

P. SOURIAC

**Semi-stabilisation de problèmes mal posés pour
des opérateurs d'ordre élevé**

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 3, n° R1 (1969), p. 45-63

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_1_45_0

© AFCET, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SEMI-STABILISATION DE PROBLEMES MAL POSES POUR DES OPERATEURS D'ORDRE ELEVE

par P. SOURIAC ⁽¹⁾

Résumé. — Dans cet article est exposée une méthode de résolution théorique et pratique (numérique) de problèmes mal posés : la méthode de semi-stabilisation.

Il s'agit d'une adaptation de la méthode de stabilisation (exposée avec les autres « méthodes Q.R. » dans R. Lattès, J. L. Lions, [3]).

Cette semi-stabilisation a permis de résoudre complètement des problèmes mal posés pour des opérateurs d'ordre élevé, ou bien pour lesquels les autres méthodes Q.R. conduisent à des difficultés, voire des impossibilités, dans la création d'opérateurs dégénérant convenablement ou dans la prise en compte de certaines conditions aux limites.

PLAN

1. Rappels sur la méthode de stabilisation.
2. Exemples d'application de la méthode de stabilisation.
3. Idée générale de la méthode de semi-stabilisation.
4. Premiers tests numériques de comparaison des deux méthodes.
5. Une généralisation à des problèmes Δ^n -harmoniques mal posés.
6. Un test numérique sur un problème Δ^4 -harmonique mal posé.
7. Idée d'une généralisation à d'autres opérateurs d'ordre élevé.

1. RAPPELS SUR LA METHODE DE STABILISATION

Donnons un résumé de la méthode, dont on trouvera le détail dans R. Lattes, J. L. Lions [3].

Soit H , espace de Hilbert, où le produit scalaire et la norme sont notés (\cdot, \cdot) et $|\cdot|$.

(1) Assistant de Mathématiques, Faculté des Sciences de Toulouse.

Soit A un opérateur, fermé et de domaine $D(A)$ dense dans H .

On munit $D(A)$ de la norme du graphe, notée $\|\cdot\| = (|\cdot| + |A\cdot|)^{1/2}$, $D(A)$ est un espace de Hilbert

Soit $f \in H$, et soit à trouver $u \in D(A)$ telle que $Au = f$ (1).

Hypothèses fondamentales sur A : (i) A est fermé (\Leftrightarrow si u_n est une suite de $D(A)$ qui converge vers u dans H , et si Au_n converge vers g dans H , alors $u \in D(A)$ et $g = Au$).

(ii) A est biunivoque.

Conséquences : si $f \in A[D(A)] = R(A)$, (« range » de A), (1) admet une et une seule solution.

Mais f est donnée (mesurée) par f^* , $f^* \notin R(A)$ en général, donc (1) est en fait mal posé.

Stabilisation de (1) : Soit Q_ε la forme bilinéaire définie sur $D(A)$ par :

$Q_\varepsilon(u, v) = (Au, Av) + \varepsilon(u, v)$, ($\varepsilon > 0$ sera précisé quelques lignes plus loin).

Hypothèse fondamentale sur Q_ε : (iii) Q_ε est coercive sur $D(A)$, ou $D(A)$ -elliptique, c'est-à-dire : $\exists \alpha > 0$, $\forall v \in D(A)$, tel que : $Q_\varepsilon(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$.

Alors, on pose : trouver $u_\varepsilon \in D(A)$, vérifiant :

$$Q_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (f, Av) \quad \forall v \in D(A) \quad (2).$$

On obtient les résultats suivants :

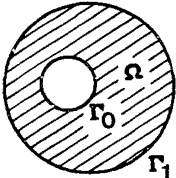
— l'application $f \rightarrow u_\varepsilon$ de H dans $D(A)$ est continue, c'est-à-dire : (2) est bien posé ;

— lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u$, solution de (1), ce qui précise le rôle de ε . Il reste à discrétiser (2) ou un problème équivalent, pour arriver aux résultats numériques. Cette méthode, extrêmement générale, a été appliquée à des exemples numériques nombreux, mais donne en général des résultats moins bons que les autres méthodes Q.R.

2. EXEMPLES D'APPLICATION DE LA METHODE DE STABILISATION

Dans [1], [2], [4], sont exposés les résultats de recherches faites au Laboratoire d'Informatique de la Faculté des Sciences de Toulouse, pour les cas suivants, par Q.R. et stabilisation.

(I) G. BERNIS [1] : $A = \Delta^2 = \Delta \circ \Delta \left(\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)$, Ω ouvert borné de \mathbf{R}^N limité par Γ_0 et Γ_1 (cf. fig. dans \mathbf{R}^2), trouver $u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, telle que :



$$\left\{ \begin{array}{l} Au = 0 \text{ dans } \Omega \\ u|_{\Gamma_0} = g_1, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = g_2 \\ \Delta u|_{\Gamma_0} = g_3, \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = g_4 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} g_i \text{ données} \\ \frac{\partial}{\partial n} = \text{dérivée normale} \end{array} \right)$$

(II) D. KALFON [2] : $A = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0(x)$, même domaine Ω que précédemment,

$$\left\{ \begin{array}{l} Au = 0 \text{ dans } \Omega \\ u|_{\Gamma_0} = g_1, \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \Big|_{\Gamma_0} = g_2 \end{array} \right. \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu_A}, \text{dérivée conormale définie par} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \cos(\vec{\nu}, \vec{Ox_i})$$

ν étant la normale extérieure).

(III) P. SOURIAU [4] : $A = \Delta^2$, même domaine que précédemment,

$$\left\{ \begin{array}{l} Au = 0 \text{ dans } \Omega \\ u|_{\Gamma_0} = g_1, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = g_2 \quad \Delta u|_{\Gamma_0} = g_3 \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = g_4. \end{array} \right.$$

Dans chacun des cas, la méthode de stabilisation devient :

a) *Rendre homogène le problème.*

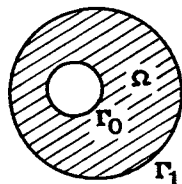
On pose $u = \tilde{u} + \varphi$, φ vérifiant les conditions aux limites, d'où, en posant $-A\varphi = f$, le problème homogène :

$$A\tilde{u} = f, \text{ conditions nulles}$$

b) *Vérifier (i), (ii), (iii), en prenant : $H = L^2(\Omega)$, $D(A) = \{ u \in H / Au \in H, u \text{ vérifie les conditions aux limites } \}$, et $(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$, Q_ε correspondante. D'où les propriétés d'unicité, d'existence et de convergence (pour $\varepsilon \rightarrow 0$) désirées.*

c) Trouver un problème équivalent à (2), et numériquement exploitable. Cela donne respectivement :

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \Delta^4 u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = \Delta^2 f \text{ dans } \Omega, \\ \text{sur } \Gamma_0 : u_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \Delta u_\varepsilon = \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ (anciennes)} \\ \text{sur } \Gamma_1 : \Delta^2 u_\varepsilon = f, \frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n}, \\ \Delta^3 u_\varepsilon = \Delta f, \frac{\partial \Delta^3 u_\varepsilon}{\partial n} = \frac{\partial \Delta f}{\partial n} \text{ (nouvelles)} \end{array} \right. \\
 \text{(II)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} A^* A u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = A^* f \text{ dans } \Omega \text{ (} A^*, \text{ adjoint de } A \text{)} \\ \text{sur } \Gamma_0 : u_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_A} = 0 \text{ (anciennes)} \\ \text{sur } \Gamma_1 : A u_\varepsilon = f, \frac{\partial A u_\varepsilon}{\partial \nu_{A^*}} = \frac{\partial f}{\partial \nu_{A^*}} \text{ (nouvelles)} \end{array} \right. \\
 \text{(III)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \Delta^4 u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = \Delta^2 f \text{ dans } \Omega, \\ \text{sur } \Gamma_0 : u_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \Delta u_\varepsilon = 0 \text{ (anciennes)} \quad \Delta^2 u_\varepsilon = f \text{ (nouvelle)} \\ \text{sur } \Gamma_1 : \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ (ancienne)} \\ \frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n}, \Delta^3 u_\varepsilon = \Delta f, \frac{\partial \Delta^3 u_\varepsilon}{\partial n} = \frac{\partial \Delta f}{\partial n} \text{ (nouvelles).} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$



d) Discrétiser le problème équivalent.

Les ordres des opérateurs ont doublé, la discrétisation est longue, le schémas itératifs de résolution sont inapplicables en raison de la lenteur de la convergence (plusieurs jours, même avec accélération), les réseaux recouvrant Ω doivent avoir « beaucoup » de points sinon chaque point est affecté par les conditions aux limites, et finalement les machines telles que l'IBM 7044 ne permettent pas une résolution directe du système discret obtenu (s'il y a 500 points du réseau, la matrice est 500×500 et on n'a que 40 000 mémoires).

Néanmoins, en créant des exemples à symétrie, on peut faire quelques tests, et on constate que les résultats sont assez peu satisfaisants.

3. IDEE GENERALE DE LA METHODE DE SEMI-STABILISATION

Notons d'abord que les problèmes (I) et (II) ont été résolus aussi par les autres méthodes Q.R., mais que le problème (III) s'est montré réfractaire à toute autre méthode que la stabilisation (difficultés, peut-être impossibilité, de trouver un opérateur dégénéralant convenablement sur Γ_0 et Γ_1 , et de prendre en compte alors la condition sur Γ_1).

Montrons, sur l'exemple (III), la semi-stabilisation.

On part du problème homogène :

$$\begin{cases} \Delta^2 \tilde{u} = f \text{ dans } \Omega \\ \tilde{u}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = \Delta \tilde{u}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \Delta \tilde{u}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0. \end{cases}$$

1^{re} étape : On pose $\Delta \tilde{u} = w$, on résout
$$\begin{cases} \Delta w = f \text{ dans } \Omega \\ w|_{\Gamma_0} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0. \end{cases}$$

Problème bien posé, classique, pas de difficultés. On trouve w .

2^e étape : Il reste :
$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = w \text{ dans } \Omega \\ \tilde{u}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = 0. \end{cases}$$

Problème mal posé, qu'on pourrait résoudre par des méthodes Q.R., mais qu'on résout ici par stabilisation car il semble que cette méthode peut convenir encore là où les autres méthodes Q.R. échouent, dans des cas plus généraux.

On prend donc

$$H = L^2(\Omega), D(A) = \{ u \in H / \Delta u \in H, u|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = 0 \},$$

(i) (ii) et (iii) sont vérifiées, avec $Q_\varepsilon(u, v) = \varepsilon \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx$.

D'où le problème variationnel : $Q_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \int_{\Omega} w \cdot \Delta v \, dx \, \forall v \in D(A)$, qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \Delta^2 u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = \Delta w \text{ dans } \Omega \\ u_\varepsilon|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = 0 \text{ (anciennes)} \\ \Delta u_\varepsilon|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_1}, \text{ (nouvelle) et } \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} \text{ donc } = 0 \text{ (1^{re} étape).} \end{cases}$$

On voit que l'on n'a, au total, pas à doubler l'ordre de l'opérateur A , et que la discrétisation impose des schémas plus réduits qu'avant, d'où la possibilité, à nombre égal de points, d'avoir de meilleurs résultats qu'avant.

4. PREMIERS TESTS NUMERIQUES DE COMPARAISON DES DEUX METHODES

Des exemples à 2 dimensions, (en coordonnées polaires) avaient été traités par stabilisation, et ont été repris par semi-stabilisation. Ce sont les suivants :

Données : Ω , couronne circulaire concentrique, limitée par $\Gamma_0(r = 1)$ et $\Gamma_1(r = 2)$.

1 ^{er} exemple

 : La solution est $u = \frac{-\cos 2\theta}{r^2}$.

Problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{sur } \Gamma_0 : u = -\cos 2\theta, \frac{\partial u}{\partial r} = 2 \cos 2\theta, \Delta u = 0 \\ \text{sur } \Gamma_1 : \frac{\partial \Delta u}{\partial r} = 0 \end{array} \right.$$

Problème homogène : avec $\varphi = (-3r^2 + 8r - 6) \cos 2\theta$, et $u = \tilde{u} + \varphi$, on obtient :

$$\Delta^2 \tilde{u} = \frac{-72 \cos 2\theta}{r^3} \text{ dans } \Omega,$$

$$\tilde{u}/\Gamma_0 = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} / \Gamma_0 = \Delta \tilde{u}/\Gamma_0 = \frac{\partial \Delta \tilde{u}}{\partial r} / \Gamma_1 = 0$$

Solution :

$$\tilde{u} = \left(\frac{-1}{r^2} + 3r^2 - 8r + 6 \right) \cos 2\theta.$$

Problème stabilisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^4 u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = \frac{-7\,560 \cos 2\theta}{r^7} \text{ dans } \Omega \\ \text{sur } \Gamma_0 : u_\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} = \Delta u_\varepsilon = 0, \Delta^2 u_\varepsilon = -72 \cos 2\theta. \\ \text{sur } \Gamma_1 : \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon}{\partial r} = \frac{27}{2} \cos 2\theta, \\ \Delta^3 u_\varepsilon = \frac{-45}{4} \cos 2\theta, \frac{\partial \Delta^3 u_\varepsilon}{\partial r} = \frac{225}{8} \cos 2\theta \end{array} \right.$$

Problème semi-stabilisé :

1^{re} étape :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = -\frac{72 \cos 2\theta}{r^3} \text{ dans } \Omega \\ w|_{\Gamma_0} = \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1} = 0 \end{array} \right\} \text{ problème bien posé qui fournit un tableau de valeurs de } w$$

2^e étape :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{u} = w \text{ dans } \Omega \\ \tilde{u}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \Big|_{\Gamma_0} = 0 \end{array} \right\} \text{ problème mal posé}$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = \Delta w \text{ dans } \Omega, \\ u_\varepsilon|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} \Big|_{\Gamma_0} = 0 \\ \Delta u_\varepsilon|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_1}, \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1} = 0. \end{array} \right.$$

Discretisation : les pas sont $h = \Delta r = \frac{1}{10}$, $k = \Delta \theta = \frac{\pi}{16}$; les symétries autorisent à considérer 5 rayons $\left(\theta = 0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4} \right)$, d'où, à 18 points par rayon, 90 points du réseau.

— On a, par rayon, les points définis par : $r = 1 - 3h, 1 - 2h, 1 - h, \dots, 2, 2 + h, 2 + 2h, 2 + 3h, 2 + 4h$, nécessité due aux étendues des schémas discrets de $\Delta^4, \frac{\partial \Delta^3}{\partial r}, \dots$

— Pour le problème stabilisé, les 90 points sont nécessaires, mais pour le semi-stabilisé, 70 seulement d'entre eux sont utilisés, à savoir, par rayon, les points $1 - h, 1, 1 + h, \dots, 2 - h, 2, 2 + h, 2 + 2h$.

Formules discrètes : en partant des formules symétriques classiques,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^j}{\partial r} &\simeq \frac{u_{i-1}^j - u_{i+1}^j}{h}, \quad \frac{\partial^2 u_i^j}{\partial r^2} \simeq \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \quad \text{ou} \quad \frac{u_{i-2}^j - 2u_i^j + u_{i+2}^j}{4h^2}, \\ \frac{\partial u_i^j}{\partial \theta} &\simeq \frac{u_i^{j-1} - u_i^{j+1}}{k}, \quad \frac{\partial^2 u_i^j}{\partial \theta^2} \simeq \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{k^2}, \end{aligned}$$

on les applique entre elles de manière à obtenir Δ , puis $\frac{\partial \Delta}{\partial r}$, etc. discrets.

Résolution : en Fortran IV, double précision, sur IBM 7044; on a utilisé un sous-programme de résolution directe (méthode à pivots) de la bibliothèque de la machine.

Dans chaque cas, on a successivement pris 14 valeurs de ε , allant de 10^6 à 10^{-6} et 0, par puissances de 10. Au besoin, on a testé avec plus de précision les valeurs qui pouvaient être optimales pour ε (valeurs pour lesquelles l'erreur $\sqrt{hk \sum_R (u \text{ calculée} - u \text{ homogène})^2}$ est minimale).

R étant l'ensemble des points où est traduite l'équation principale.

Résultats : voir graphiques 1 et 2.

ε optimal est 0 dans les deux méthodes, alors l'erreur par semi-stabilisation est 1/7 environ de l'erreur par stabilisation.

2^e exemple : On prend l'exemple précédent à partir de : $u = \frac{\cos 4\theta}{r^2}$, d'où des modifications par rapport aux données précédentes.

Pour homogénéiser, on a pris $\varphi = (30r^3 - 87r^2 + 82r - 24) \cos 4\theta$.

En continuant comme précédemment, on a trouvé les résultats portés sur les graphiques 3 et 4.

ε optimal est 6 000 par stabilisation (ce qui est aberrant); il devient 0 par semi-stabilisation, avec l'erreur correspondante 100 fois plus faible, donc il y a une amélioration considérable.

Dans chaque cas, les calculs sont environ deux fois moins longs (12 à 13 mn pour 14 résolutions, avec les 14 ε , contre 6 à 7 mn) par semi-stabilisation.

Conclusions : la semi-stabilisation a amélioré notablement les résultats et les temps de calcul, toutes choses égales par ailleurs.

REMARQUE : Les exemples-tests du (I), repris par semi-stabilisation, conduisent aux mêmes conclusions; de plus, les résultats par semi-stabilisation, comparés à ceux dus aux méthodes Q.R., montrent que la semi-stabilisation est au moins aussi bonne que ces autres méthodes.

5. UNE GENERALISATION A DES PROBLEMES Δ^n -HARMONIQUES MAL POSES

— Δ est le laplacien, $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ = dérivée normale, I = identité.

— Soit S l'ensemble des $2n$ opérateurs, d'ordres croissants, défini par :

$$S = \left\{ I, \frac{\partial}{\partial n}, \Delta, \frac{\partial \Delta}{\partial n}, \dots, \Delta^k, \frac{\partial \Delta^k}{\partial n}, \dots, \Delta^{n-1}, \frac{\partial \Delta^{n-1}}{\partial n} \right\},$$

qu'on notera aussi : $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}, s_{2n}\}$ respectivement.

— Soit I_0 un ensemble d'indices extraits de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, I_1 le complémentaire, avec $\text{card}(I_0) \neq \text{card}(I_1)$.

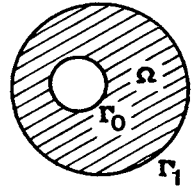
— Soit les $2n$ fonctions (ou tableaux de mesures approchés par ces fonctions) données g_1, \dots, g_{2n} , définies sur Γ_0 ou Γ_1 suivant les besoins.

— Soit alors le problème P_n :

Données : Ω , ouvert borné de \mathbf{R}^N , limité par Γ_0 et Γ_1 (cf. fig. dans \mathbf{R}^2), et les fonctions g_1, \dots, g_{2n} .

Problème: trouver $u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, telle que :

$$\underset{P_n}{=} \begin{cases} \Delta^n u = 0 \text{ dans } \Omega \\ \{s_p u / \Gamma_0 = g_p\}_{p \in I_0} \quad \text{et} \quad \{s_q u / \Gamma_1 = g_q\}_{q \in I_1} \end{cases}$$



— P_n est Δ^n -harmonique, et mal posé puisqu'on a $\text{card}(I_0) \neq \text{card}(I_1)$.

— On rend P_n homogène, on obtient, avec $u = \tilde{u} + \varphi$, φ vérifiant toutes les conditions aux limites, et en posant — $\Delta^n \varphi = f$,

$$\underset{\tilde{P}_n}{=} \begin{cases} \Delta^n \tilde{u} = f \text{ dans } \Omega \\ \{s_p \tilde{u} / \Gamma_0 = 0\}_{p \in I_0} \quad \text{et} \quad \{s_q \tilde{u} / \Gamma_1 = 0\}_{q \in I_1} \end{cases}$$

— Il est hors de question de stabiliser \tilde{P}_n pour $n > 2$, on obtient en effet :

$\Delta^{2n} u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = \Delta^n f$ dans Ω , avec les anciennes conditions aux limites et autant de nouvelles qui les complètent, et les problèmes de discrétisation sont inextricables dès qu'on a deux variables.

— D'où la *semi-stabilisation* suivante :

1^{re} étape : on pose $\Delta^{n-1} \tilde{u} = w^1$, on a :

$$\begin{cases} \Delta w^1 = f \text{ dans } \Omega \\ w^1 / \Gamma_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_j} = 0, \quad i, j \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

a) si $i \neq j$, le problème est bien posé, résolution classique.

b) si $i = j$, le problème est mal posé, les méthodes Q.R. peuvent s'appliquer, mais aussi la stabilisation, qui est très simple maintenant.

On obtient :

$$\begin{cases} \Delta^2 w_\varepsilon^1 + \varepsilon w_\varepsilon^1 = \Delta f \text{ dans } \Omega \\ \text{sur } \Gamma_i : w_\varepsilon^1 = \frac{\partial w_\varepsilon^1}{\partial n} = 0 \\ \text{sur } \Gamma_{i' \neq i} : \Delta w_\varepsilon^1 = f, \quad \frac{\partial \Delta w_\varepsilon^1}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n}. \end{cases}$$

Il n'y a plus de difficultés, cf. les exemples du paragraphe 4.

— w_e^1 calculée est considérée comme étant w^1 pour l'étape suivante.

2^e étape : on a donc des valeurs pour w^1 , il reste un problème \tilde{P}_{n-1} (analogue à \tilde{P}_n) pour lequel on pose $\Delta^{n-2}\tilde{u} = w^2$, et ainsi de suite.

REMARQUES. — On n'a stabilisé que les sous-problèmes instables contenus dans le problème instable initial. Tous les n sous-problèmes sont instables si et seulement si $\text{card}(I_0) = 0$, [ou $\text{card}(I_1) = 0$], et même dans ce cas, chacun n'est qu'un problème bi-harmonique bien posé.

On peut craindre de voir s'accumuler les erreurs successives sur w^1, w^2, \dots , mais cela ne s'est pas produit, en fait, lors des tests numériques.

6. UN TEST NUMERIQUE SUR UN PROBLEME Δ^4 -HARMONIQUE MAL POSE

On a créé l'exemple suivant, à 1 variable seulement en raison de l'extrême longueur des calculs théoriques.

$$\Omega =]1, 2[\subset \mathbf{R} \quad , \quad (\Gamma_0 : x_0 = 1, \Gamma_1 : x_1 = 2).$$

P_4 : $\Delta^4 u = 0$ dans Ω avec les conditions

$$x = 1 : u = 16, u' = 112, u'' = 672, u^{(4)} = 13\,440, u^{(6)} = 80\,640,$$

$$x = 2 : u''' = 53\,760, u^{(5)} = 161\,280, u^{(7)} = 80\,640.$$

Solution : $u = 16x^7$.

\tilde{P}_4 (homogène) : $\Delta^4 \tilde{u} = -40\,320$ dans Ω , conditions nulles.

Solution :

$$\begin{aligned} \tilde{u} = u - \varphi = & -x^8 + \underbrace{16x^7}_u - 84x^6 + 112x^5 \\ & + 210x^4 + 112x^3 - 1\,764x^2 + 2\,192x - 793 \end{aligned}$$

Semi-stabilisation :

$$1^\circ \tilde{u}^{(6)} = w_1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_1'' = -40\,320 \text{ dans } \Omega \\ w_1 = 0 \text{ pour } x = 1 \text{ et } w_1' = 0 \text{ pour } x = 2 \end{array} \right\} \text{ bien posé.}$$

$$2^\circ \tilde{u}^{(4)} = w_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_2'' = w_1 \text{ dans } \Omega \\ w_2 = 0 \text{ pour } x = 1 \text{ et } w_2' = 0 \text{ pour } x = 2 \end{array} \right\} \text{ bien posé.}$$

$$3^\circ \tilde{u}'' = w_3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_3'' = w_2 \text{ dans } \Omega \\ w_3 = 0 \text{ pour } x = 1 \text{ et } w_3' = 0 \text{ pour } x = 2 \end{array} \right\} \text{ bien posé.}$$

4° Il reste : $\tilde{u}'' = w_3$ dans Ω et $\tilde{u} = \tilde{u}' = 0$ pour $x = 1$, *mal posé*.

On résout donc :

$$\begin{cases} \tilde{u}_\varepsilon^{(4)} + \varepsilon \tilde{u}_\varepsilon = w_\varepsilon'' \text{ dans } \Omega \\ \tilde{u}_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon' = 0 \text{ pour } x = 1 \\ \tilde{u}_\varepsilon'' = w_3 \text{ pour } x = 2 \text{ et } \tilde{u}_\varepsilon''' = 0 (= w_3') \text{ pour } x = 2. \end{cases}$$

On a pris le pas $\Delta x_- = h = \frac{1}{50}$, donc 54 points,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \text{N}^\circ 1 : x = 1 - \frac{1}{50}, \text{ N}^\circ 2 : x = x_0 = 1, \text{ etc.,} \\ \text{N}^\circ 52 : x = 2, \text{ N}^\circ 53 : x = 2 + \frac{1}{50}, \\ \text{N}^\circ 54 : x = 2 + \frac{2}{50} \end{array} \right). \end{aligned}$$

et on a pris les formules discrètes classiques,

$$\frac{du}{dx} \simeq \frac{1}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}), \quad \frac{d^2u}{dx^2} \simeq \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}),$$

d'où toutes les formules nécessaires à 4^o en composant celles-ci suivant les besoins.

On a résolu successivement les 4 sous-problèmes par une méthode directe (à pivots), et les résultats sont portés sur les graphiques 5 et 6 : on voit encore qu'on a ε optimal nul et l'invariance de l'erreur pour ε variant de 0 à 10^{-2} ; l'erreur finale est de 0, 14,

$$\left(\text{erreur} = \sqrt{h \sum_{i=2}^{52} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{exacte}}}{\tilde{u}_\varepsilon^i} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calculée}}}{\tilde{u}_{\varepsilon,h}^i} \right)^2} \right),$$

ce qui représente en moyenne, en chaque point du réseau, une erreur relative jamais supérieure à 1 pour 500; le temps total des calculs est 3 mn 38 s (il y a 14 valeurs d' ε).

7. IDEE D'UNE GENERALISATION A D'AUTRES OPERATEURS D'ORDRE ELEVE

— Soit A , opérateur composé défini par $A = A_n \circ A_{n-1} \circ \dots \circ A_1$, les A_i étant des opérateurs aux dérivées partielles, provisoirement quelconques, l'ordre de A étant K ;

— on veut résoudre : $Au = 0$ dans Ω (Ω , domaine borné), avec K conditions sur les limites, telles que le problème soit mal posé;

— on peut (théoriquement) rendre le problème homogène, en trouvant φ vérifiant les conditions aux limites, et, avec $u = \tilde{u} + \varphi$, — $A\varphi = f$, on obtient :

$$\begin{cases} A\tilde{u} = f \text{ dans } \Omega \\ K \text{ conditions nulles.} \end{cases}$$

— Alors, lorsque les conditions aux limites s'y prêtent,

on pose $A_{n-1} \circ A_{n-2} \circ \dots \circ A_1 \tilde{u} = v$, il reste :

$$\begin{cases} A_n v = f \text{ dans } \Omega, \\ \text{des conditions aux limites nulles, en nombre égal à l'ordre de } A_n. \end{cases}$$

— Ce problème étant supposé, soit bien posé, soit justiciable de la stabilisation, on en tire une approximation de v .

— On itère le procédé.

— Des conditions suffisantes d'application de la méthode, sont :

1° que les conditions aux limites se prêtent aux décompositions,

2° que chacun des n sous-problèmes soit :

ou bien stable,

ou bien stabilisable, c'est-à-dire que (i), (ii) et (iii) aient lieu pour le sous-problème envisagé.

REMARQUE. — Il va de soi, que la méthode reste valable si le problème initial est bien posé, seulement il n'y a plus lieu de l'appeler « semi-stabilisation ».

— On pourrait alors envisager un classement des problèmes mal posés, de la manière suivante :

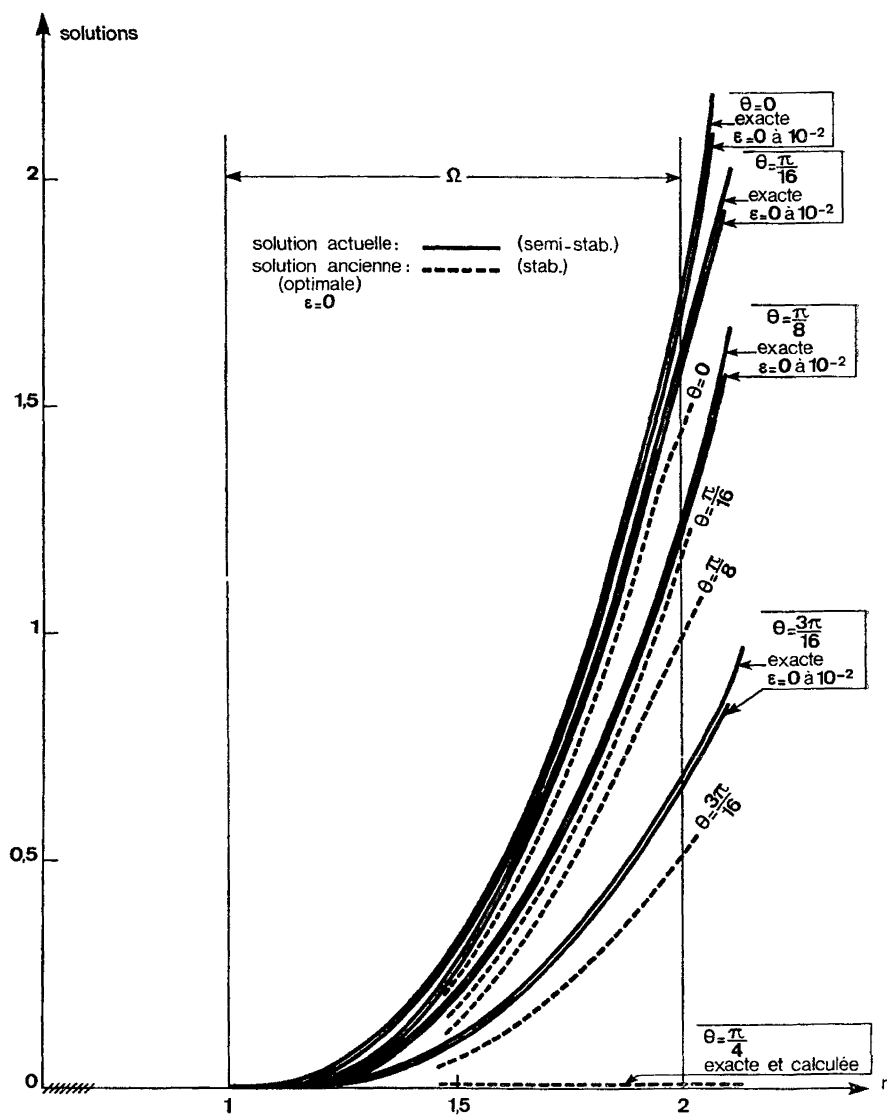
en décomposant le problème comme ci-dessus, on détermine le nombre p de sous-problèmes mal posés qu'il contient, et on pourrait dire que le problème est mal posé « de type $\frac{p}{n}$ ».

EXEMPLES. — Le problème (I) serait « mal posé de type 2/2 », le (III) de type 1/2, et l'exemple du paragraphe 6 de type 1/4.

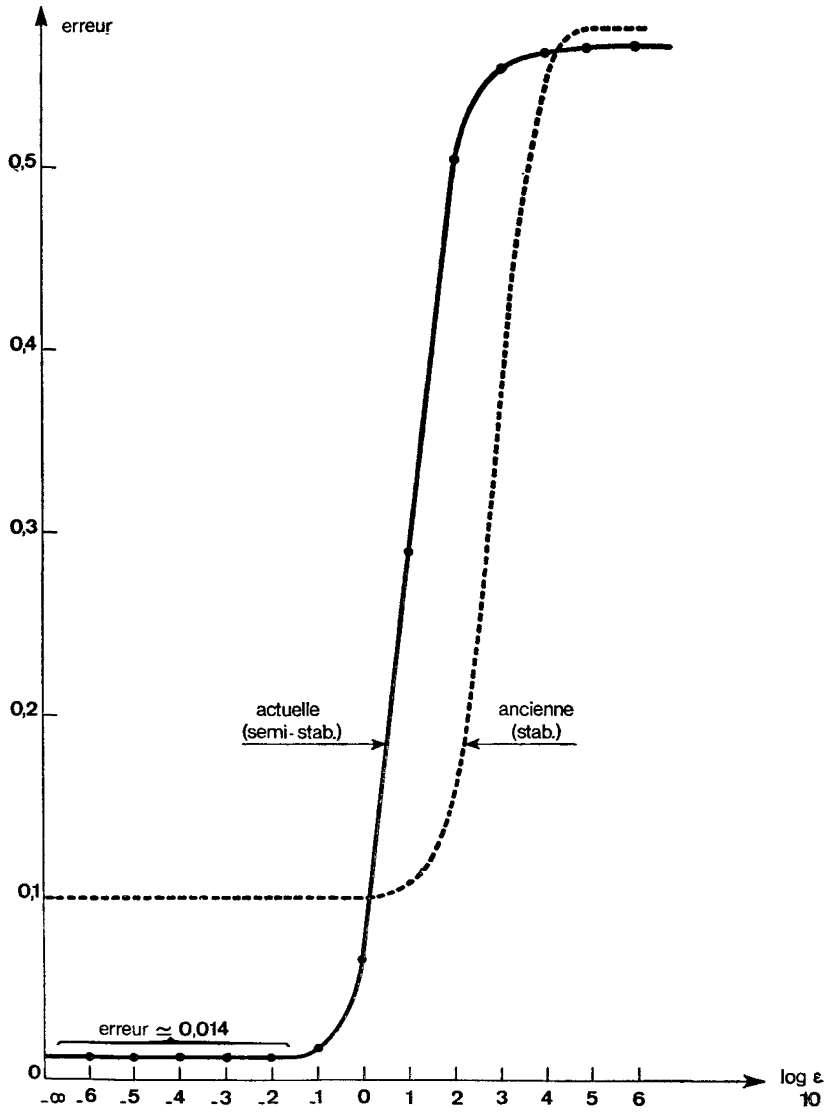
— Enfin, il faut signaler que la stabilisation conduit à discrétiser des opérateurs d'ordre élevé, pour lesquels les questions de convergence lorsque le pas tend vers zéro sont compliquées, tandis que la semi-stabilisation conduit à des ordres moins élevés, et par suite les problèmes de convergence analogues sont certainement plus aisés à étudier.

OUVRAGES CITES EN REFERENCE

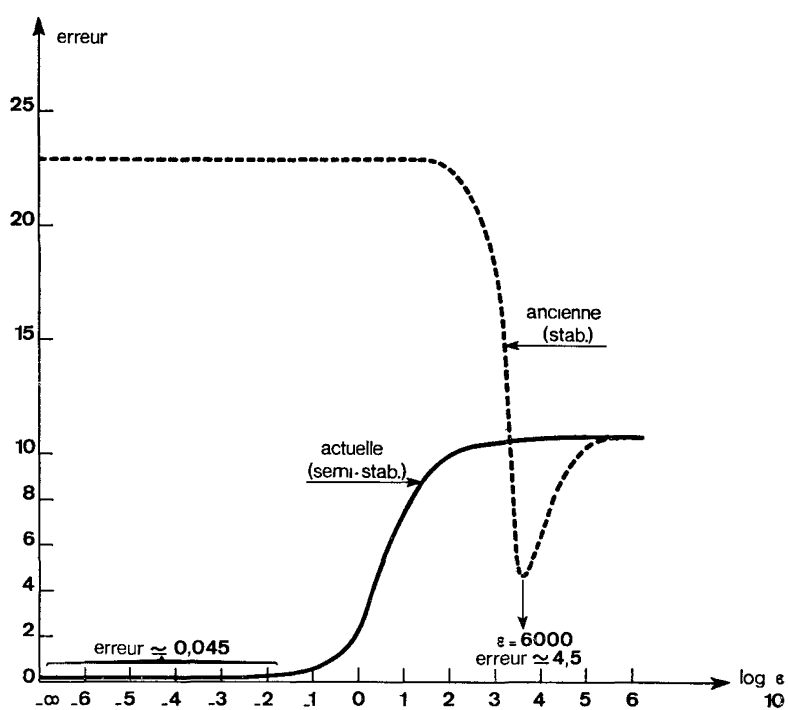
- [1] G. BERNIS, « Résolution numérique d'un problème mal posé pour un opérateur biharmonique », Thèse de 3^e cycle, Laboratoire d'Informatique, Faculté des Sciences de Toulouse.
- [2] D. KALFON, « Résolution numérique d'un problème mal posé pour un opérateur elliptique du second ordre à coefficients variables », Thèse de 3^e cycle, Laboratoire d'Informatique, Faculté des Sciences de Toulouse.
- [3] R. LATTÈS, J. L. LIONS, *Méthode de quasi-réversibilité et applications*, Dunod, 1967.
- [4] P. SOURIAU, « Résolution numérique d'un problème mal posé », Thèse de 3^e cycle, Laboratoire d'Informatique, Faculté des Sciences de Toulouse.



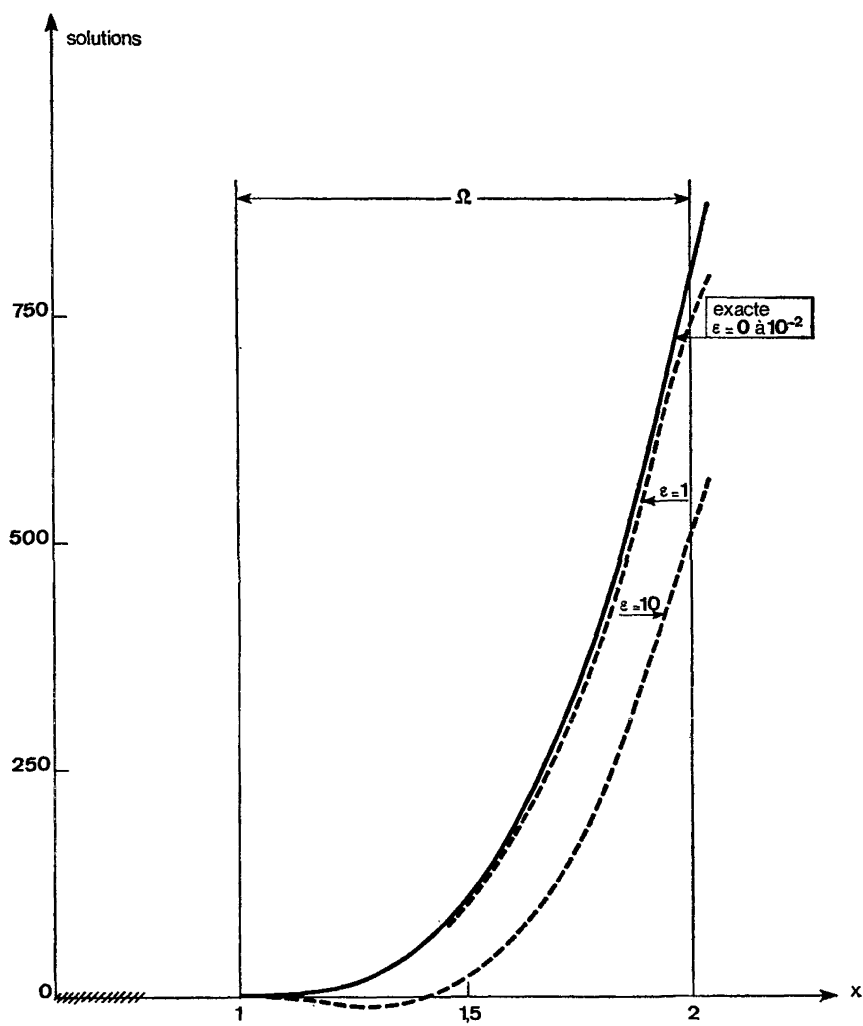
Graphique 1



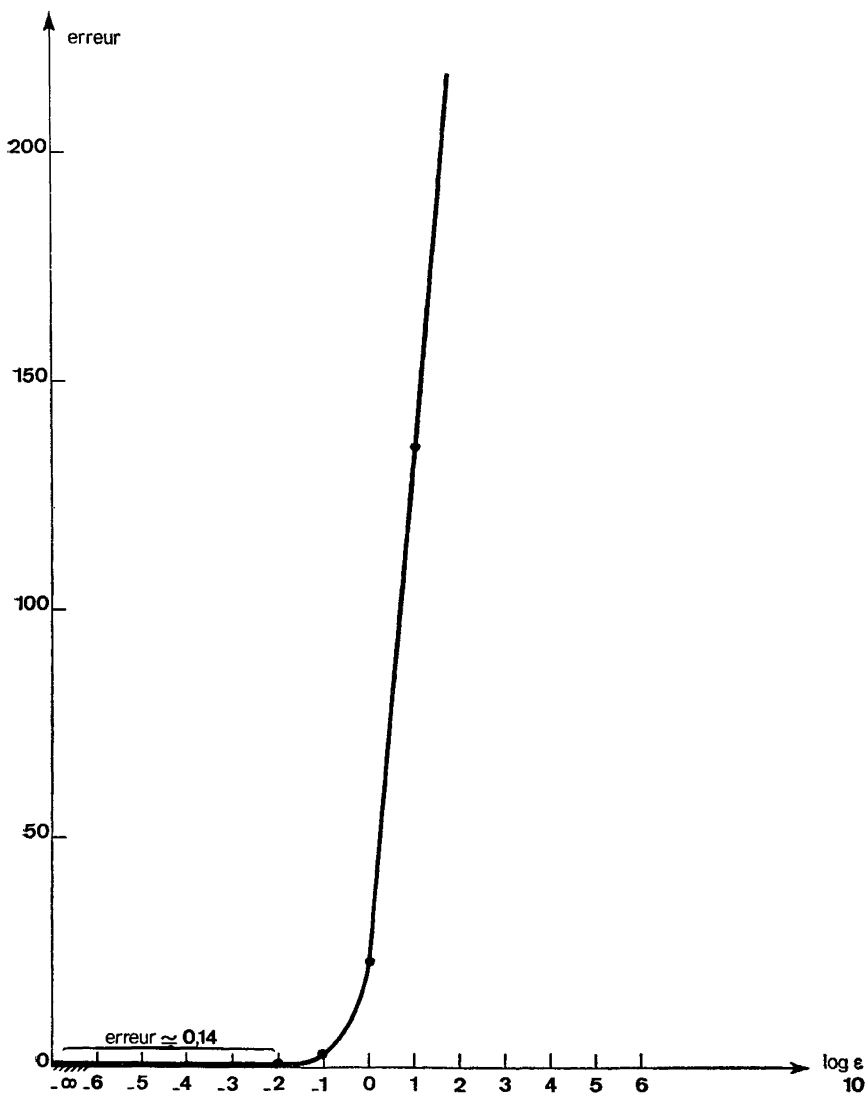
Graphique 2



Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6