration

Voir [5].

Lemme 3.6

Soient U_h^n, U_h^{n+1} des fonctions de V_h , et soient w_h^n, w_h^{n+1} des fonctions de $H_{2,h}$, satisfaisant les équations aux différences. Alors, quels que soient les

nombre réels strictement positifs ε et η , nous avons les inégalités suivantes :

$$(21) \quad |U_h^{n+1}|_h^2 - |U_h^n|_h^2 + k[2 - (1 + \varepsilon + \eta)kS^2(h, U_h^n)]b_{1,h}(U_h^n, U_h^n, U_h^n) + \\ + \nu k \left[2 - \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{\eta} \right) \nu k N^2(h) \right] \|U_h^n\|_h^2 \leq k^2 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right) (|\xi| |w_h^n|_h \\ + |F_h^n|_h)^2 + 2k |\xi| |w_h^n|_h |U_h^n|_h + 2k |F_h^n|_h |U_h^n|_h$$

$$(22) \quad |w_h^{n+1}|_h^2 - |w_h^n|_h^2 + 2k \|w_h^{n+1}\|_h^2 \leq 0$$

Démonstration

(Le principe est dû à Raviart [11] nous donnons les grandes lignes de la démonstration que le lecteur trouvera dans [5] et dans [15]. On écrit (13) en posant d'abord $\Phi = U_h^n$, puis $\Phi = U_h^{n+1} - U_h^n$, et (14) en posant $\varphi = w_h^{n+1}$. D'où, à partir des égalités évidentes :

$$(U_h^{n+1} - U_h^n, U_h^n)_h = \frac{1}{2} (|U_h^{n+1}|_h^2 - |U_h^n|_h^2 - |U_h^{n+1} - U_h^n|_h^2)$$

$$(w_h^{n+1} - w_h^n, w_h^{n+1})_h = \frac{1}{2} (|w_h^{n+1}|_h^2 - |w_h^n|_h^2 - |w_h^{n+1} - w_h^n|_h^2)$$

de l'inégalité non moins évidente :

$$(a + b + c)^2 \leq (1 + \varepsilon + \eta)a^2 + \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{\eta} \right) b^2 + \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right) c^2$$

où ε et η sont des nombres réels strictement positifs quelconques. Ainsi que des principaux résultats énoncés dans les lemmes précédents, il est facile alors de démontrer (21) et (22).

C.Q.F.D.

Lemme 3.7

Soit δ un nombre réel positif : $0 < \delta < 1$, posons :

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2}, \eta = \frac{\nu}{hM(U)}, \quad \text{où } M(U) = \text{Max}_{i,j} \text{Max} \{ |u_{i+1/2,j}|, |v_{i,j+1/2}| \}.$$

Alors, si h et k vérifient la condition :

$$(23) \quad \frac{4\nu k}{h^2} + 4M(U) \frac{k}{h} < 1 - \delta$$

nous avons :

$$(24) \quad 2 - (1 + \varepsilon + \eta)kS^2(h, U) > 0$$

et

$$(25) \quad 2 - \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{\eta} \right) k\nu N^2(h) > \delta$$

Démonstration

Voir [5].

Théorème 3.1

δ étant un nombre réel tel que $0 < \delta < 1$; si pour tout i , pour tout j et pour $0 \leq n < N$ la condition suivante est réalisée :

$$\frac{4\nu k}{h^2} + 4 \operatorname{Max}_{i,j} \operatorname{Max} \{ |u_{i+1/2,j}^n|, |v_{i,j+1/2}^n| \} \frac{k}{h} \leq 1 - \delta$$

Alors, la solution du schéma aux différences finies (13), (14) satisfait aux estimations suivantes :

$$(26) \quad |U_h^n|_h < C_1 \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N$$

$$(27) \quad k \sum_{n=0}^N \|U_h^n\|_h^2 < C_1'$$

$$(28) \quad |w_h^n|_h < C_2 \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N$$

$$(29) \quad k \sum_{n=0}^N \|w_h^n\|_h^2 < C_2'$$

où C_1, C_2, C_1', C_2' sont des constantes indépendantes de k et de h .

Démonstration

Sachant que l'on a (12), de l'inégalité (22) nous déduisons par sommation :

$$|w_h^n|_h^2 + 2k \sum_{s=1}^n \|w_h^s\|_h^2 \leq |w_{0,h}|_h^2 < C_0^2$$

d'où l'on déduit facilement (28) et (29).

Dans (21) nous posons : $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ et $\eta = \frac{\nu}{hM(U_h^n)}$ alors grâce au lemme 3.7, nous aurons :

$$\begin{aligned} |U_h^{n+1}|_h^2 - |U_h^n|_h^2 + \nu k \delta \|U_h^n\|_h^2 &\leq k^2 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right) (2 |\xi|^2 |w_h^n|_h^2 + \\ &\quad + 2 |F_h^n|_h^2) + 2k(|\xi|_h^2 |w_h^n|_h^2 + |F_h^n|_h^2) + k |U_h^n|_h^2 \end{aligned}$$

ce qui, en utilisant les résultats précédents, et après sommations nous conduit à l'inégalité

$$|U_h^n|_h^2 + \nu k \delta \sum_{s=0}^{n-1} \|U_h^s\|_h^2 \leq C + k \sum_{s=0}^{n-1} |U_h^s|_h^2$$

où C est une constante positive.

A fortiori, nous avons : $|U_h^n|_h^2 \leq C + k \sum_{s=0}^{n-1} |U_h^s|_h^2$, ce qui, en appliquant le lemme 3.5, démontre (26). De même nous avons :

$$\delta \nu k \sum_{s=0}^{N-1} \|U_h^s\|_h^2 \leq C + kNC_1^2 \leq C + TC_1^2$$

Or sachant que :

$$\|U_h^N\|_h \leq \frac{2\sqrt{2}}{h} |U_h^N|_h \text{ et } \frac{4\nu k}{h^2} < 1$$

nous avons :

$$\nu k \|U_h^N\|_h^2 \leq \frac{8\nu k}{h^2} |U_h^N|_h^2 < 2C_1^2$$

d'où résulte (29).

IV. ETUDE DE LA CONVERGENCE

Nous supposons que la frontière de $\mathbf{R}^2 - \bar{\Omega}$ est identique à la frontière Γ de Ω .

IV.1. Notations et définitions

Introduisons les notations suivantes : $-\sigma_{M_0}$ est le parallélogramme ouvert de centre $M_0(= (ih, jh) \in \mathcal{R}_h^0)$ de côté h , autrement dit, σ_{M_0} est le pavé :

$$\left] \left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i + \frac{1}{2} \right) h \left[X \left(j - \frac{1}{2} \right) h, \left(j + \frac{1}{2} \right) h \left[$$

$-\sigma_{M_1}$ est le parallélogramme ouvert de centre $M_1(= ((i + \frac{1}{2})h, jh) \in \mathcal{R}_h^1)$ de côté h , autrement dit, σ_{M_1} est le pavé :

$$\left] ih, (i + 1)h \left[X \left(j - \frac{1}{2} \right) h, \left(j + \frac{1}{2} \right) h \left[$$

$-\sigma_{M_2}$ est le parallélogramme ouvert de centre $M_2(= (ih, (j + \frac{1}{2})h) \in \mathcal{R}_h^2)$ de côté h , autrement dit, σ_{M_2} est le pavé :

$$\left] \left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i + \frac{1}{2} \right) h \left[X jh, (j + 1)h \left[$$

$-\mathcal{W}_{M_i}$ est la fonction caractéristique du parallélogramme σ_{M_i} , ($i = 0, 1, 2$)

$$-\rho_{M_i} = \sigma_{M_i} \cup \sigma_{M_i \pm \frac{h}{2}}, \quad (i = 0, 1, 2)$$

Introduisons, pour chaque h , les opérateurs suivants :

$$\forall \Phi \in H_{1,h}; \forall \varphi \in H_{2,h}; \forall X \in \mathbf{R}^2, \quad (X = (x_1, x_2))$$

$(\tilde{p}_{1,h}\Phi)(X) = \{ \Phi^{(1)}(M_1), \Phi^{(2)}(M_2) \}$, M_i étant un point du réseau \mathcal{R}_h^i , centre du paralléloétope σ_{M_i} contenant x_i , ($i = 1, 2$).

$$(\tilde{p}_{2,h}\varphi)(X) = \varphi(M_0), M_0 \in \mathcal{R}_h^0,$$

centre du paralléloétope σ_{M_0} contenant X . Nous avons alors :

$$\tilde{p}_{1,h} \in \mathcal{L}(H_{1,h}, (L^2(\mathbf{R}^2))^2); \tilde{p}_{2,h} \in \mathcal{L}(H_{2,h}, L^2(\mathbf{R}^2))$$

De même, nous définissons $p_{1,h}$ (resp $p_{2,h}$) comme étant la restriction à Ω de l'opérateur $\tilde{p}_{1,h}$ (resp $\tilde{p}_{2,h}$), et nous avons :

$$p_{1,h} \in \mathcal{L}(H_{1,h}, (L^2(\Omega))^2); \quad p_{2,h} \in \mathcal{L}(H_{2,h}, L^2(\Omega))$$

notons $\{ U_h, w_h \}$ le couple de fonctions en escalier défini sur $]0, T[$ à valeurs dans $\mathbf{V}_h \times H_{2,h}$ et dont les valeurs sont les suivantes : $U_h(t) = U_h^n$, $w_h(t) = w_h^n$ pour $t \in [nk, (n+1)k[$ ($n = 0, \dots, N-1$). De même notons F_h la fonction en escalier définie sur $]0, T[$ à valeur dans $H_{1,h}$ telle que : $F_h(t) = F_h^n$ pour

$$t \in [nk, (n+1)k[\quad (n = 0, \dots, N-1).$$

IV.2. Énoncé du théorème de convergence

Soit $\{ U, w \}$ l'unique solution du problème (1) ... (5).

Supposons que :

$$\begin{aligned} p_{1,h}U_{0,h} &\rightarrow U_0 \text{ dans } (L^2(\Omega))^2 \\ p_{2,h}w_{0,h} &\rightarrow w_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \\ p_{1,h}F_h &\rightarrow F \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2) \end{aligned}$$

Alors nous avons le théorème :

Théorème 4.1

Dans le cas du schéma (13), (14), lorsque h et k tendent vers zéro, en vérifiant (23), alors, nous avons :

$$(30) \quad p_{1,h}U_h \rightarrow U \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2) \text{ faible} \cap L^2(0, T, (L^2(\Omega))^2) \text{ fort}$$

$$(31) \quad p_{2,h}w_h \rightarrow w \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible} \cap L^2(Q) \text{ fort}$$

$$(32) \quad p_{1,h}\nabla_s U_h \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_s} \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2) \text{ faible, } (s = 1, 2)$$

$$(33) \quad p_{2,h}\nabla_s w_h \rightarrow \frac{\partial w}{\partial x_s} \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible, } (s = 1, 2)$$

REMARQUE

Si la dimension d'espace est > 2 , la solution du problème (1) ... (5) n'étant pas unique, les propriétés (30), (31), (32), (33) sont encore vraies, mais seulement pour une sous-suite extraite de la famille $\{U_k, w_k\}$.

Lemme 4.1

Il existe une sous-suite extraite de la famille des $\{U_h, w_h\}$ (que nous noterons encore $\{U_h, w_h\}$) et un couple de fonctions $\{Y, z\}$ tels que :

$$Y \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2) \cap L^2(0, T; V)$$

et

$$z \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

et, lorsque h et k tendent vers zéro, nous avons :

$$(34) \quad p_{1,h} U_h \rightarrow Y \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2) \text{ faible}$$

$$(35) \quad p_{2,h} w_h \rightarrow z \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

$$(36) \quad p_{1,h} \nabla_s U_h \rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x_s} \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2) \text{ faible}$$

$$(37) \quad p_{2,h} \nabla_s w_h \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x_s} \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

Démonstration

On a évidemment pour toute $\Phi_h \in H_{1,h}$ et $\varphi_h \in H_{2,h}$

$$|p_{1,h} \tilde{\Phi}_h| = |\Phi_h|_h; |p_{1,h} \tilde{\nabla}_s \Phi_h| \leq \|\Phi_h\|_h$$

et

$$|p_{2,h} \tilde{\varphi}_h| = |\varphi_h|_h; |p_{2,h} \tilde{\nabla}_s \varphi_h| \leq \|\varphi_h\|_h$$

D'où, d'après le théorème 3.1, il résulte que : $p_{1,h} U_h$ est borné dans

$$L^\infty(0, T; (L^2(\mathbf{R}^2))^2) \text{ et } p_{2,h} w_h$$

est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathbf{R}^2))$, il existe donc une sous-suite extraite de la famille $\{U_h\}$, et une sous-suite extraite de la famille $\{w_h\}$, et telles que, lorsque k et h tendent vers zéro, nous avons :

$$- p_{1,h} U_h \rightarrow \tilde{Y} \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\mathbf{R}^2))^2) \text{ faible}$$

$$- p_{2,h} w_h \rightarrow \tilde{z} \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbf{R}^2)) \text{ faible}$$

$$- p_{1,h} \nabla_s U_h \rightarrow \tilde{Y}_s \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\mathbf{R}^2))^2) \text{ faible}$$

$$- p_{2,h} \nabla_s w_h \rightarrow \tilde{z}_s \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}^2)) \text{ faible}$$

Il est facile alors de montrer que $p_{1,h} \tilde{\nabla}_s U_h \rightarrow \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_s}$ au sens des distributions et que par conséquent $\tilde{Y}_s = \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_s}$, alors on déduit que $p_{1,h} \operatorname{div}_h U_h \rightarrow \operatorname{div} \tilde{Y}$, or, puisque $p_{1,h} \operatorname{div}_h U_h = 0$ pour tout h , on a : $\operatorname{div} \tilde{Y} = 0$.

Le même raisonnement conduit à : $p_{2,h} \tilde{\nabla}_s w_h \rightarrow \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_s}$ au sens des distributions, d'où $\tilde{z}_s = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_s}$, enfin, si \mathcal{F} est un fermé quelconque de $\mathbf{R}^2 - \bar{\Omega}$, alors, pour h suffisamment petit nous avons : $p_{1,h} U_h = 0 = p_{2,h} w_h$ dans \mathcal{F} donc $\tilde{Y} = 0 = \tilde{z}$ dans \mathcal{F} d'où l'on déduit : $\tilde{Y} = 0 = \tilde{z}$ dans $\mathbf{R}^2 - \bar{\Omega}$ donc $\tilde{Y} = 0 = \tilde{z}$ presque partout sur Γ . Ceci est dû, d'une part à l'hypothèse faite sur la frontière de $\mathbf{R}^2 - \bar{\Omega}$, et d'autre part à la continuité de l'opérateur « trace » γ ,

$$\gamma \in \mathcal{L}(H^1(\mathbf{R}^2 - \bar{\Omega}), L^2(\Gamma)).$$

Soit maintenant Y (resp z) la restriction de \tilde{Y} (resp \tilde{z}) à Ω , alors le couple de fonctions $\{ Y, z \}$ vérifie les propriétés du lemme.

REMARQUE

Nulle part dans la démonstration n'intervient la dimension de l'espace, aussi reste-t-elle vraie pour $m > 2$. Nous allons maintenant donner un résultat de convergence forte.

Lemme 4.2

$$(38) \quad p_{1,h} U_h \rightarrow Y \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2) \text{ fort}$$

$$(39) \quad p_{2,h} w_h \rightarrow z \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ fort}$$

Démonstration

Le principe est dû à Raviart [11], elle est analogue à celle qui est traitée dans [13], [14] et dans [5].

Lemme 4.3

Posons : $\mathcal{Q} = \Omega \times]0, T[$, soit $\Phi \in \zeta(0, T; \mathbf{V}) \cap (\zeta(\bar{\mathcal{Q}}))^2$ nous supposons que le support de Φ est contenu dans $\Omega \times]0, T[$. Alors, il existe une suite de fonctions Φ_h de $]0, T[$ dans \mathbf{V}_h qui converge avec toutes ses différences premières, vers Φ et ses dérivées correspondantes, uniformément lorsque h tend vers zéro.

La démonstration de ce lemme est analogue à celle qui se trouve dans [5] Notons que les composantes de $\Phi_h = \{ \Phi_{i+1/2,j}^{(1)}, \Phi_{i,j+1/2}^{(2)} \}$ ne s'expriment pas aux mêmes points.

Nous pouvons ainsi énoncer :

Lemme 4.4

Soit $\Phi \in \zeta(0, T; V) \cap [\zeta^\infty(\bar{Q})]^2$ telle que son support soit contenu dans $\Omega \times [0, T]$, avec $\Phi(T) = 0$. Soit Φ_h une fonction de $[0, T]$ dans V_h satisfaisant le lemme précédent. Posons : $\Phi_h^n = \Phi_h(nk)$, $0 \leq n \leq N$, alors, lorsque h et k tendent vers zéro, nous avons :

$$(40) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{k} (U_h^{n+1} - U_h^n, \Phi_h^n)_h \rightarrow - \int_0^T \left(Y(t), \frac{d\Phi(t)}{dt} \right) dt - (U_0 - \Phi(0))$$

$$(41) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} b_{1,h}(U_h^n, U_h^n, \Phi_h^n) \rightarrow \int_0^T b_1(Y(t), Y(t), \Phi(t)) dt$$

$$(42) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} ((U_h^n, \Phi_h^n))_h \rightarrow \int_0^T ((Y(t), \Phi(t))) dt$$

$$(43) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} (F_h^n, \Phi_h^n)_h \rightarrow \int_0^T (F(t), \Phi(t)) dt$$

$$(44) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} (\xi w_h^n, \Phi_h^n)_h \rightarrow \int_0^T (\xi z(t), \Phi(t)) dt$$

Démonstration

Elle est analogue à celle qui se trouve dans [5] et dans [15], seulement le lecteur devra faire attention au fait que les deux composantes de U_h ne s'expriment pas aux mêmes points.

Maintenant, introduisons comme dans Céa [2], l'opérateur linéaire τ_h qui applique ici : $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_{2,h}$. Pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ nous avons : $\tau_h v = v_h$ avec $v_h(M_0) = v(M_0)$, $\forall M_0 \in \Omega_h^0$. Soit $\psi \in \zeta^1([0, T])$ avec $\psi(T) = 0$; posons : $\psi^n = \psi(nk)$, ($n = 0, \dots, N$). Soit v choisie dans $\mathcal{D}(\Omega)$; on écrit (14) avec $\varphi = v_h = \tau_h v$, on multiplie (14) par ψ^n et on ajoute toutes ces égalités pour $n = 0, 1, \dots, (N-1)$, il en résulte :

$$(45) \quad \sum_{n=0}^{N-1} (w_h^{n+1} - w_h^n, \psi^n v_h)_h + k \sum_{n=0}^{N-1} ((w_h^{n+1}, \psi^n v_h))_h + \\ + k \sum_{n=0}^{N-1} b_{2,h}(U_h^n, w_h^{n+1}, \psi^n v_h) = 0$$

ce qui s'écrit :

$$(46) \quad - \sum_{n=1}^N (w_h^n, (\psi^n - \psi^{n-1})v_h)_h + k \sum_{n=0}^{N-1} ((w_h^{n+1}, \psi^n v_h))_h + \\ + k \sum_{n=0}^{N-1} b_{2,h}(U_h^n, w_h^{n+1}, \psi^n v_h) = (w_{0,h}, \psi^0 v_h)_h$$

Nous pouvons ainsi énoncer le lemme :

Lemme 4.5

Sous les hypothèses précédentes faites sur ψ et sur v_h , lorsque h et k tendent vers zéro, nous avons :

$$(47) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{k} (w_h^{n+1} - w_h^n, \psi^n v_h)_h \rightarrow - \int_0^T (z(t), \psi'(t)v) dt - (w_0, \psi(0)v)$$

$$(48) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} b_{2,h}(U_h^n, w_h^{n+1}, \psi^n v_h) \rightarrow \int_0^T b_2(\mathbf{Y}(t), z(t), \psi(t)v) dt$$

$$(49) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} ((w_h^{n+1}, \psi^n v_h))_h \rightarrow \int_0^T ((z(t), \psi(t)v)) dt$$

Démonstration

Voir [15].

Démonstration du théorème IV.1

Soit Φ une fonction satisfaisant les hypothèses du lemme 4.4, et soit Φ_h une fonction associée comme dans le lemme 4.3. De même φ une fonction satisfaisant les hypothèses du lemme 4.5, et φ_h une fonction associée.

Si dans (13) et (14) nous remplaçons Φ par Φ_h^n , et φ par φ_h^n ,

Si nous sommes de $n = 0$ à $N - 1$, et si nous faisons tendre h et k vers zéro, d'après les lemmes précédents, nous obtenons à la limite :

$$(50) \quad \int_0^T \left\{ - \left(Y(t), \frac{d\Phi(t)}{dt} \right) + b_1(\mathbf{Y}(t), \mathbf{Y}(t), \Phi(t)) + v((Y(t), \Phi(t))) + \right. \\ \left. + (\xi z(t), \Phi(t)) \right\} dt = \int_0^T (F(t), \Phi(t)) dt + (U_0, \Phi(0))$$

$$(51) \quad \int_0^T \left\{ - \left(z(t), \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) + b_2(Y(t), z(t), \varphi(t)) + ((z(t), \varphi(t))) \right\} dt = \\ = (w_0, \varphi(0))$$

Comme le couple de fonctions $\{\Phi, \varphi\}$ est choisi arbitrairement dans un ensemble dense de l'espace, produit des espaces qui interviennent dans la définition du problème (I.2), on en déduit que le couple de fonctions $\{Y, z\}$ est une solution du problème (1) ... (5), or, dans le cas où la dimension de l'espace est égale à 2, la solution est unique (cf. [15]) et par suite nous avons : $U = Y$ et $w = z$.

C.Q.F.D.

REMARQUES

1) Puisqu'il n'y a qu'une seule limite, c'est toute la famille $\{U_h, w_h\}$ qui converge et non seulement une sous-suite extraite.

2) Dans l'étude du problème (1) ... (5), nous aurions pu considérer l'équation (3) avec un second membre non nul, c'est-à-dire l'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + U \cdot \text{grad } w = f(x, t)$$

où $f(x, t)$ est une fonction scalaire convenablement choisie; alors, tout ce qui a été dit reste valable.

V. RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DIFFERENCES

Cette question a été longuement traitée dans [5] et dans [15], aussi, ici, nous nous contenterons d'énoncer les principaux résultats. Nous aurons à résoudre, à chaque pas dans le temps, le système d'équations aux différences suivant :

$$(52) \quad (U_h^{n+1}, \Phi)_h = (U_h^n, \Phi)_h - k\nu((U_h^n, \Phi))_h - kb_{1,h}(U_h^n, U_h^n, \Phi) - k(\xi w_h^n, \Phi)_h + k(F_h^n, \Phi), \quad \forall \Phi \in V_h$$

$$(53) \quad (w_h^{n+1}, \varphi)_h + k((w_h^{n+1}, \varphi))_h + kb_{2,h}(U_h^n, w_h^{n+1}, \varphi) = (w_h^n, \varphi)_h, \quad \forall \varphi \in H_{2,h}$$

$$(54) \quad \text{div}_h U^{n+1} = 0 \quad \text{en tout point de } \mathcal{R}_h^0$$

$$(55) \quad U^{n+1} = 0 \quad \text{en tout point de } (\mathcal{R}_h^1 \times \mathcal{R}_h^2) - (\Omega_h^1 \times \Omega_h^2)$$

$$(56) \quad w^{n+1} = 0 \quad \text{en tout point de } \mathcal{R}_h^0 - \Omega_h^0.$$

Les équations (54) et (55) expriment que $U^{n+1} \in V_h$, alors que l'équation (56) exprime que $w^{n+1} \in H_{2,h}$.

Ainsi, connaissant $\{ U_0, w_0 \}$, grâce à (52), (54), (55) nous pouvons calculer U^1 ce qui nous permet d'avoir w^1 grâce à (53), (56) et ainsi de suite. Donc connaissant $\{ U^n, w^n \}$ nous opérons en deux temps pour calculer $\{ U^{n+1}, w^{n+1} \}$.

1^{er} temps : Calcul de U^{n+1}

Posons :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_h &= \left\{ \left(i + \frac{1}{2} \right) h, \left(j + \frac{1}{2} \right) h / i, j \in \mathbf{Z} \right\} \\ \tilde{\Omega}_h &= \left\{ \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h, \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) \in \tilde{\mathcal{R}}_h / \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h, jh \right), \right. \\ &\quad \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h, (j + 1)h \right) \in \Omega_h^1 \quad \text{et} \quad \left(ih, \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right), \\ &\quad \left. \left((i + 1)h, \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) \in \Omega_h^2 \right\} \end{aligned}$$

La méthode consiste à rechercher une base de V_h et à exprimer (52) pour chaque fonction Φ de cette base.

Soit \tilde{K}_h l'espace des fonctions scalaires ψ définies sur \tilde{R}_h , nulles à l'infini, telles que :

$$\tilde{\delta}_x \psi = \tilde{\delta}_y \psi = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{R}_h - \tilde{\Omega}_h,$$

où par définition

$$(\tilde{\delta}_x \psi)_{i,j+1/2} = \psi_{i+1/2,j+1/2} - \psi_{i-1/2,j+1/2};$$

$$(\tilde{\delta}_y \psi)_{i+1/2,j} = \psi_{i+1/2,j+1/2} - \psi_{i+1/2,j-1/2}$$

nous aurons alors le résultat suivant :

Lemme 5.1

V_h est l'ensemble des fonctions vectorielles $\Phi = \{ \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \}$ pour lesquelles il existe une fonction $\psi \in \tilde{K}_h$ telle que :

$$(57) \quad \Phi^{(1)} = \tilde{\delta}_y \psi \quad \text{et} \quad \Phi^{(2)} = -\tilde{\delta}_x \psi$$

pour chaque $\Phi \in V_h$ la fonction ψ est unique.

Démonstration

Voir [5] et [15].

Considérons maintenant une base de \tilde{K}_h formée des fonctions ψ égales à 1 en un point P de $\tilde{\Omega}_h^*$ et nulles partout ailleurs. ($\tilde{\Omega}_h^* = \tilde{R}_h - \tilde{G}_h$ où \tilde{G}_h est l'ensemble des points P de \tilde{R}_h tels que $\psi(P) = 0, \forall \psi \in \tilde{K}_h$). Nous prendrons alors, comme base de V_h , l'image de cette base par l'opérateur (57), c'est-à-dire l'ensemble des fonctions Φ telles que :

$$\Phi_{i+1/2,j}^{(1)} = -1, \Phi_{i+1/2,j+1}^{(1)} = +1, \Phi^{(1)} = 0 \text{ partout ailleurs}$$

$$\Phi_{i,j+1/2}^{(2)} = +1, \Phi_{i+1,j+1/2}^{(2)} = -1, \Phi^{(2)} = 0 \text{ partout ailleurs.}$$

D'où, en écrivant (52) pour chacune de ces fonctions, nous obtenons des équations de la forme :

$$(58) \quad (u_{i+1/2,j+1}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^{n+1}) - (v_{i+1,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j+1/2}^{n+1}) = \tilde{A}_{i,j}^n$$

où $\tilde{A}_{i,j}^n$ exprime les différentes fonctions au temps n .

D'où, d'après le lemme 5.1, de (58) nous tirons le système d'équation.

$$(59) \quad \begin{cases} \Delta_h \psi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{h^2} \tilde{A}_{i,j}^n \\ \psi_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} = 0 \quad \text{en tout point de } \tilde{R}_h - \tilde{\Omega}_h^* \end{cases}$$

où

$$(60) \quad \Delta_h \psi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{h^2} (\psi_{i+1/2, j+3/2} + \psi_{i+1/2, j-1/2} + \psi_{i+3/2, j+1/2} + \psi_{i-1/2, j+1/2} - 4\psi_{i+1/2, j+1/2})$$

Nous sommes donc amenés à résoudre un problème de Dirichlet discret, nous calculerons ensuite le vecteur U^{n+1} au moyen des formules :

$$u_{i+1/2, j}^{n+1} = \psi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - \psi_{i+1/2, j-1/2}^{n+1}; \quad v_{i, j+1/2}^{n+1} = -(\psi_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - \psi_{i-1/2, j+1/2}^{n+1})$$

2^e temps : Calcul de w^{n+1}

Il est en tout point analogue à celui traité dans [15].

REFERENCES

- [1] BOURBAQUI, *Intégration*, Chapitre 1/4, Act. Sc. Ind., Paris, Hermann, 1966.
- [2] J. CEA, *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 14, 2 (1964), 345-444.
- [3] P. S. CHERNYAKOV, *On non stationary free convection in a bounded region*, Zh. Vychisl. Mat. mat. Fiz, 6, 2, 288-303, 1966.
- [4] A. J. CHORIN, *On the convergence of discrete approximation to the Navier-Stokes equations*, Courant Institute of Mathematical Sciences.
- [5] JAMET-LASCAUX-RAVIART, *Une méthode de résolution numérique des équations de Navier-Stokes*. Numer. Math. 16, 93-114 (1970).
- [6] A. KRZYWICKI, *On a new finite difference scheme for the non stationary Navier-Stokes equations*. Colloquium mathematicum, vol. XIX, fasc. 1, 1968.
- [7] A. KRZYWICKI, *On finite difference approximation to steady-state solutions of the Navier-Stokes equations*, Colloquium mathematicum, vol. XIX, fasc. 1, 1968.
- [8] LADYZENSKAYA, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*.
- [9] J. L. LIONS, *Équations différentielles-opérationnelles et problèmes aux limites*, Springer-Verlag, 1961.
- [10] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969.
- [11] P. A. RAVIART, *Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires* (Thèse Sc. Math., Paris).
- [12] P. A. RAVIART (à paraître).
- [13] R. TEMAM, *Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes*, Bull. Soc. Math. de France, 96, 1968, 115-152.
- [14] R. TEMAM, *Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires*.
- [15] J. C. ZENOUDA, *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes couplées à celle de la chaleur*, thèse de 3^e cycle, Paris, 1970.