

# REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

A. AUSLENDER

## Méthodes et théorèmes de dualité

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 4, n° R1 (1970), p. 9-45

<[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1970\\_\\_4\\_1\\_9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_1_9_0)>

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## METHODES ET THEOREMES DE DUALITE

par A. AUSLENDER <sup>(1)</sup>

---

*Résumé. — Le but de cet article est d'élaborer une théorie générale sur les méthodes duales appliquées aux problèmes d'optimisation. A un certain type général de problèmes d'optimisation on fait correspondre un problème dual et on établit alors des théorèmes de correspondance mutuelle entre les problèmes en dualité. Ensuite on propose un ensemble de méthodes qui permet de résoudre le problème dual et par là même le problème initial.*

Si l'on sait bien résoudre les problèmes de contrôle optimal avec contraintes sur le contrôle uniquement le problème se complique fortement lorsque l'on veut résoudre les problèmes de contrôle avec contraintes sur l'état et sur le contrôle.

L'idée est alors de séparer ces deux sortes de contraintes et par conséquent de faire appel à des notions duales.

On pose d'abord le problème général  $P_1$  dans lequel s'intègrent les problèmes de contrôle avec contraintes sur l'état et sur le contrôle, les problèmes de meilleure approximation au sens de Tchebycheff, les problèmes de programmation linéaire continue. Puis dans un premier paragraphe on écrit le dual  $P_2$ , on établit un théorème qui permet de voir que la résolution du problème  $P_2$  entraîne la résolution du problème  $P_1$  ainsi que des théorèmes de continuité et de dérivabilité.

Dans un second paragraphe, on propose des méthodes permettant de résoudre le problème  $P_2$ . Plus particulièrement on propose d'abord une méthode originale qui est une méthode de déplacements admissibles dans un espace de mesures. Partant de l'idée qu'à tout opérateur « min » correspond une notion duale on étend alors aux E.V.T.L.C.S. la méthode de Cheney Goldstein, la méthode des pénalités dont on montre de façon précise le caractère dual ce qui permet d'éclairer la convergence de ces méthodes, démontrée ici par des arguments de type dual. On démontre aussi par des arguments duaux la convergence de méthodes de discrétisation.

(1) Université de Clermont-Ferrand.

Au paragraphe III, on intègre le problème  $P_1$  dans un formalisme plus général. Au paragraphe IV on montre comment la théorie précédente permet de résoudre des problèmes de contrôle avec contraintes sur l'état et sur le contrôle. Au paragraphe V, on présente quelques exemples numériques traités sur IBM 360/67 au Laboratoire de Calcul de Grenoble.

### O. Position du problème

Soit  $X$  un espace vectoriel topologique localement convexe séparé,  $Q$  un sous-ensemble de  $X$ ,  $f$  une fonction numérique définie sur  $Q$ ,  $K$  un compact, métrisable,  $g_i$ ,  $i = 1 \dots p$  des fonctions numériques définies sur  $Q \times K$ .

Les problèmes de contrôle avec contraintes sur l'état et le contrôle, les problèmes de meilleure approximation s'énoncent sous la forme du problème  $P_1$  :

$P_1$  : « Trouver un point  $x^*$  dans  $D$ , s'il existe, tel que :

$$f^* = f(x^*) = \min (f(x) \mid x \in D). »$$

$D$  étant le sous-ensemble de  $Q$  défini par :

$$D = \{ x \in Q : g_i(x, t) \leq 0 \quad \forall t \in K, \quad i = 1 \dots p \}.$$

On note :

$C_p$  l'ensemble des fonctions définies et continues sur  $K$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}^p$ , muni de la norme du max.

$C_p^+$  le sous-ensemble de  $C_p$  formé des fonctions dont les composantes sont positives.

$C_p^-$  le sous-ensemble de  $C_p$  formé des fonctions dont les composantes sont négatives.

$C_p^*$  le dual topologique de  $C_p$ . Tout élément de  $C_p^*$  est une mesure vectorielle  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$  dont les composantes appartiennent à  $C_1^*$  et tel que :

$$\langle \sigma, h \rangle = \sigma(h) \quad \forall h \in C_p$$

$C_p^{*+}$  le sous-ensemble de  $C_p^*$  formé des mesures positives.

**Dans les paragraphes 1, 2, 3**

1) on ne considérera que le sous-ensemble  $C_p^{*+}$  de  $C_p^*$  ;

2) tout énoncé à caractère topologique sous-entendra que :

a)  $Q$  est muni de la topologie induite par  $X$ .

b)  $C_p$  est muni de la topologie de la norme.

c)  $C_p^{*+}$  est muni de la topologie faible\*  $\sigma(C_p^*, C_p)$  c'est-à-dire la topologie vague.

3) on supposera vérifiées les hypothèses  $H_1, H_2, H_3$  :

$H_1$  : il existe un point  $\tilde{x}$  de  $Q$  tel que pour tout  $t$  de  $K$ , tout  $j$  de  $[1 \dots p]$  on ait :

$$g_j(\tilde{x}, t) < 0$$

$H_2$  :  $Q$  est compact,  $f$  est continue sur  $Q$  et pour tout  $j$  de  $[1 \dots p]$   $g_j$  est continue sur  $Q \times K$ .

$H_3$  :  $Q$  est convexe,  $f$  est convexe et pour tout  $j$  de  $[1 \dots p]$  tout  $t$  de  $K$  la fonction numérique  $x \rightarrow g_j(x, t)$  est convexe.

Si  $g_x$  est l'application à valeurs dans  $\mathbf{R}^p$  définie sur  $K$  par :

$$g_x(t) = [g_1(x, t), \dots, g_p(x, t)]$$

et si l'hypothèse  $H_2$  est réalisée, alors on peut définir sur  $C_p^{*+} \times Q$  et sur  $C_p^{*+}$  les fonctions numériques  $\Phi$  et  $\theta$  par :

$$\Phi(\sigma, x) = f(x) + \langle \sigma, g_x \rangle, \quad \theta(\sigma) = \min (\Phi(\sigma, x) \mid x \in Q)$$

et les sous-ensembles de  $Q$   $M_\sigma$ ,  $M$  par :

$$M_\sigma = \{ x \in Q : \Phi(\sigma, x) = \theta(\sigma) \}, \quad M = \{ x \in D : f(x) = f^* \}.$$

D'autre part on notera :

$$g_j^+(x, t) = \max (g_j(x, t), 0), \quad g_j^-(x, t) = \min (g_j(x, t), 0)$$

$g_x^+$  [resp  $g_x^-$ ] la fonction à valeurs de  $\mathbf{R}^p$  définie sur  $K$  par :

$$g_x^+(t) = [g_1^+(x, t), \dots, g_p^+(x, t)]$$

$$[\text{resp}] g_x^-(t) = [g_1^-(x, t), \dots, g_p^-(x, t)].$$

On remarquera enfin que la topologie  $\sigma(C_p^*, C_p)$  est métrisable pour  $C_p^{*+}$  (cf. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, tome 2, p. 107, exercice 4).

## I. Théorèmes généraux

### Théorème 1

L'application  $\sigma \rightarrow M_\sigma$  est semi-continue supérieurement.

*Démonstration :*

Il suffit de montrer que si  $\sigma_n$  est une suite arbitraire qui tend vaguement vers  $\sigma$  on a :

$$\overline{\lim} M_{\sigma_n} \subset M_\sigma, \quad \overline{\lim} M_{\sigma_n} \neq \emptyset.$$

Puisque  $Q$  est compact, si  $x_n$  est un point arbitraire de  $M_{\sigma_n}$ , la suite  $\{x_n\}$  admet au moins une valeur d'adhérence. Soit  $\bar{x}$  une valeur d'adhérence arbi-

traire de cette suite. Il existe alors une sous-suite généralisée  $\{x_{n_\alpha}\}$  qui converge vers  $\bar{x}$ . Soit  $\{\sigma_{n_\alpha}\}$  la suite généralisée associée, on a alors :

$$\lim_{\alpha} \theta(\sigma_{n_\alpha}) = f(\bar{x}) + \langle \sigma, g_{\bar{x}} \rangle. \quad (1.1)$$

En effet puisque  $f$  est continue on a :

$$\lim_{\alpha} f(x_{n_\alpha}) = f(\bar{x}).$$

D'autre part :

$$\langle \sigma_{n_\alpha}, g_{x_{n_\alpha}} \rangle - \langle \sigma, g_{\bar{x}} \rangle = \langle \sigma_{n_\alpha}, g_{x_{n_\alpha}} - g_{\bar{x}} \rangle + \langle \sigma_{n_\alpha} - \sigma, g_{\bar{x}} \rangle.$$

Comme  $\sigma_n$  tend vaguement vers  $\sigma$  on a :

$$\lim_{\alpha} \langle \sigma_{n_\alpha} - \sigma, g_{\bar{x}} \rangle = 0$$

et de plus le théorème de Banach-Steinhaus, page 60 [7] permet d'affirmer que la suite  $\{\sigma_n\}$  est bornée en norme. On a alors :

$$|\langle \sigma_{n_\alpha}, g_{x_{n_\alpha}} - g_{\bar{x}} \rangle| \leq \|\sigma_{n_\alpha}\| \|g_{x_{n_\alpha}} - g_{\bar{x}}\|.$$

La continuité de l'application  $x \rightarrow g_x$  entraîne alors que :

$$\lim_{\alpha} \langle \sigma_{n_\alpha}, g_{x_{n_\alpha}} - g_{\bar{x}} \rangle = 0.$$

Comme d'autre part pour tout  $x$  de  $Q$  on a :

$$f(x_{n_\alpha}) - f(x) + \langle \sigma_{n_\alpha}, g_{x_{n_\alpha}} - g_x \rangle \leq 0.$$

Par passage à la limite on obtient alors :

$$f(\bar{x}) + \langle \sigma, g_{\bar{x}} \rangle \leq f(x) + \langle \sigma, g_x \rangle$$

et par conséquent  $\bar{x}$  appartient à  $M_\sigma$ .

C.Q.F.D.

Considérons maintenant l'hypothèse  $H_4$ , vérifiée en particulier lorsque  $f$  est strictement convexe :

$H_4$  : « Pour tout élément  $\sigma$  dans  $C_p^{*+}$  l'ensemble  $M_\sigma$  est réduit à un seul point  $x(\sigma)$  ».

## Théorème 2

La fonction numérique  $\theta$  définie sur  $C_p^{*+}$  est concave, continue. Si l'hypothèse  $H_4$  est vérifiée, elle admet en tout point  $\sigma$ , pour toute direction

$$h = \sigma_1 - \sigma, \sigma_1 \in C_p^{*+}$$

une dérivée directionnelle  $V_\theta(\sigma, h)$  définie par :  $V_\theta(\sigma, h) = \langle h, g_{x(\sigma)} \rangle$

*Démonstration :*

- a) La fonction  $\theta$  est concave comme minimum de formes continues affines.
- b) Le théorème 1 montre que  $\theta$  est continue.
- c) Supposons  $H_4$  vérifiée. Soient alors  $\sigma_1, \sigma_3$  des éléments de  $C_p^{*+}$ ,  $\varepsilon$  un point de l'intervalle  $[0, 1]$  ; posons :

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \varepsilon(\sigma_3 - \sigma_1).$$

On a alors :

$$f[x(\sigma_1)] + \langle \sigma_1, g_{x(\sigma_1)} \rangle = \theta(\sigma_1) \leq f[x(\sigma_2)] + \langle \sigma_1, g_{x(\sigma_2)} \rangle,$$

$$f[x(\sigma_2)] + \langle \sigma_2, g_{x(\sigma_2)} \rangle = \theta(\sigma_2) \leq f[x(\sigma_1)] + \langle \sigma_2, g_{x(\sigma_1)} \rangle.$$

Ces inégalités entraînent alors que :

$$\langle \sigma_2 - \sigma_1, g_{x(\sigma_2)} \rangle \leq \theta(\sigma_2) - \theta(\sigma_1) \leq \langle \sigma_2 - \sigma_1, g_{x(\sigma_1)} \rangle.$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon \langle \sigma_3 - \sigma_1, g_{x[\sigma_1 + \varepsilon(\sigma_3 - \sigma_1)]} \rangle &\leq \theta[\sigma_1 + \varepsilon(\sigma_3 - \sigma_1)] - \theta(\sigma_1) \\ &\leq \varepsilon \langle \sigma_3 - \sigma_1, g_{x(\sigma_1)} \rangle. \end{aligned}$$

La continuité de l'application  $\sigma \rightarrow x(\sigma)$  (théorème 1) et de l'application  $x \rightarrow g_x$  entraîne alors le théorème :

### **Théorème 3**

**Pour tout réel  $\lambda$  l'ensemble  $S_\lambda = \{ \sigma \in C_p^{*+} : \theta(\sigma) \geq \lambda \}$  est un convexe fortement borné, fermé pour la topologie  $\sigma(C_p^*, C_p)$  donc compact pour cette topologie.**

*Démonstration :*

La continuité de l'application  $\theta$  entraîne que  $S_\lambda$  est fermé. Montrons que  $S$  est borné.

D'après l'hypothèse 1 il existe  $\tilde{x}$  tel que :

$$-g_j(\tilde{x}, t) > \delta > 0 \quad \forall i = 0 \dots p, t \in K.$$

Par conséquent  $\forall \sigma$  de  $C_p^{*+}$  on a :

$$-\langle \sigma, g_{\tilde{x}} \rangle > \delta \|\sigma\|.$$

Si  $S_\lambda$  n'était pas borné il existerait une suite  $\{\sigma_n\}$  dans  $S_\lambda$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n\| = +\infty \text{ et l'on a alors :}$$

$$\lambda \leq \theta(\sigma_n) \leq f(\tilde{x}) + \langle \sigma_n, g_{\tilde{x}} \rangle \leq f(\tilde{x}) - \delta \|\sigma_n\|.$$

En passant à la limite on obtient alors une contradiction. D'après le théorème d'Alaglou  $S_\lambda$  est alors compact pour la topologie vague.

Définissons maintenant le problème dual  $P_2$  :

$P_2$  : « Trouver s'il existe un point  $\bar{\sigma}$  dans  $C_p^{*+}$  tel que :

$$\bar{\theta} = \theta(\bar{\sigma}) = \max (\theta(\sigma) \mid \sigma \in C_p^{*+}).$$

#### Théorème 4

a) Pour tout élément  $\sigma$  de  $C_p^{*+}$ , tout  $x$  de  $D$  on a l'inégalité :

$$\theta(\sigma) \leq f(x),$$

b) il existe un point  $\bar{\sigma}$  de  $C_p^{*+}$  qui résout le problème  $P_2$ ,

c) pour qu'un point  $\bar{\sigma}$  soit solution du problème  $P_2$  il suffit qu'il existe un point  $\bar{x}$  de  $M_{\bar{\sigma}}$  tel que le couple  $(\bar{x}, \bar{\sigma})$  vérifie les relations :

$$\bar{x} \in D, \quad \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle = 0, \quad (1.2)$$

et dans ce cas  $\bar{x}$  est la solution optimale de  $P_1$ .

d) si  $\bar{\sigma}$  est solution optimale de  $P_2$  et si  $f$  est strictement convexe alors l'unique point  $\bar{x}$  de  $M_{\bar{\sigma}}$  est solution optimale de  $P_1$ .

*Démonstration :*

a) Pour tout point  $\sigma$  de  $C_p^{*+}$ , tout point  $y$  de  $M_\sigma$  on a :

$$\theta(\sigma) = f(y) + \langle \sigma, g_y \rangle \leq f(x) + \langle \sigma, g_x \rangle \quad \forall x \in Q.$$

En particulier pour tout point  $x$  dans  $D$  on a l'implication :

$$\langle \sigma, g_x \rangle \leq 0 \Rightarrow \theta(\sigma) \leq f(x).$$

b) Soient  $\succeq_c$  la relation d'ordre dans  $C_p$  induite par le cône  $C_p^+$ ,  $O_c$  l'origine de  $C_p$  et  $N$  le sous-ensemble de  $\mathbf{R} \times C_p$  défini par :

$$N = \{ (y, u) \in \mathbf{R} \times C_p : \exists x \in Q : y \geq f(x), u \succeq_c g_x \}.$$

D'après l'hypothèse  $H_3$   $N$  est un ensemble convexe. De plus l'intérieur de  $C_p^+$  étant non vide et composé de fonctions continues à composantes strictement positives l'intérieur  $\overset{\circ}{N}$  de  $N$  est non vide et il est formé des couples  $(y, u)$  pour lesquels il existe un point  $x$  de  $Q$  tel que :

$$y > f(x) \quad u \succ_c g_x.$$

L'ensemble  $Q$  étant compact il existe au moins un point  $\bar{x}$  qui résoud le problème  $P_1$ . Le point  $(f(\bar{x}), O_c)$  appartient à  $N$  puisque :

$$g_{\bar{x}} \leq_c O_c.$$

D'autre part le point  $(f(\bar{x}), O_c)$  n'appartient pas à  $\overset{\circ}{N}$  sinon il existerait un point  $x$  dans  $Q$  tel que :

$$f(x) < f(\bar{x}), \quad g_x <_c O_c.$$

ce qui est en contradiction avec le fait que  $\bar{x}$  est solution optimale de  $P_1$ .

D'après le théorème 2.15, page 27 [19] qui est un corollaire du théorème de Hahn-Banach il passe alors par le point  $(f(\bar{x}), O_c)$  un hyperplan fermé de support à  $N$ , c'est-à-dire il existe une fonctionnelle linéaire continue  $(\bar{r}, \bar{\sigma})$  de  $\mathbf{R} \times C_p^*$  telle que :

$$\bar{r} \cdot y + \langle \bar{\sigma}, u \rangle \geq \bar{r} \cdot f(\bar{x}) \quad \forall (y, u) \in N. \quad (1)$$

L'implication :

$$x \in Q \Rightarrow (f(x), g_x) \in N$$

entraîne alors :

$$\bar{r} \cdot f(x) + \langle \bar{\sigma}, g_x \rangle \geq \bar{r} \cdot f(\bar{x}) \quad \forall x \in Q. \quad (2)$$

De même puisque le point  $(f(\bar{x}), O_c)$  appartient à  $N$  on a les implications :

$$u \geq_c O_c \Rightarrow (f(\bar{x}), u) \in N,$$

$$y \geq f(\bar{x}) \Rightarrow (y, O_c) \in N.$$

En posant dans l'inégalité (1)

$$y = f(\bar{x}), u \geq_c O_c \text{ [resp } y \geq f(\bar{x}), u = O_c], \text{ [resp } y = f(\bar{x}), u = g_{\bar{x}}]$$

on obtient alors la relation :

$$\bar{\sigma} \in C_p^{*+},$$

$$\text{[resp]} \bar{r} \geq 0.$$

$$\text{[resp]} \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle = 0. \quad (3)$$

$\bar{r}$  ne peut être nul car dans ce cas :

$$\langle \bar{\sigma}, g_x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \bar{\sigma}, g_x \rangle = 0 \quad \forall x \in D$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse  $H_1$ . Ains  $\bar{r}$  est strictement positif et les relations 2 et 3 permettent d'affirmer que le point  $\bar{\sigma}'$  de  $C_p^{*+}$  défini par :

$$\bar{\sigma}' = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{r}}$$



vérifie la relation :

$$f(x) + \langle \bar{\sigma}', g_x \rangle \geq f(\bar{x}) + \langle \bar{\sigma}', g_{\bar{x}} \rangle \quad \forall x \in Q.$$

Par conséquent  $\bar{x}$  appartient à  $M_{\bar{\sigma}'}$ , et de plus :

$$\theta(\bar{\sigma}') = f(\bar{x}).$$

D'après la propriété a) du théorème on a alors :

$$\theta(\sigma) \leq \theta(\bar{\sigma}') \quad \forall \sigma \in C_p^{*+}$$

c) Soient  $\bar{\sigma}$  un point de  $C_p^{*+}$ ,  $\bar{x}$  un point de  $M_{\bar{\sigma}}$  tel que le couple  $(\bar{\sigma}, \bar{x})$  vérifie la relation (1.2); alors pour tout point  $\sigma$  de  $C_p^{*+}$  on a la relation :

$$\theta(\bar{\sigma}) = f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) + \langle \sigma, g_{\bar{x}} \rangle \geq \theta(\sigma).$$

d) Soit  $B(\bar{\sigma}, \|\bar{\sigma}\|)$  la boule de centre  $\bar{\sigma}$  et de rayon  $\|\bar{\sigma}\|$  et :

$$S = B(\bar{\sigma}, \|\bar{\sigma}\|) \cap C_p^{*+}.$$

$S$  est vaguement compact. De plus quel que soit  $\sigma$  dans  $C_p^{*+}$  l'application numérique  $x \rightarrow \Phi(\sigma, x)$  est convexe et continue sur  $Q$  et quel que soit  $x$  dans  $Q$  l'application  $\sigma \rightarrow \Phi(\sigma, x)$  est concave et vaguement continue dans  $C_p^{*+}$ . Par conséquent le théorème du minimax nous assure que :

$$\min [(\max \Phi(\sigma, x) \mid \sigma \in S) \mid x \in Q] = \max (\theta(\sigma) \mid \sigma \in S)$$

par conséquent pour le point  $\bar{x}$  de  $M_{\bar{\sigma}}$  on a :

$$f(\bar{x}) + \langle \sigma, g_{\bar{x}} \rangle \leq f(\bar{x}) + \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle \leq f(x) + \langle \bar{\sigma}, g_x \rangle \quad \forall x \in Q, \sigma \in S.$$

Ces inégalités entraînent alors que :

$$\langle \sigma, g_{\bar{x}} \rangle \leq \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle \quad \forall \sigma \in S.$$

Soit alors  $\Delta\sigma$  une mesure positive non nulle arbitraire; alors si  $\sigma$  est défini par :

$$\sigma = \bar{\sigma} + \frac{\Delta\sigma}{\|\Delta\sigma\|} \|\bar{\sigma}\|$$

$\sigma$  est un élément de  $S$  et l'on a :

$$\langle \Delta\sigma, g_{\bar{x}} \rangle \leq 0$$

et par conséquent  $\bar{x}$  est un point  $D$ . D'autre part comme la mesure nulle est un point de  $S$  on a :

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \langle \bar{\sigma}, g_x \rangle \leq f(x) \quad \forall x \in D$$

et le point  $\bar{x}$  est solution optimale de  $P_1$ . Enfin :

$$0 \leq \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle \Rightarrow \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle = 0.$$

## II. Méthodes duales

Nous proposons maintenant d'aborder la résolution numérique du problème  $P_2$  et par là même, en vertu du théorème 4 la résolution numérique du problème  $P_1$ . On définit d'abord le sous-ensemble  $\overline{C_p^{*+}}$  de  $C_p^{*+}$  :

$$\overline{C_p^{*+}} = \{ \sigma \in C_p^{*+} : v \in C_p^+, \langle \sigma, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0 \}.$$

On se fixera dans ce paragraphe, une mesure  $\mu$  de  $\overline{C_1^{*+}}$  une fois pour toutes.

Ainsi si  $K$  est un intervalle compact de la droite numérique on choisira le plus souvent pour mesure  $\mu$  la mesure de Lebesgue qui appartient à  $\overline{C_1^{*+}}$ .

On définit alors la transformation linéaire  $J_0$  de  $C_p$  dans  $C_p^*$  qui à toute fonction  $\tilde{v}$  de  $C_p$  fait correspondre la mesure  $v = J_0 \tilde{v}$  par :

$$\langle J_0 \tilde{v}, h \rangle = \langle v, h \rangle = \int_K h \cdot \tilde{v} d\mu \quad \forall h \in C_p \quad (2.1)$$

On remarque que  $J_0 C_p^+ \subset C_p^{*+}$ .

### 1) Méthode 1 : une méthode de déplacement admissible

On suppose d'abord, pour définir cette méthode que :

a) l'hypothèse  $H_4$  est vérifiée;

b) pour tout  $\tilde{\sigma}$  de  $C_p^+$  il existe un algorithme  $A$  qui permette de calculer le point  $x_\sigma$ , où  $\sigma = J_0 \tilde{\sigma}$ .

Soit alors  $\alpha$  un scalaire de l'intervalle ouvert  $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$ . La méthode 1 consiste alors à construire à partir d'une fonction  $\tilde{\sigma}_0$  dans  $C_p^+$  une suite  $\{ \tilde{\sigma}_n \}$  dans  $C_p^+$  une suite  $\{ x_n \}$ , une suite  $\{ \tilde{e}_n \}$  dans  $C_p$  et une suite  $\{ \rho_n \}$  d'éléments de l'intervalle  $[0, 1]$  de la façon suivante :

1) On obtient  $x_n$  à partir de  $\tilde{\sigma}_n$  de la façon suivante :

$$x_n = x(\sigma_n) \quad (2.2)$$

2) On obtient  $\tilde{e}_n$  à partir de  $\tilde{\sigma}_n, x_n$  de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} & [\tilde{e}_n]_i = [g_{x_n}^+]_i + [g_{x_n}^-]_i \cdot [\tilde{\sigma}_n]_i / l \quad i = 1 \dots p \\ \text{avec : } & [g_x^+]_i(t) = \max (g_i(x, t), 0), [g_x^-]_i(t) = \min [0, g_i(x, t)] \\ & l \in \mathbb{R}^+, l \geq (\sup \|g_x^-\| \mid x \in Q). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Soient alors  $e_n = J_0 \tilde{e}_n$ ,  $c_n = \langle e_n, g_{x_n} \rangle$ ; si  $c_n = 0$  alors  $x_n$  est solution optimale du problème  $P_1$  sinon posons :

$$\Delta(\sigma_n, \rho) = \theta(\sigma_n + \rho e_n) - \theta(\sigma_n), \quad b(\sigma_n, \rho) = \frac{\Delta(\sigma_n, \rho)}{\rho \cdot c_n}$$

et :

3) On obtient  $\rho_n$  à partir de  $\tilde{\sigma}_n$  et  $\tilde{e}_n$  de la façon suivante :  
 si  $b(\sigma_n, 1) > \alpha$  alors  $\rho_n = 1$  sinon  $\rho_n$  appartient à l'intervalle  $]0, 1[$  }  
 et vérifie : (2.4)

$$\alpha \leq b(\sigma_n, \rho_n) \leq 1 - \alpha$$

4) On obtient  $\tilde{\sigma}_{n+1}$  à partir de  $\tilde{\sigma}_n$ ,  $\tilde{e}_n$  et  $\rho_n$  par la relation :

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \tilde{\sigma}_n + \rho_n \tilde{e}_n \quad (2.5)$$

### Théorème 5

1) Il existe une suite  $\{x_n, \tilde{e}_n, \rho_n, \tilde{\sigma}_n\}$  dans  $Q \times C_p \times [0, 1] \times C_p^+$  vérifiant les relations (2.2), (2.3), (2.4), (2.5).

2) Soit  $\{x_n, \tilde{e}_n, \rho_n, \tilde{\sigma}_n\}$  une telle suite. La suite  $\{\theta(\sigma_n)\}$  est croissante et la suite  $\{\sigma_n\}$  est maximisante pour le problème  $P_2$ . De plus il existe une sous-suite  $\{x_{n_i}\}$  qui converge vers la solution optimale de  $P_1$ .

*Démonstration :*

On peut sans restreindre la généralité de la démonstration supposer que  $p = 1$  :

a) Il existe une suite  $\{x_n, \tilde{e}_n, \tilde{\rho}_n, \tilde{\sigma}_n\}$  vérifiant les relations (2.2), (2.3), (2.4), (2.5).

En effet :

$\alpha$ )  $\tilde{e}_n$  et  $\tilde{\sigma}_n$  appartiennent à  $C_1$ . D'autre part si l'on suppose que  $\tilde{\sigma}_n$  appartient à  $C_1^+$  alors  $\tilde{\sigma}_{n+1}$  appartient à  $C_1^+$  puisqu'aux points  $t$  où  $\tilde{e}_n$  est non positif on a :

$$\tilde{\sigma}_{n+1}(t) = \tilde{\sigma}_n(t) + \alpha_n(t) \cdot \tilde{\sigma}_n(t) \quad , \quad |\alpha_n(t)| \leq 1.$$

$\beta$ ) Supposons  $c_n \neq 0$  ; alors d'après la formule de Lagrange :

$$b(\sigma_n, \rho_n) = \frac{\theta(\sigma_n + \rho_n e_n) - \theta(\sigma_n)}{\rho_n \cdot c_n} = 1 + \frac{\langle e_n, g_{x(\sigma_n + \theta_n e_n)} - g_{x(\sigma_n)} \rangle}{c_n} \quad (1)$$

expression dans laquelle  $\theta_n$  appartient à l'intervalle  $[0, \rho_n]$ .

Puisque la fonction numérique  $\rho \rightarrow b(\sigma_n, \rho)$  est continue sur l'intervalle  $[0, 1]$  et puisque  $b(\sigma_n, 0) = 1$  alors si  $b(\sigma_n, 1) \leq \alpha < 1/2$  il existe au moins un point  $\rho_n$  de l'intervalle  $]0, 1[$  tel que :

$$\alpha \leq b(\sigma_n, \rho_n) \leq 1 - \alpha.$$

$\gamma)$  Si  $c_n = 0$  alors :

$$\int_K [g^+(x_n, t)]^2 d\mu(t) + \int_K \tilde{g}_n(t) \cdot [g^-(x_n, t)]^2 d\mu(t) = 0$$

et par suite :

$$g(x_n, t) \leq 0 \quad \forall t \in K, \quad \langle \sigma_n, g_{x_n} \rangle = 0.$$

D'après le théorème 4  $x_n$  est alors solution optimale du problème  $P_1$ .

b) Puisque, pour tout  $n$ ,  $\rho_n$  et  $c_n$  sont strictement positifs et puisque :

$$\Delta(\sigma_n, \rho_n) = \rho_n \cdot c_n \cdot b(\sigma_n, \rho_n) \geq \rho_n \cdot c_n \cdot \alpha$$

la suite  $\{\theta(\sigma_n)\}$  est croissante et la suite  $\{\sigma_n\}$  appartient à l'ensemble  $S_{\theta(\sigma_0)}$ .

c) Montrons que  $\lim c_n = 0$ ; s'il n'en était pas ainsi il existerait alors un entier  $n_0$  et  $\varepsilon_1 > 0$  tel que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow c_n \geq \varepsilon_1$$

et par suite :

$$\theta(\sigma_{n+1}) - \theta(\sigma_n) \geq \rho_n \cdot \alpha \varepsilon_1.$$

Comme la suite  $\{\theta(\sigma_n)\}$  est bornée par  $\bar{\theta}$ , ceci entraîne la convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n$ . D'autre part puisque  $S_{\theta(\sigma_0)}$  est un ensemble fortement borné, que la suite  $\{\sigma_n\}$  appartient à  $S_{\theta(\sigma_0)}$  et que la suite  $\{g_{x_n}\}$  est uniformément bornée il existe alors une constante  $K > 0$  telle que :

$$\|e_n\| \leq K \quad \forall n.$$

Si  $\theta_n$  est le scalaire de l'intervalle  $[0, \rho_n]$  défini dans la relation (1) ceci entraîne alors que la suite  $\{\sigma'_n\}$  définie par :

$$\sigma'_n = \sigma_r \quad \text{si} \quad n = 2r, \quad \sigma'_n = \sigma_r + \theta_r e_r \quad \text{si} \quad n = 2r + 1 \quad (2)$$

est pour la topologie forte une suite de Cauchy appartenant à l'ensemble  $S_{\theta(\sigma_0)}$ . Comme, d'après le théorème 3, ce dernier est fortement complet cette suite converge fortement vers un point  $\bar{\sigma}$ . La forte continuité de l'application  $\sigma \rightarrow x_\sigma$  (théorème 1) la continuité de l'application  $x \rightarrow g_x$  entraînent alors :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} | \langle e_n, g_{x(\sigma_n + \theta_n e_n)} - g_{x_n} \rangle |$$

D'autre part :

$$(1 - \alpha) \geq b(\sigma_n, \rho_n) \geq 1 + \frac{\langle e_n, g_{x(\sigma_n + \theta_n e_n)} - g_{x_n} \rangle}{c_n}$$

Puisque :

$$n \geq n_0 \Rightarrow c_n \geq \varepsilon_1.$$

Quel que soit  $\varepsilon > 0$  il existe alors  $n'_0(\varepsilon)$  tel que :

$$n \geq n'_0(\varepsilon) \Rightarrow 1 - \alpha \geq b(\sigma_n, \rho_n) \geq 1 - \varepsilon.$$

En choisissant  $\varepsilon \leq \alpha$  on obtient une contradiction.

d) Soit alors  $\{\sigma_{n_i}\}$  une sous-suite de  $\{\sigma_n\}$  telle que :

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} c_{n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_K [g^+(x_{n_i}, t)]^2 d\mu(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_K [g^-(x_{n_i}, t)]^2 \tilde{\sigma}_{n_i}(t) d\mu(t).$$

La suite  $\{\sigma_{n_i}\}$  appartient au compact  $S_{\theta(\sigma_0)}$ . Il existe donc une sous-suite  $\{\sigma_{n_j}\}$  qui converge vaguement vers un point  $\bar{\sigma}$  de  $S_{\theta(\sigma_0)}$ . D'après le théorème 1 la suite correspondante  $\{x_{n_j}\}$  converge vers  $x(\bar{\sigma})$  et par conséquent la suite  $\{g_{x_{n_j}}\}$  converge vers  $g_{x(\bar{\sigma})}$ .

Ceci entraîne que la suite  $\{g_{x_{n_j}}^+\}$  [resp  $\{g_{x_{n_j}}^-\}$ ] converge simplement dans  $K$  vers  $g_{x(\bar{\sigma})}^+$  [resp  $g_{x(\bar{\sigma})}^-$ ]. Or d'après le théorème de Lebesgue :

$$\int_K [g^+(x(\bar{\sigma}), t)]^2 d\mu(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_K [g^+(x_{n_j}, t)]^2 d\mu(t)$$

et par conséquent  $x(\bar{\sigma})$  appartient à  $D$ . Ceci entraîne alors la convergence en norme de la suite  $\{g_{x_{n_j}}^-\}$  vers  $g_{x(\bar{\sigma})}^-$  et par conséquent la convergence en norme de la suite  $\{[g_{x_{n_j}}^-]^2\}$  vers  $[g_{x(\bar{\sigma})}^-]^2$ .

Comme :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\sigma}, [g_{x(\bar{\sigma})}^-]^2 \rangle &= \langle \bar{\sigma} - \sigma_{n_j}, [g_{x(\bar{\sigma})}^-]^2 \rangle \\ &\quad + \langle \sigma_{n_j}, [g_{x(\bar{\sigma})}^-]^2 - [g_{x_{n_j}}^-]^2 \rangle + \langle \sigma_{n_j}, [g_{x_{n_j}}^-]^2 \rangle \end{aligned}$$

la convergence vague de  $\{\sigma_{n_j}\}$  vers  $\bar{\sigma}$ , la convergence de  $\{(g_{x_{n_j}}^-)^2\}$  vers  $[g_{x(\bar{\sigma})}^-]^2$ , la convergence de  $\{c_{n_j}\}$  vers 0 entraînent que :

$$\langle \bar{\sigma}, [g_{x(\bar{\sigma})}^-]^2 \rangle = 0.$$

et par conséquent :

$$\langle \bar{\sigma}, g_{x(\bar{\sigma})}^- \rangle = 0.$$

D'après le théorème 4  $\bar{\sigma}$  est solution optimale du problème  $P_2$  et  $x(\bar{\sigma})$  solution optimale du problème  $P_1$  la suite  $\{\sigma_n\}$  est donc maximisante pour le problème  $P_2$  et il existe au moins une sous-suite  $\{x_{n_j}\}$  convergeant vers  $x(\bar{\sigma})$  (théorème 1).

## 2) Méthode 2 : Extension de l'algorithme de Cheney Goldstein [6]

Cet algorithme consiste alors à construire de façon récurrente à partir de l'ensemble  $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}$  une suite  $\{x_n\}$  de  $\mathcal{Q}$ , une suite  $\{j_n\}$  d'indices de  $[1 \dots p]$ ,

une suite  $\{t_n\}$  de  $K$ , une suite  $\{Q_n\}$  de compacts de  $X$  de la façon suivante :

1) On obtient  $x_n$  à partir de  $Q_n$  de la façon suivante :

$$f(x_n) = \min (f(x) \mid x \in Q_n), \quad x_n \in Q_n.$$

2) On obtient  $j_n, t_n$  à partir de  $x_n$  de la façon suivante :

$$g_{j_n}(x_n, t_n) = \max (g_j(x_n, t) \mid t \in K, j = 1 \dots p).$$

3) On obtient  $Q_{n+1}$  à partir de  $j_n, t_n, Q_n$  de la façon suivante :

$$Q_{n+1} = Q_n \cap \{x : g_{j_n}(x, t_n) \leq 0\}.$$

Soit  $J_j^n = \{i \in [1, 2 \dots n] : j_i = j\}$ . Si  $\delta_i$  est la mesure de Dirac concentrée au point  $t_i$ , si  $\alpha_i^n, i = 1, \dots, n-1$  sont des scalaires positifs et si  $\sigma_n$  est la mesure de  $C_p^{*+}$  dont les composantes  $(\sigma_n)_j$  sont définies par :

$$(\sigma_n)_j = 0 \quad \text{si} \quad J_j^{n-1} = \emptyset, \quad (\sigma_n)_j = \sum_{i \in J_j^{n-1}} \alpha_i^n \delta_{t_i} \quad \text{si} \quad J_j^{n-1} \neq \emptyset \quad (2.6)$$

alors on peut énoncer le théorème :

### Théorème 6

Soit  $\{x_n\}$  une suite d'éléments de  $Q$  obtenue par l'algorithme 2. Pour tout entier  $n > 1$  il existe des constantes  $\alpha_i^n, i = 1 \dots n-1$  positives telles que si  $\sigma_n$  est la mesure de  $C_p^{*+}$  définie par la relation (2.6) alors :

$$x_n \in M_{\sigma_n}.$$

D'autre part la suite  $\{\theta(\sigma_n)\}$  est croissante et il existe une valeur d'adhérence de la suite  $\{\sigma_n\}$ . Toute valeur d'adhérence de cette suite est alors solution optimale de  $P_2$  et toute valeur d'adhérence de la suite  $\{x_n\}$  est solution optimale du problème  $P_1$ .

*Démonstration :*

a) Puisque  $x_n$  réalise le minimum de  $f$  sur  $Q_n$ , pour  $n > 1$ , d'après les théorèmes de dualité de [1], il existe des constantes non négatives  $\alpha_i^n, i = 1, 2 \dots n-1$  telles que  $x_n$  réalise le minimum de  $F$  sur  $Q$ ,  $F$  étant la fonction numérique définie sur  $Q$  par :

$$F(x) = f(x) + \sum_{j=1}^p \sum_{i \in J_j^{n-1}} \alpha_i^n g_j(x, t_i)$$

et telles que :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i \in J_j^{n-1}} \alpha_i^n g_j(x_n, t_i) = 0.$$

On voit alors que :

$$x_n \in M_{\sigma_n}, \quad \langle \sigma_n, g_{x_n} \rangle = 0$$

b) Puisque  $\langle \sigma_n, g_{x_n} \rangle = 0$  on a :

$$\theta(\sigma_n) = f(x_n).$$

La suite  $\{\theta(\sigma_n)\}$  est donc croissante; la suite  $\{\sigma_n\}$  appartient donc à  $S_{\theta(\sigma_0)}$  qui est compact (théorème 3). Par conséquent elle admet au moins une valeur d'adhérence  $\sigma$ . Soit alors  $\sigma$  une valeur d'adhérence arbitraire de la suite  $\{\sigma_n\}$ . Il existe une sous-suite  $\{\sigma_{n_r}\}$  qui converge vers  $\sigma$ .

Soit alors  $\bar{x}$  une valeur d'adhérence quelconque de la suite  $\{x_{n_r}\}$  associée.

On a alors :

$$\bar{x} \in M_\sigma.$$

Comme l'application  $x \rightarrow g_x$  est continue,  $g_{\bar{x}}$  est alors une valeur d'adhérence de la suite  $\{g_{x_{n_r}}\}$ . Il existe donc une sous-suite  $\{n_i\}$  de  $\{n_r\}$  telle que  $\{g_{x_{n_i}}\}$  converge vers  $g_{\bar{x}}$ , et un indice  $j^*$  tel que  $j^* = j_{n_i}$ .

Soient  $n_k, n_i$  des indices de cette sous-suite avec  $n_k > n_i$ ; on peut alors écrire pour tout  $t$  de  $K$  :

$$(1) \quad g_j(\bar{x}, t) = g_j(\bar{x}, t) - g_j(x_{n_i}, t) + g_j(x_{n_i}, t)$$

$$(2) \quad g_j(x_{n_i}, t) \leq g_{j^*}(x_{n_i}, t_{n_i})$$

$$(3) \quad g_{j^*}(x_{n_i}, t_{n_i}) = g_{j^*}(x_{n_i}, t_{n_i}) - g_{j^*}(x_{n_k}, t_{n_i}) + g_{j^*}(x_{n_k}, t_{n_i})$$

$$(4) \quad g_{j^*}(x_{n_k}, t_{n_i}) \leq 0.$$

Les relations (3) et (4) entraînent alors :

$$\overline{\lim} g_{j^*}(x_{n_i}, t_{n_i}) \leq 0.$$

D'autre part les relations 1 et 2 entraînent que :

$$g_j(\bar{x}, t) \leq \underline{\lim} |g_j(\bar{x}_\sigma, t) - g_j(x_{n_i}, t)| + \underline{\lim} g_{j^*}(x_{n_i}, t_{n_i})$$

et par suite :

$$\bar{x} \in D.$$

Enfin le théorème de Banach Steinhauss entraîne que :

$$\langle \sigma, g_{\bar{x}} \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle \sigma_{n_i}, g_{x_{n_i}} \rangle = 0$$

Les théorèmes 1 et 4 permettent alors de conclure.

### 3) Méthode 3 : Extension de la méthode des pénalités

On généralise maintenant la méthode des pénalités couramment utilisée lorsque  $K$  est un ensemble constitué d'un nombre fini d'éléments [3], [4], [9],

[10], [15], [16], [18]. Dans ce cas les arguments utilisés étaient de type primal. Cette méthode a été étendue dans [12] à des problèmes de contrôle dans lesquels  $K = [0, T]$ ,  $\mu$  est la mesure de Lebesgue mais aucun théorème de convergence n'y est donné. Dans [2 bis] cette méthode a été appliquée à des problèmes de contrôle et on a donné des théorèmes de convergence par des raisonnements uniquement de type primal. Ici nous l'étendons de façon systématique *en montrant son caractère dual*.

Soit donc  $\{K_n\}$  une suite de nombres telle que :

$$K_n \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = +\infty.$$

La méthode des pénalités consistera alors à construire une suite  $\{x_n\}$  dans  $Q$  vérifiant la relation :

$$f(x_n) + \sum_{j=1}^p K_n \int_K [g_j^+(x_n, t)]^2 d\mu(t) = \min \left( f(x) + \sum_{j=1}^p K_n \int_K [g_j^+(x, t)]^2 d\mu(t) \mid x \in Q \right) \quad (2.7)$$

Posons :

$L_Q = \{(x, z) : z = y - x, x \in Q, y \in Q\}$ . On a alors le théorème :

### Théorème 7

Soient  $\{x_n\}$  une suite dans  $Q$  vérifiant la relation (2.7),  $\{\sigma_n\}$  la suite associée à  $\{x_n\}$  par la relation :

$$\sigma_n = J_0 \tilde{\sigma}_n, \quad \tilde{\sigma}_n = 2K_n g_{x_n}^+ \quad (2.8)$$

Si l'on suppose que pour tout  $t$  dans  $K$ , tout  $j$  de  $[1, 2 \dots p]$  la fonction numérique  $x \rightarrow g_j(x, t)$  admet en tout point  $x$  de  $Q$  et pour toute direction  $y - x$ ,  $y$  appartenant à  $Q$  une dérivée directionnelle  $D_j(x, y - x, t)$  et que pour tout  $j$  la fonction numérique  $[(x, y - x), t] \rightarrow D_j(x, y - x, t)$  est continue sur  $L_Q \times K$  alors :

$$x_n \in M_{\sigma_n}.$$

*Démonstration :*

On ne restreindra pas la généralité de la démonstration en posant  $p = 1$ .

Puisque  $f$  est convexe et puisque pour tout  $t$  de  $K$  l'application  $x \rightarrow g(x, t)$  est convexe, si  $y$  est un élément fixé de  $Q$  on a quel que soit  $t$  dans  $K$ ,  $\theta$  dans  $[0, 1]$ ,  $z = x_n + \theta(y - x_n)$  :

$$g(y, t) \geq g(x_n, t) + \theta^{-1}[g(z, t) - g(x_n, t)], \quad f(y) \geq f(x_n) + \theta^{-1}[f(z) - f(x_n)].$$



Par conséquent :

$$f(y) - f(x_n) \geq \theta^{-1} [f(z) - f(x_n)] \geq \theta^{-1} K_n \int_K [g^+(x_n, t)]^2 - [g^+(z, t)]^2 d\mu(t)$$

et par suite

$$f(y) - f(x_n) \geq K_n \theta^{-1} \left[ \int_K [g(x_n, t) - g(z, t)] [g^+(z, t) + g^+(x_n, t)] d\mu(t) \right] + l(\theta)$$

(1)

expression dans laquelle :

$$l(\theta) = K_n \int_K l_1(t, \theta) d\mu(t), \quad l_1(t, \theta) = \frac{[g^-(z, t) - g^-(x_n, t)] [g^+(z, t) + g^+(x_n, t)]}{\theta}.$$

Il est alors immédiat de vérifier que pour tout  $t$  de  $K$  on a :

$$0 = \lim_{\theta \rightarrow 0} l_1(t, \theta).$$

D'autre part les hypothèses du théorème assurent que pour tout  $t$  de  $K$ , la fonction numérique  $x \rightarrow g^-(x, t)$  admet en tout point  $x$  de  $Q$  et pour toute direction  $y - x$ ,  $y$  dans  $Q$  une dérivée directionnelle  $D^-(x, y - x, t)$  et que l'application numérique  $[(x, y - x, t), t] \rightarrow D^-(x, y - x, t)$  est uniformément bornée sur  $L_Q \times K$ . Par conséquent il existe une constante  $M$  telle que :

$$|l_1(t, \theta)| \leq M \quad \forall \theta \in [0, 1], \quad t \in K.$$

D'après le théorème de Lebesgue on a alors :

$$0 = \lim_{\theta \rightarrow 0} l(\theta).$$

D'autre part, d'après la relation (1) on a :

$$f(y) - f(x_n) \geq K_n \int_K [g(x_n, t) - g(y, t)] [g^+(z, t) + g^+(x_n, t)] d\mu(t) + l(\theta).$$

Et par conséquent en passant à la limite on obtient :

$$f(y) - f(x_n) \geq 2K_n \int_K [g(x_n, t) - g(y, t)] g^+(x_n, t) d\mu(t)$$

d'où le théorème.

### Théorème 8

Sous les hypothèses du théorème précédent la suite  $\{x_n\}$  admet au moins une valeur d'adhérence  $\sigma$ . Toute valeur d'adhérence  $\sigma$  de la suite  $\{x_n\}$  est solution optimale de  $P_2$  et de plus toute valeur d'adhérence de la suite  $\{x_n\}$  est solution de  $P_1$ .

*Démonstration :*

On supposera sans restreindre la généralité que  $p = 1$ .

D'après le théorème 8 :

$$\theta(\sigma_n) = f(x_n) + 2K_n \int_K [g^+(x_n, t)]^2 d\mu(t).$$

D'autre part on a les relations :

$$\forall n : \quad \theta(\sigma_n) \leq \bar{\theta}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = +\infty.$$

Par conséquent :

$$\overline{\lim} \int_K [g^+(x_n, t)]^2 d\mu(t) = 0.$$

D'autre part puisque  $f$  est bornée inférieurement sur  $Q$  et puisque :

$$\forall n \quad \theta(\sigma_n) \geq f(x_n),$$

il existe alors  $\lambda$  réel tel que la suite  $\{\sigma_n\}$  appartienne à l'ensemble  $S_\lambda$ . D'après le théorème 3 la suite  $\{\sigma_n\}$  admet au moins une valeur d'adhérence. Soit  $\bar{\sigma}$  une valeur d'adhérence arbitraire de la suite  $\{\sigma_n\}$ . Il existe alors une sous-suite  $\{\sigma_{n_r}\}$  qui converge vers  $\bar{\sigma}$ . Soit  $\bar{x}$  une valeur d'adhérence arbitraire de la suite  $\{x_{n_r}\}$  associée. On a alors :

$$\bar{x} \in M_{\bar{\sigma}}.$$

De plus l'application  $x \rightarrow g_x$  étant continue il existe alors une sous-suite  $\{n_l\}$  de  $\{n_r\}$  telle que la suite  $\{g_{x_{n_l}}\}$  converge vers  $g_{\bar{x}}$ .

On a alors :

$$\int_K [g^+(\bar{x}, t)]^2 d\mu(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_K [g^+(x_{n_l}, t)]^2 d\mu(t) = 0$$

et par conséquent :

$$\bar{x} \in D.$$

D'autre part :

$$\theta(\bar{\sigma}) = f(\bar{x}) \Rightarrow \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle = 0,$$

le théorème 4 permet alors de conclure.

C.Q.F.D.

Nous proposons maintenant une inégalité importante pour le choix de  $K_n$  dans la méthode des pénalités :

Soient  $l = \inf (f(x) \mid x \in Q)$ ,  $\tilde{x}$  un point de  $D$  tel que :

$$f(\tilde{x}) > l$$

et

$$\varepsilon_n^2 = \frac{f(\tilde{x}) - l}{K_n}.$$

**Proposition 1 :**

Sous les hypothèses du théorème précédent, on a pour tout entier  $n$  positif l'inégalité suivante :

$$\int_K [g_j^+(x_n, t)]^2 d\mu(t) \leq \varepsilon_n^2 \quad j = 1 \dots p \quad (2.9)$$

Lorsque  $K$  est réduit à un point  $\bar{t}$ , si  $\mu = \partial\bar{t}$  cette inégalité devient :

$$g_j(x_n, \bar{t}) \leq \varepsilon_n \quad j = 1 \dots p \quad (2.10)$$

*Démonstration :*

Soit  $\tilde{x}$  un point de  $D$  on a :

$$f(x_n) + \sum_{j=1}^p K_n \int_K [g_j^+(x_n, t)]^2 d\mu(t) \leq f(\tilde{x})$$

et par conséquent :

$$\int_K [g_j^+(x_n, t)]^2 d\mu(t) \leq \frac{f(\tilde{x}) - f(x_n)}{K_n} \leq \varepsilon_n^2$$

l'inégalité (2.10) est une conséquence immédiate de (2.9) et de la structure de  $K$ .

**4) Méthode 4 : Méthode de discrétisation**

Supposons qu'il existe une famille dénombrable  $\{t_i\}$  dense dans  $K$ . Soit alors la famille d'ensembles  $D_n$  définie par :

$$D_n = \{x \in Q : g_j(x, t_i) \leq 0 \quad j = 1 \dots p, \quad i = 1 \dots n\}.$$

Les méthodes de discrétisation consistent alors à construire une suite  $\{x_n\}$  dans  $Q$ ,  $n = 1, 2 \dots$  définies par :

$$f(x_n) = \min (f(x) \mid x \in D_n) \quad , \quad x_n \in D_n \quad (2.11)$$

Soient  $\alpha_{ij}^n$   $i = 1, 2 \dots n, j = 1 \dots p$  des scalaires positifs et  $\sigma_n$  la mesure de  $C_p^{*+}$  dont les composantes  $(\sigma_n)_j$  sont définies par :

$$(\sigma_n)_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^n \partial_{t_i} \quad j = 1 \dots p \quad (2.12)$$

**Théorème 9**

Soit  $\{x_n\}$  une suite d'éléments de  $Q$  vérifiant la relation (2.11). Pour tout entier  $n$  il existe des scalaires  $\alpha_{ij}^n$   $i = 1, 2 \dots n, j = 1, 2 \dots p$  positifs telles que si  $\sigma_n$  est la mesure de  $C_p^{*+}$  définie par la relation (2.12) alors :

$$x_n \in M_{\sigma_n}.$$

D'autre part la suite  $\{\theta(\sigma_n)\}$  est croissante et il existe au moins une valeur d'adhérence de la suite  $\{\sigma_n\}$ . Toute valeur d'adhérence de cette suite est alors solution optimale du problème  $P_2$ , et toute valeur d'adhérence de la suite  $\{x_n\}$  est solution optimale du problème  $P_1$ .

*Démonstration :*

Le principe est exactement le même que pour la démonstration du théorème 6.

a) Puisque  $x_n$  réalise le minimum de  $f$  sur  $D_n$  il existe alors d'après les théorèmes de dualité [1] des constantes positives  $\alpha_{ij}^n$   $i = 1 \dots n, j = 1 \dots p$  telles que  $x_n$  réalise le minimum de  $F$  sur  $Q$ ,  $F$  étant la fonction numérique définie sur  $Q$  par :

$$F(x) = f(x) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^n g_j(x, t_i)$$

et telles que :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^n g_j(x_n, t_i) = 0.$$

Ce qui entraîne :

$$x_n \in M_{\sigma_n}, \quad \langle \sigma_n, g_{x_n} \rangle = 0.$$

b) l'égalité :

$$\langle \sigma_n, g_{x_n} \rangle = 0$$

entraîne alors que :

$$\theta(\sigma_n) = f(x_n).$$

Il est alors aisé de démontrer, comme dans la démonstration du théorème 6 qu'il existe au moins une valeur d'adhérence  $\sigma$  de la suite  $\{\sigma_n\}$  et une sous-suite  $\{n_l\}$  telle que :

$$\sigma = \lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_{n_l}, \quad g_{\bar{x}} = \lim_{l \rightarrow \infty} g_{x_{n_l}}, \quad \bar{x} \in M_{\sigma}.$$

Soit alors  $t$  un point arbitraire de  $K$  et  $\{t_{i_k}\}$  une sous-suite de  $\{t_i\}$  qui converge vers  $t$ . On a alors les relations :

$$g_j(\bar{x}, t) = (g_j(\bar{x}, t) - g_j(x_{n_l}, t)) + g_j(x_{n_l}, t) \quad \forall t \in K, \quad j = 1, 2 \dots p$$

$$g_j(x_{n_l}, t) = (g_j(x_{n_l}, t) - g_j(x_{n_l}, t_{N_l})) + g_j(x_{n_l}, t_{N_l}) \quad \forall t \in K, \quad j = 1 \dots p$$

relations dans lesquelles  $N_l$  est le plus grand entier de la suite  $\{i_k\}$  inférieur à  $n_l$ .

En faisant tendre  $l$  vers l'infini il est alors immédiat de vérifier que :

$$g_j(\bar{x}, t) \leq 0 \quad \forall t \in K \quad j = 1 \dots p$$

et par conséquent :

$$\bar{x} \in D.$$

Enfin le théorème de Banach-Steinhaus entraîne que :

$$\langle \sigma, g_{\bar{x}} \rangle = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle \sigma_{n_l}, g_{x_{n_l}} \rangle = 0.$$

Les théorèmes 1 et 4 permettent alors de conclure.

### 5) Cas particulier où $K$ est réduit à un seul élément

Dans ce cas on peut supposer que les fonctions  $g_i$  sont des fonctions uniquement de la variable  $x$ . La théorie précédente alors se simplifie  $C_p^*$  devient  $\mathbb{R}^p$ ,  $C_p^{*+} \mathbb{R}_+^p$ ;  $\sigma$  est donc un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  de composantes  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$  et l'on a :

$$\Phi(\sigma, x) = f(x) = \sum_{i=1}^p \sigma_i \cdot g_i(x).$$

Les théorèmes généraux et les méthodes 1 et 3 dans lesquelles on pose  $\mu = 1$  se simplifient. Ces méthodes permettent alors en particulier de résoudre des problèmes de contrôle avec contraintes en nombre fini sur l'état final. Dans ce cas il existe d'autres méthodes [17] mais nous n'avons pu les étendre au cas général.

### III. Intégration du problème $P_1$ dans un formalisme plus général

Les hypothèses de continuité des applications  $f$  et  $g_i$ , de compacité de l'ensemble  $Q$  et l'hypothèse d'unicité  $H_4$  sont trop fortes parfois pour être compatibles entre elles. On peut amoindrir ces hypothèses en considérant le problème  $P'_1$ . Soit  $\bar{M}$  un ensemble de  $\mathbb{R} \times C_p \cdot P'_1$  s'énonce :

« Trouver, s'il existe, un point  $z^* = (r^*, w^*)$  de  $\bar{M} \cap (\mathbb{R} \times C_p^-)$  tel que :

$$r^* = \min \{ r : z = (r, w) \in \bar{M} \cap (\mathbb{R} \times C_p^-) \}.$$

Soit alors les hypothèses  $H'_1, H'_2, H'_3, H'_4$  :

$H'_1$  : Il existe un point  $\tilde{z}$  de  $\bar{M}$  tel que  $\tilde{\omega} \in \overset{\circ}{C}_p^-$  (intérieur de  $C_p^-$ ).

$H'_2$  :  $\bar{M}$  est compact.

$H'_3$  : L'ensemble  $A = \{ z : \exists z_0 \in \bar{M} : r \geq r_0, w \geq w_0 \}$  est convexe.

$H'_4$  : Pour tout  $\sigma$  de  $C_p^{*+}$  il existe un et un seul point  $z(\sigma)$  dans  $\bar{M}$  tel que si  $\Phi'(\sigma, z) = r + \langle \sigma, w \rangle$  alors :

$$\theta'(\sigma) = \Phi'(\sigma, z(\sigma)) = \min \{ \Phi'(\sigma, z) \mid z \in \bar{M} \}.$$

On supposera désormais vérifiées les hypothèses  $H'_1, H'_2, H'_3$ . Soit alors le problème  $P'_2$  :

$P'_2$  : « Trouver un point  $\bar{\sigma}$  de  $C_p^{*+}$  tel que  $\theta'(\bar{\sigma}) = \max \{ \theta'(\sigma) \mid \sigma \in C_p^{*+} \}$ . »

On constate alors dans les démonstrations des théorèmes 1, 2, 3, 4, 5 et pour la construction de l'algorithme 1 qu'il n'est pas nécessaire de connaître la structure de  $X$ . Ainsi peut-on démontrer en suivant le même principe des théorèmes 1', 2', 3', 4', 5' et un algorithme 1' dans lesquels on remplace respectivement  $Q$  par  $\bar{M}$ ,  $x$  par  $z$ ,  $g_x$  par  $w$ ,  $\theta$  par  $\theta'$ ,  $H_i$  par  $H'_i$ ,  $P_1$  par  $P'_1$ ,  $P_2$  par  $P'_2$ .

REMARQUE. — a) Le problème  $P_1$  s'intègre à la classe de problèmes  $P'_1$  si l'on pose :

$$\bar{M} = \{ z : \exists x \in Q \text{ avec } r = f(x), w = g_x \}.$$

b) Si les hypothèses nécessaires à la théorie du problème  $P_1$  sont vérifiées alors les hypothèses nécessaires pour le problème  $P'_1$  le sont mais la réciproque n'est pas vraie.

Ainsi dans les problèmes de contrôle, avec contraintes sur l'état et le contrôle,  $Q$  représente les contraintes sur le contrôle,  $D$  les contraintes sur l'état. L'hypothèse d'unicité  $H_4$  est une hypothèse sur l'unicité d'un contrôle optimal, l'hypothèse d'unicité  $H'_4$  est une hypothèse d'unicité de la trajectoire optimale.

On voit que cette hypothèse est bien moins restrictive car il peut y avoir une trajectoire optimale unique mais de multiples contrôles donnant une telle trajectoire.

#### IV. Application à la théorie du contrôle

Soient  $T, l$  des réels  $> 0$ ,  $C_n[O, T]$  l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  définies et continues sur  $[O, T]$ ,  $L_2^m[O, T]$  l'espace de Hilbert des classes d'équivalence des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , définies sur  $[O, T]$ , dont les composantes sont de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue; si  $s = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $g = (g_1, \dots, g_m)$  sont des éléments de  $L_2^m[O, T]$  alors le produit scalaire  $(f | g)$  est défini par :

$$(f | g) = \int_0^T \sum_{i=1}^m f_i(t) \cdot g_i(t) dt.$$

Soient  $\Phi, F, g_i$   $i = 1 \dots p$  des fonctions numériques définies et continues sur  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ ,  $A, B, h$  des applications à valeurs dans l'ensemble des matrices  $(n, n), (n, r), (n, 1)$  définies et continues sur  $[O, T]$ ,  $x_0$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . A tout élément  $u$  de  $L_2^m[O, T]$  on fait correspondre un et un seul élément  $x_u$  solution unique sur  $[O, T]$  du système différentiel :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + h(t) \quad p \cdot pt \in [O, T]$$

$$x(0) = x_0.$$

Soient  $Q'_0$  le sous-ensemble de  $L_2^m[O, T]$  défini par :

$$Q'_0 = \{ u \in L_2^m[O, T] : |u_i(t)| \leq l, \quad p \cdot pt \in [O, T] \ i = 1 \dots m \}$$

$D$  le sous-ensemble de  $Q$  défini par :

$$D = \{ u \in Q'_0 : g_i(x_u(t), t) \leq 0, \quad t \in [0, T], i = 1 \dots p \}$$

$f$  la fonction numérique définie sur  $Q'_0$  par :

$$f(u) = \Phi[x_u(T)] + \int_0^T F[t, x_u(t), u(t)] dt.$$

On se propose alors de résoudre le problème de contrôle avec contraintes sur l'état et le contrôle que nous noterons  $P_{3c}$  et qui consiste à trouver un point  $u^*$  dans  $D$  tel que :

$$f(u^*) = \min (f(u) \mid u \in D) = f^*.$$

Le problème  $P_{3c}$  est bien évidemment un problème  $P_1$  particulier. On définit alors les hypothèses  $A$  et  $B$  :

*Hypothèse A :*

$$a) F(t, x, u) = F_1(t, x) + F_2(t, u).$$

$b)$   $\Phi$  est convexe et quel que soit  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, T]$ ,  $j = 1, 2 \dots p$  les fonctions numériques  $x \rightarrow g_j(x, t)$ ,  $x \rightarrow F_1(t, x)$ ,  $u \rightarrow F_2(t, u)$  sont convexes.

$c)$  Il existe un point  $\tilde{u}$  de  $Q'_0$  tel que quel que soit  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, T]$ ,  $j = 1, 2, \dots p$  on a :

$$g_j(x_{\tilde{u}}(t), t) < 0.$$

*Hypothèse B :*

L'hypothèse  $A$  est vérifiée et pour tout  $t$  de l'intervalle  $[0, T]$  la fonction numérique  $x \rightarrow F_1(t, x)$  est strictement convexe.

On applique maintenant la méthode 1 et la méthode 3 pour résoudre le problème  $P_{3c}$ .

*a) La méthode 1 appliquée au problème  $P_{3c}$*

Faisons correspondre d'abord à tout point  $\tilde{\sigma}$  de  $C_p^+$  le problème  $P_{c\tilde{\sigma}}$  qui consiste à trouver un point  $\tilde{u}_\sigma$  de  $Q'_0$  tel que :

$$\theta_1(\tilde{\sigma}) = \Phi_1(\tilde{\sigma}, u_\sigma) = \min (\Phi_1(\tilde{\sigma}, u) \mid u \in Q'_0) \quad (4.0)$$

expression dans laquelle  $\Phi_1$  est la fonction numérique définie sur  $C_p^+ \times Q'_0$  par :

$$\Phi_1(\tilde{\sigma}, u) = \Phi[x_u(T)] + \int_0^T F[t, x_u(t), u(t)] + \sum_{j=1}^p \tilde{\sigma}_j(t) g_j(x_u(t), t) dt.$$

Le problème  $P_{c\tilde{\sigma}}$  est un problème de contrôle qui relève de la classe des problèmes  $P_{1c}$  [2 bis] pour tout  $\tilde{\sigma}$  de  $C_p^+$  l'algorithme proposé dans [2 bis] permet de calculer un point  $u_\sigma$  de  $Q'_0$  vérifiant la relation (4.0).

La méthode 1 appliquée au problème  $P_{3c}$  conduit à construire alors à partir d'une fonction  $\tilde{\sigma}_0$  de  $C_p^+$  ( $\tilde{\sigma}_0 = 0$  en général) et d'un nombre  $\alpha$  de  $]0, 1/2[$  une suite  $\{\tilde{\sigma}_n\}$  de  $C_p^+$ , une suite  $\{u_n\}$  dans  $Q'_0$ , une suite  $\{\tilde{e}_n\}$  dans  $C_p$ , une suite  $\{\rho_n\}$  dans  $[0, 1]$  de la façon suivante :

1) On obtient  $u_n$  à partir de  $\tilde{\sigma}_n$  de la façon suivante :

$$u_n = u_{\tilde{\sigma}_n} \quad (4.1)$$

$u_{\tilde{\sigma}_n}$  est calculé par l'algorithme proposé dans [2 bis].

2) On obtient  $\tilde{e}_n$  à partir de  $\tilde{\sigma}_n$  et  $u_n$  de la façon suivante :

$$\tilde{e}_n]_j(t) = g_j^+(x_{u_n}(t), t) + \frac{g_j^-(x_{u_n}(t), t) \times [\tilde{\sigma}_n]_j(t)}{l} \quad j = 1 \dots p, t \in [0, T] \quad (4.2)$$

$$l \geq \min (\|g_{xu}^-\| \mid u \in Q'_0)$$

soit  $c_n = \int_0^T \sum_{j=1}^p [\tilde{e}_n]_j(t) \cdot g_j(x_{u_n}(t), t) dt$  ; si  $c_n = 0$  l'algorithme s'arrête et lorsque l'hypothèse  $B$  est vérifiée  $u_n$  est solution optimale du problème  $P_{3c}$ , sinon si

$$b(\tilde{\sigma}_n, \rho) = \frac{\theta_1(\tilde{\sigma}_n + \rho \tilde{e}_n) - \theta_1(\tilde{\sigma}_n)}{\rho \cdot c_n} \quad \text{alors :}$$

on obtient  $e_n$  à partir de  $\tilde{\sigma}_n$  et  $\tilde{e}_n$  de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} 3) \text{ Si } b(\tilde{\sigma}_n, 1) \geq \alpha \text{ alors } \rho_n = 1 \text{ sinon } \rho_n \text{ vérifie :} \\ \rho_n \in [0, 1], \quad \alpha \leq b(\sigma_n, \rho_n) \leq 1 - \alpha. \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

4) On obtient  $\tilde{\sigma}_{n+1}$  à partir de  $\tilde{\sigma}_n$ ,  $\tilde{e}_n$ ,  $\rho_n$  de la façon suivante :

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \tilde{\sigma}_n + \rho_n \tilde{e}_n \quad (4.4)$$

### **Théorème 10**

Si l'hypothèse  $B$  est vérifiée, il existe une suite  $\{\tilde{\sigma}_n, u_n, \rho_n, \tilde{e}_n\}$  dans

$$C_p^+ \times Q'_0 \times [0, 1] \times C_p$$

vérifiant les relations (4.1), (4.2), (4.3), (4.4). Soit  $\{\tilde{\sigma}_n, u_n, \rho_n, \tilde{e}_n\}$  une telle suite. Il existe alors une sous-suite  $\{u_{n_i}\}$  de la suite  $\{u_n\}$  telle que toute valeur d'adhérence de cette sous-suite pour la topologie faible (et il en existe au moins une), soit solution optimale du problème  $P_{3c}$ .

*Démonstration :*

On reprend ici le formalisme de [2], qui est le formalisme introduit par Ghouila-Houri [8]. Soit alors  $\overline{P_{3c}}$  le problème de contrôle associé au problème  $P_{3c}$  dans ce formalisme; dans ce cas les variables sont des commandes



limites. Intégrons alors le problème  $\overline{P}_{3c}$  dans la classe des problèmes  $P'_1$ . On constate alors que la méthode décrite ci-dessus coïncide avec la méthode la décrite au paragraphe 3 et que les hypothèses  $H'_1, H'_2, H'_3, H'_4$  nécessaires à la convergence de cet algorithme sont vérifiées. Par conséquent, le théorème 5' est applicable et il existe une suite de commandes limites  $\{\mu_{u_n}\}$  de  $Q_2$  telle que la suite  $\{u_n\}$  vérifie la relation (4.1) et telle que :

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} g_{x_{u_n}}, \quad f^* = \lim f(u_n)$$

Il est alors immédiat de vérifier que toute valeur d'adhérence pour la topologie faible (et il existe au moins une) est solution optimale du problème  $P_{3c}$ .

b) *La méthode des pénalités appliquée au problème  $P_{3c}$*

La méthode des pénalités appliquée au problème  $P_{3c}$  consiste alors à construire une suite  $\{u_n\}$  dans  $Q'_0$  telle que :

$$\begin{aligned} f(u_n) + K_n \int_0^T \sum_{j=1}^p [g_j^+(x_{u_n}(t), t)]^2 dt \\ = \min \left( f(u) + K_n \int_0^T \sum_{j=1}^p [g_j^+(x_u(t), t)]^2 dt \mid u \in Q'_0 \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour tout  $n$  fixé,  $u_n$  est calculé par la méthode exposée dans [2]. En reprenant le même raisonnement que dans la démonstration du théorème précédent, on obtient alors le théorème :

### **Théorème 11**

Si l'hypothèse  $A$  est vérifiée et si  $\{u_n\}$  est une suite dans  $Q'_0$  vérifiant la relation (4.5) alors toute valeur d'adhérence pour la topologie faible de cette suite (et il en existe au moins une) est solution optimale du problème  $P_{3c}$ .

### **V. Expériences numériques relatives au problème $P_{3c}$ et aux méthodes 1 et 3 [11]**

Nous donnons dans ce paragraphe les résultats d'expériences numériques relatives au problème  $P_{3c}$  auquel on a appliqué la méthode 1, méthode de déplacements admissibles dans un espace de mesures, et la méthode 3 qui est l'extension de la méthode des pénalités. Ces méthodes sont explicitées au paragraphe IV et nous reprenons ici le formalisme de ce paragraphe.

On explicite d'abord les exemples traités; en particulier on donne l'expression analytique théorique de la trajectoire optimale et du contrôle optimal. Enfin on dessine les courbes représentant la trajectoire, le contrôle obtenu à la dernière itération et les courbes représentant pour la méthode 1 la valeur  $\theta_1(\tilde{\alpha}_n)$

à l'itération  $n$  la valeur  $f(u_n) + K_n \int_0^T \sum_{j=1}^p [g_j^+(x_{u_n}(t), t)]^2 dt$  pour la méthode 3.

Pour la méthode des pénalités on a donné les courbes les plus représentatives, c'est-à-dire celles qui correspondent au poids  $K_n = 100$ .

*On constate au vu de ces expériences numériques :*

- 1) la méthode 1 donne de meilleurs résultats en général en ce qui concerne la précision que la méthode 3;
- 2) lorsque les résultats de ces deux méthodes sont identiques en précision, la méthode 1 est nettement plus rapide.

1) EXEMPLE 1 (fig. 1, 1').

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad , \quad x(0) = 2$$

On veut minimiser :

$$f(u) = \frac{1}{2} x^2(2) + \int_0^2 x^2(t) dt$$

sous les contraintes :

$$a) \quad x(t) \geq 1 \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$b) \quad |u(t)| \leq 1 \quad p \cdot p0 \leq t \leq 1.$$

La solution théorique est alors :

$$u^*(t) = -1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad , \quad u^*(t) = 0 \quad \text{si} \quad 1 < t \leq 2$$

$$x^*(t) = 2 - t \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad , \quad x^*(t) = 1 \quad \text{si} \quad 1 < t < 2.$$

2) EXEMPLE 2 (fig. 2, 2').

Soit le système :

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) \quad , \quad x_1(0) = 2$$

$$\dot{x}_2(t) = u_2(t) \quad , \quad x_2(0) = 2.$$

On veut minimiser :

$$f(u) = \frac{1}{2} \left[ x_1^2(2) + x_2^2(2) + 2x_1(2) \cdot x_2(2) + \int_0^2 x_1^2(t) + x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) dt \right]$$

sous les contraintes :

$$a) \quad x_1(t) + x_2(t) \geq 2 \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$b) \quad |u_1(t)| \leq 1, \quad |u_2(t)| \leq 1 \quad p \cdot pt \in [0, 2].$$

La solution théorique est alors :

$$u_1^*(t) = u_2^*(t) = -1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u_1^*(t) = u_2^*(t) = 0 \quad \text{si} \quad 1 < t \leq 2$$

$$x_1^*(t) = x_2^*(t) = 2 - t \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x_1^*(t) = x_2^*(t) = 1 \quad \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

## 3) EXEMPLE 3 (fig. 3, 3').

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad , \quad x(0) = 2.$$

On veut minimiser :

$$f(u) = \frac{1}{10} \int_0^2 e^{x(t)} dt$$

sous les contraintes :

$$a) \quad x(t) \geq 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$b) \quad |u(t)| \leq 1 \quad p \cdot p0 \leq t \leq 1.$$

La solution théorique est alors :

$$u^*(t) = -1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u^*(t) = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$x^*(t) = 2 - t \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x^*(t) = 1 \quad \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

## 4) EXEMPLE 4 (fig. 4, 4').

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = \frac{\pi}{4} u(t) \quad , \quad x(0) = 0.$$

On veut minimiser :

$$f(u) = \frac{1}{5} \int_0^2 [2 - \sin 2x(t)] dt$$

sous les contraintes :

$$a) \quad x(t) \leq \frac{\pi}{8} \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$b) \quad |u(t)| \leq 1 \quad p \cdot p0 \leq t \leq 2.$$

La solution théorique est alors :

$$u^*(t) = 1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad u^*(t) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{2} < t \leq 2$$

$$x^*(t) = \frac{\pi}{4} t \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad x^*(t) = \frac{\pi}{8} \quad \text{si} \quad \frac{1}{2} < t \leq 2.$$

## 5) EXEMPLE 5 (fig. 5, 5').

Soit le système :

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad , \quad x_1(0) = 2$$

$$\dot{x}_2(t) = e^t [u_1(t) + u_2(t)] \quad , \quad x_2(0) = 2[\sqrt{e} - 1].$$

On veut minimiser :

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^2(t) + x_2^2(t) dt$$

sous les contraintes :

$$a) \quad x_1(t) \geq 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

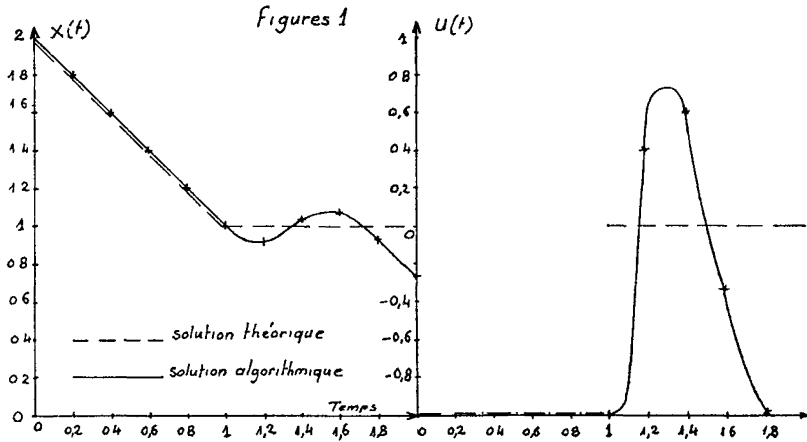
$$b) \quad |u_1(t)| \leq 1, \quad |u_2(t)| \leq 1 \quad p \cdot p0 \leq t \leq 1.$$

La solution théorique est alors :

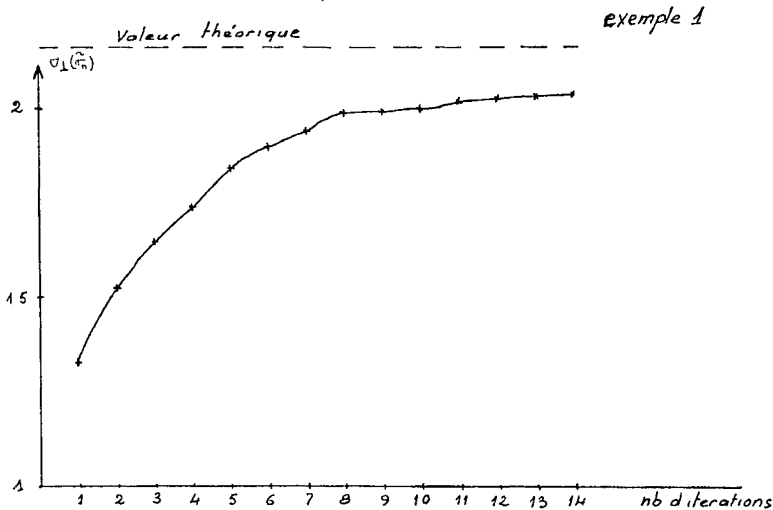
$$u_1^*(t) = u_2^*(t) = -1 \quad \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad u_1^*(t) = u_2^*(t) = 0 \quad \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1$$

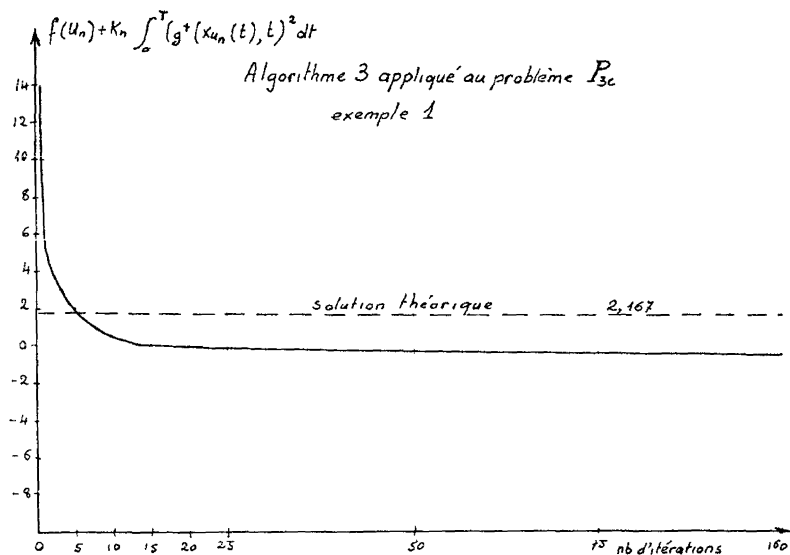
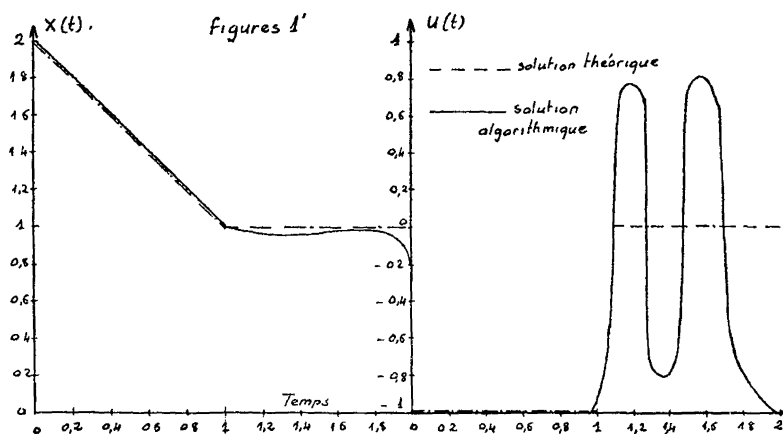
$$x_1^*(t) = 2 - 2t \quad \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad x_1^*(t) = 1 \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

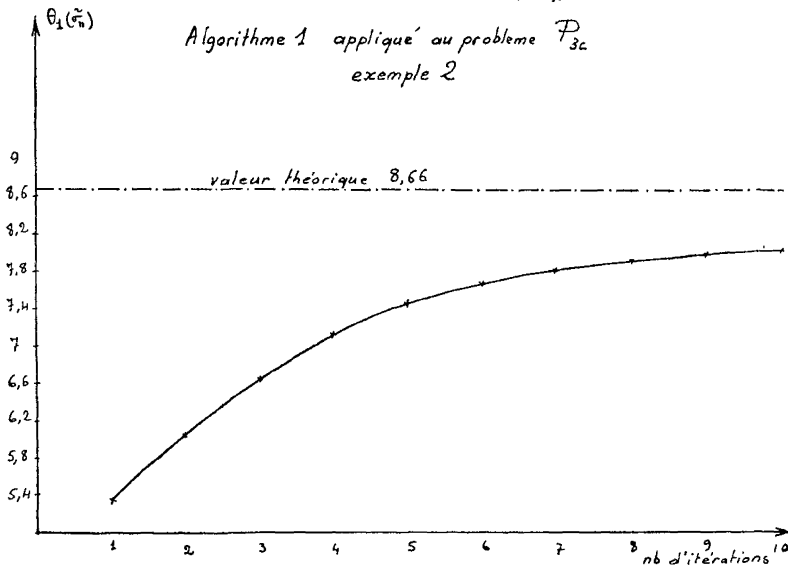
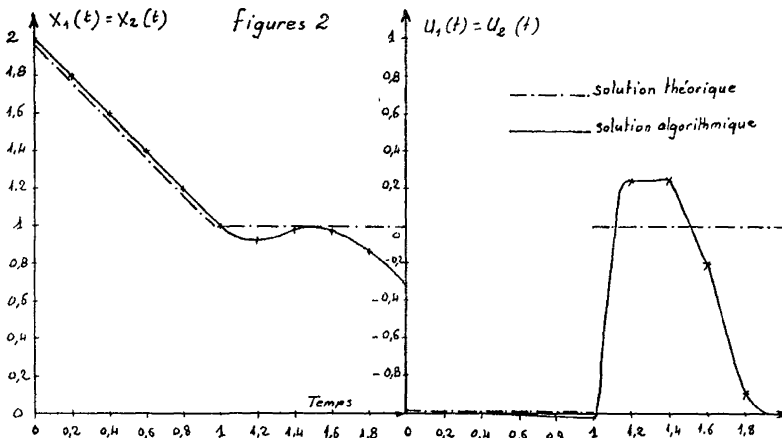
$$x_2^*(t) = -2(e^t - \sqrt{e}) \quad \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad x_2^*(t) = 0 \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

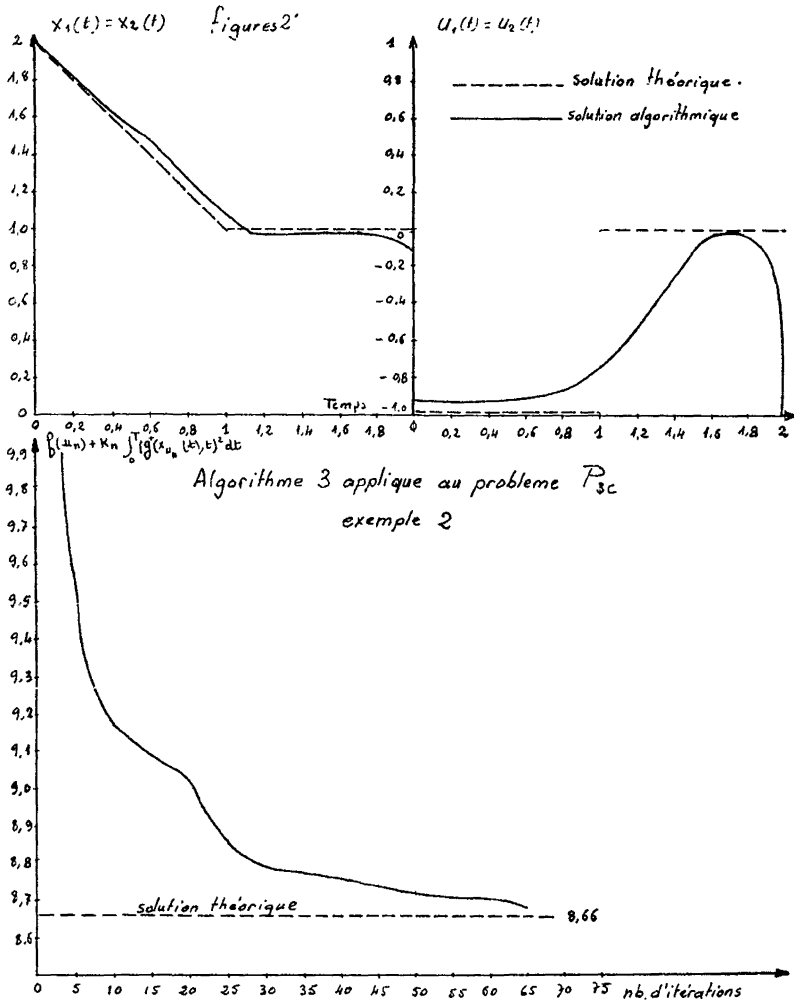


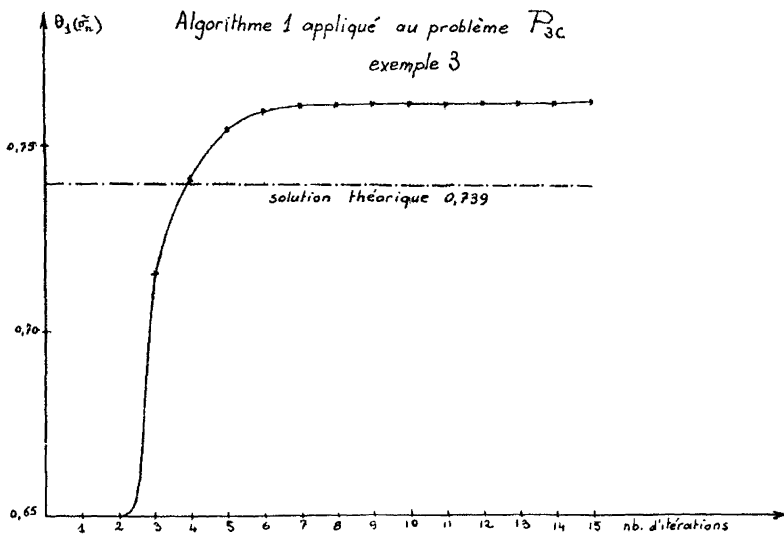
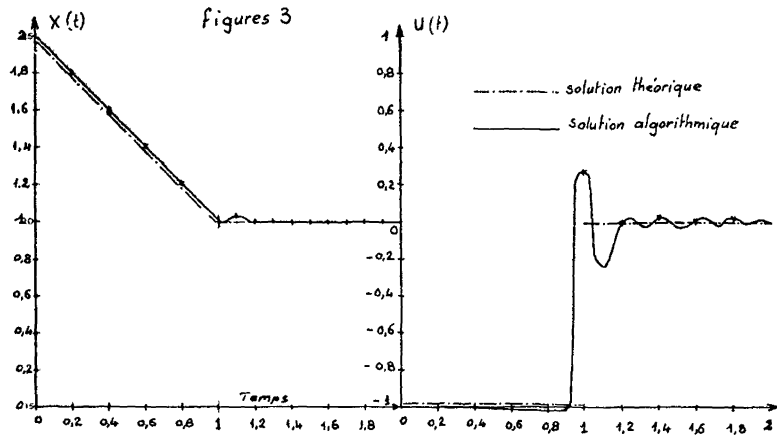
Algorithme 1 appliqué au problème  $P_{3c}$



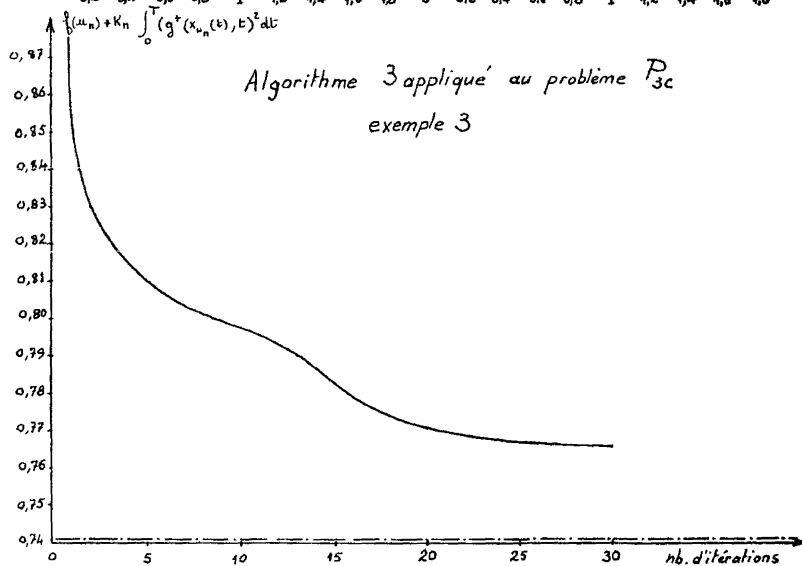
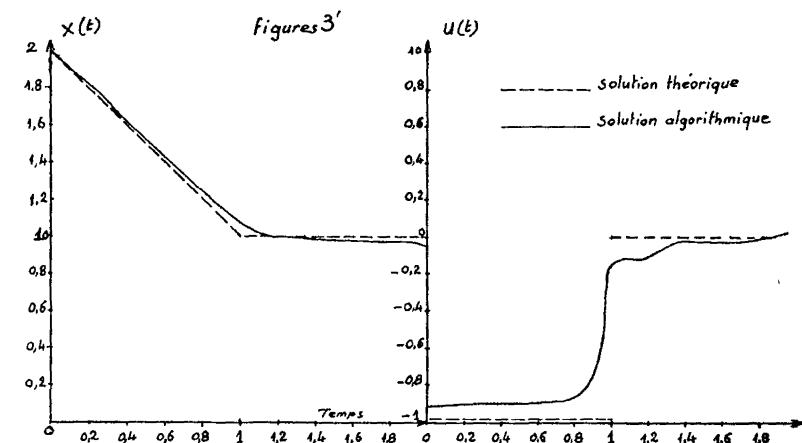


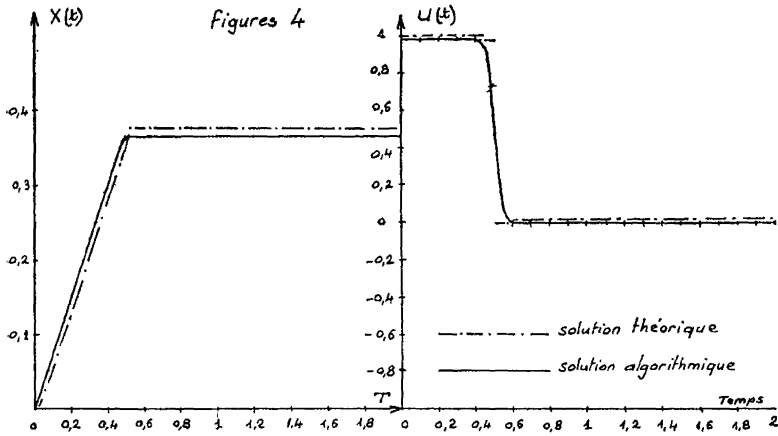




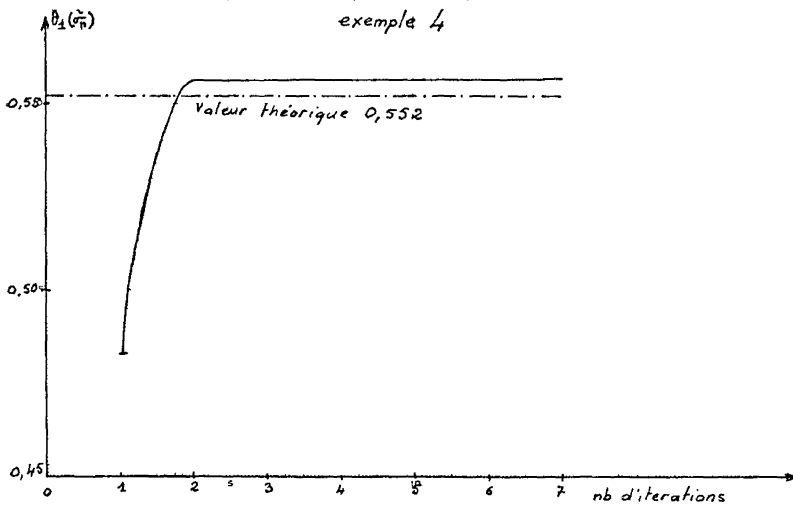


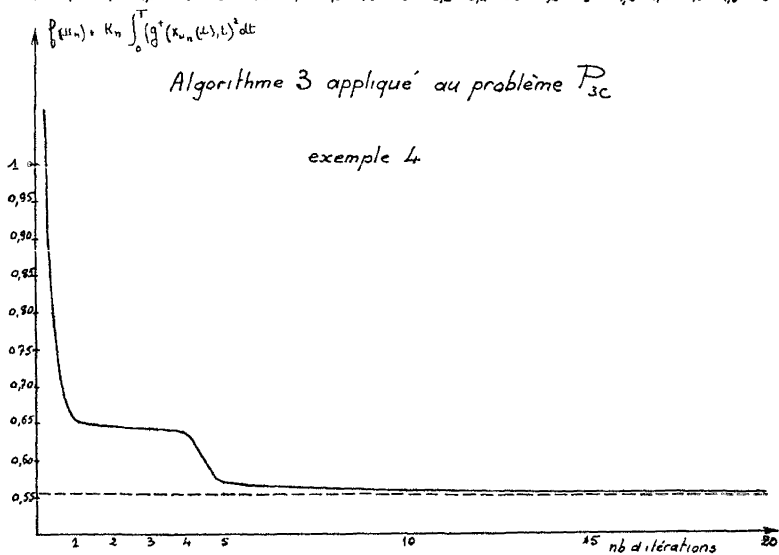
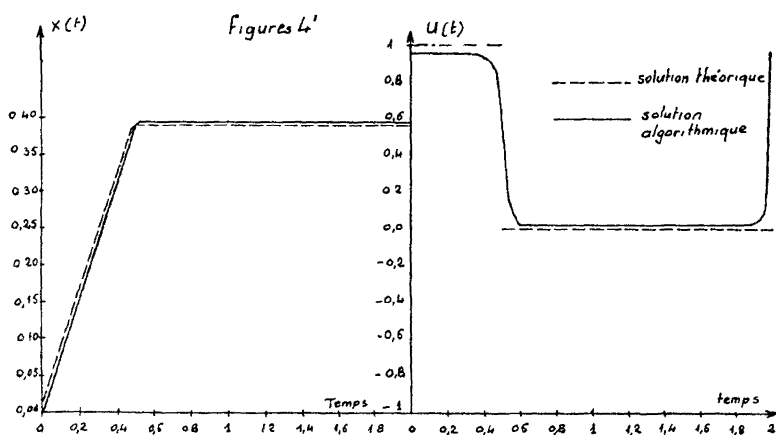


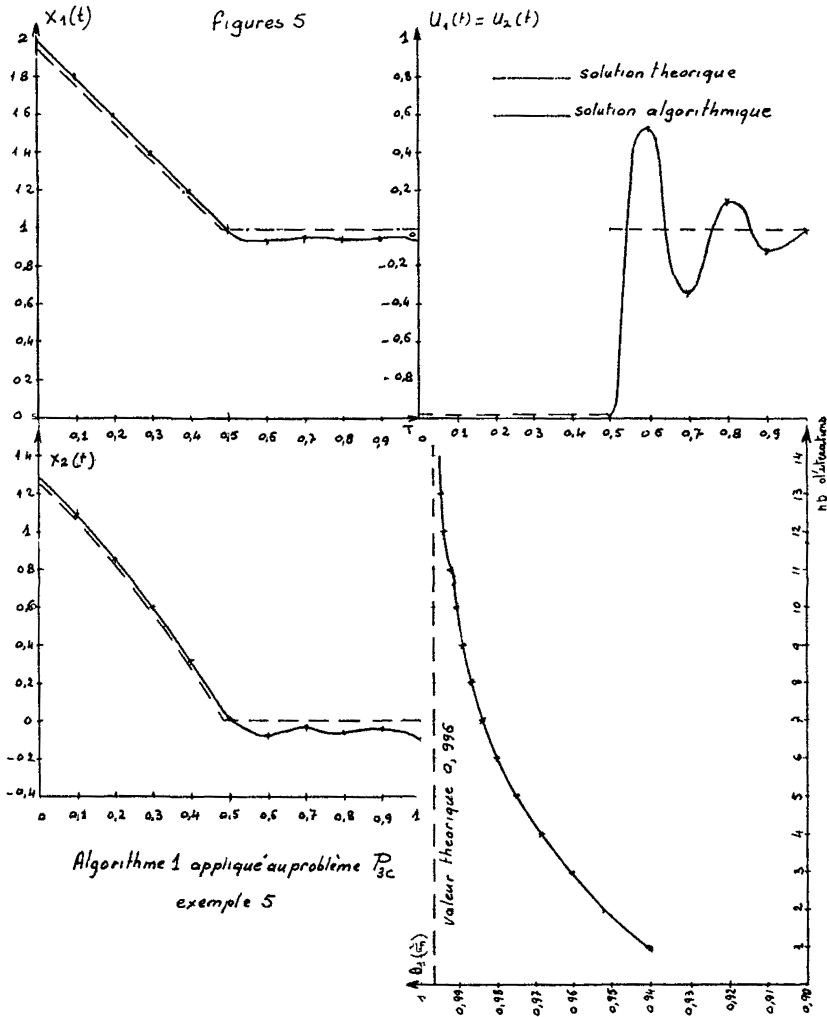


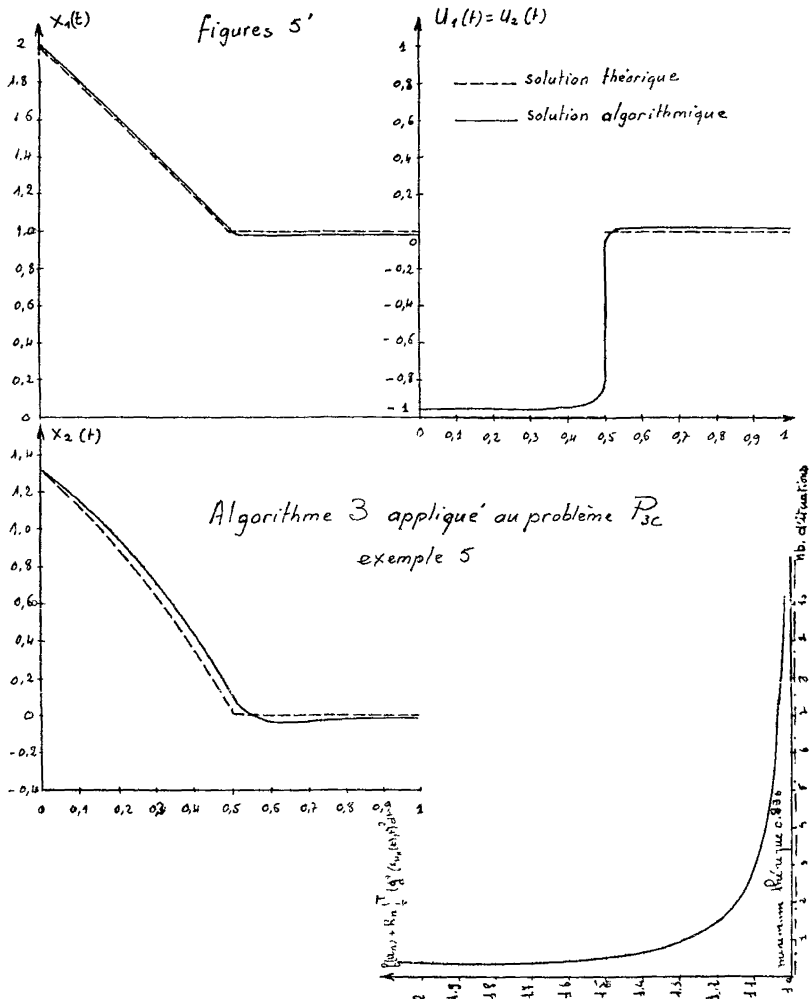


Algorithme 1 appliqué au problème  $P_{3c}$   
exemple 4









## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARROW HURWITZ, *Studies in linear and non linear programming*, Stanford University Press.
- [2] AUSLENDER, *Algorithme de recherche de points stationnaires d'une fonctionnelle dans E.V.T.*, C.R.A.S., t. 226, pp. 226-229 (22 janvier 1968).
- [2 bis] AUSLENDER, *Méthodes numériques pour la résolution des problèmes d'optimisation avec contraintes*, thèse Faculté des Sciences, Grenoble.
- [3] BARANOV-TRUKHEV, *The basis on the umbebbing method in variational problems*, Leningrad Translated from *Automatika i Telemekanika*, n° 7, pp. 10-14, July 1967.
- [4] T. BUTTLER and MARTIN, « On a method of courant for minimizing functionals », *Journal of Mathematical Physics*, 41, n° 3, 1962, pp. 291-299.
- [5] BREGMAN, *The method of successive projections for finding a common point of convex sets*.
- [6] CHENEY-GOLDSTEIN, *Numerisch Mathematic*, n° 5, 1959, pp. 253-259.
- [7] DUNFORD and SCHWARTZ, *Linear Operators*, part. 1.
- [8] GHOUILA-HOURI, « Sur la généralisation de la notion de commande de système guidable », *R.I.R.O.*, n° 4, juillet-août 1967.
- [9] KRYOSHINA-OKAMURA, *Some mathematical theory of penalty method for solving optimum control problem*, Siam Control, série A, vol. 2, n° 2, 1963.
- [10] KOOP, *Several trajectories optimisation techniques computing methods in optimisation problems*, edited by A.V. Balakrishman Academic Press, 1964.
- [11] LEGENDRE, *Projet d'ingénieur fin d'études*, I.P.G., Grenoble, 1969, à paraître.
- [12] MCGILL, *Optimal control, inequalities state constraints and the generalized Newton Ralphson algorithm*, Siam control, Ser. A, vol. 3, n° 2.
- [13] MEZLYAKOV, « On a relaxation method for solving systems of linear inequalities », *Journal of Mathematic and Physics*, 2, n° 3, 1962.
- [14] MOTZKIN, SCHOENBERG, « The relaxation method for linear inequalities », *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 6, 1954.
- [15] MOVCHOVITCHY, « Sur une méthode de résolution de problèmes linéaires et convexe » (en russe), *Economica et méthodes mathématiques*, 1967, t. 3, n° 4.
- [16] POLJACK-LEVITIN, *Constrained minimization methods*, Zh. Vychisl. Mat. mat Fiz, 6, 5, 781-823, 1966.
- [17] PSHENICHYI, *A dual method in extremal problems I and II*, Kibernetika, 1, 1965, n° 3, pp. 89-95, n° 4, pp. 64-69.
- [18] RUSSEL, *Penalty functions and bounded phase coordinate*, J. Siam Control, Ser. A 2 (1964), pp. 409-423.
- [19] VALENTINE, *Convex sets*, Mac Graw Hill.
- [20] VILLEMAIN, thèse de 3<sup>e</sup> cycle, à paraître Institut de Mathématiques Appliquées, Grenoble.