

R. ARCANGELI

**Un problème de résolution rétrograde de  
l'équation de la chaleur**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*,  
tome 2, n° R3 (1968), p. 61-78

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1968\\_\\_2\\_3\\_61\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_3_61_0)

© AFCET, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UN PROBLEME DE RESOLUTION RETROGRADE DE L'EQUATION DE LA CHALEUR

par R. ARCANGELI (1)

Résumé. — Dans cet article, on étudie l'application de la méthode de Stabilisation à la résolution numérique d'un problème « mal posé » au sens de Hadamard : il s'agit de déterminer la température initiale d'une tige infinie, telle qu'à un instant  $T > 0$  donné, la température de la tige coïncide sur un intervalle borné avec une température donnée.

On effectue l'approximation de la solution suivant les méthodes de J. P. Aubin et on compare les résultats numériques obtenus à ceux de J. R. Cannon.

### 1. INTRODUCTION

Soient  $q$  et  $T$  positifs donnés,  $E = L^2(\mathbf{R})$ ,  $F = L^2(-q, +q)$ ,  $V = H^1(\mathbf{R})$ . A chaque  $\xi$  donné dans  $E$ , correspond  $u(t)$ , i.e. la fonction  $x \rightarrow u(x, t)$ , solution unique (cf. Lions [8]) de

$$(1.1) \quad u' - \Delta u = 0 \quad \text{p.p. en } t,$$

$$\left( \text{ici } \Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right)$$

$$(1.2) \quad u(0) = \xi,$$

$$(1.3) \quad u \in L^2(0, T; V) \quad , \quad u' \in L^2(0, T; E).$$

REMARQUE 1.1.

La dérivée  $u' = \frac{du}{dt}$  est prise au sens des distributions sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $E$ .

---

(1) Centre d'informatique de Toulouse

On sait (cf. [8]) que  $u$ , qui vérifie (1.3), est presque partout égale à une fonction continue sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $E$  : (1.2) a donc un sens.

Soit maintenant  $\chi$  donné dans  $F$ . Posons

$$(1.4) \quad J(\xi) = \|u_q(T) - \chi\|_F^2,$$

où  $u_q(T)$  désigne la restriction à  $] -q, +q[$  de  $u(T)$  :

A (1.1), (1.2), (1.3), on peut, en particulier, associer les problèmes suivants :

**Problème (1.1)**

$$\inf_{\xi \in E} J(\xi)$$

**Problème (1.2).** — Pour  $\eta$  donné, trouver  $\xi_\eta \in E$  tel que :

$$J(\xi_\eta) \leq \eta$$

**Problème (1.3).**

$$\inf_{\xi \in B} J(\xi)$$

où  $B$  désigne un sous-ensemble de  $E$ .

Il est à noter que les problèmes (1.1) et (1.3) peuvent ne pas avoir de solution : la situation du problème (1.1) sera précisée plus loin.

Pour résoudre (lorsqu'ils ont un sens) les problèmes (1.1), (1.2) et (1.3), on peut utiliser :

— la méthode de Quasi-Réversibilité (cf. [7]), dans les trois cas, ou encore :

— la méthode de Stabilisation (cf. [7]) ou des méthodes liées à la Stabilisation (cf. [1]; [3] et [6]) selon qu'il s'agit du problème (1.1) ou des problèmes (1.2) et (1.3) [dans ce dernier cas, lorsque  $B$  est une boule centrée à l'origine].

Nous nous proposons ici de montrer comment on peut résoudre le problème (1.1) par la méthode de Stabilisation. [Nous traiterons ultérieurement l'application de la méthode de Quasi-Réversibilité.]

Ce problème a déjà été étudié par Cannon (cf. [4]). Nous pourrions donc comparer les résultats numériques obtenus sur un même exemple par des méthodes différentes.

Nous ne considérerons pas pour l'instant les problèmes (1.2) et (1.3) dont l'étude est liée à celle du problème (1.1).

## 2. POSITION DU PROBLEME (1.1)

Toute fonction  $u$  vérifiant (1.1) et (1.3) est telle que, pour presque tout  $t \in ]0, T[$ ,  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(\mathbf{R})$ . [Les dérivées  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  sont prises au sens des distributions sur  $\mathbf{R}$ ]. On peut donc effectuer dans (1.1), (1.2) une transformation de Fourier en  $x$ , ce qui permet d'expliciter la solution de (1.1), (1.2), (1.3) sous la forme

$$(2.1) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \xi(y) dy \quad , \quad t > 0$$

Soit  $A$  l'opérateur  $\xi \rightarrow u_q(T)$ , défini donc par

$$Au(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4T}} \xi(y) dy \quad , \quad x \in ]-q, +q[.$$

$A \in \mathcal{L}(E, F)$ , en effet :

**Proposition 2.1.** —  $A$  est un opérateur linéaire compact de  $E$  dans  $F$ .

Notons  $K(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4T}}$ . On vérifie aisément que, pour tout  $q$  fini,  $\int_{-q}^{+q} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x, y) dx dy < \infty$ , d'où le résultat.

Supposons maintenant que  $\chi$  vérifie :

$$(2.2) \quad \chi \in R(A), \text{ codomaine de } A.$$

Alors  $\inf_{\xi \in E} J(\xi) = 0$  et le minimum est atteint pour (au moins) un élément de  $E$ . D'où une autre formulation du problème (1.1) :  $\chi$  étant donné dans  $R(A)$ , trouver  $\xi \in E$ , solution de l'équation

$$(2.3) \quad A\xi = \chi$$

REMARQUE 2.1.

Le problème étudié est « mal posé » au sens de Hadamard : ce point est une conséquence immédiate du fait que l'opérateur  $A$  est compact, donc non continûment inversible. Du point de vue numérique, il ne faut pas compter résoudre de façon précise l'équation (2.3), pas plus d'ailleurs (cf. [7]) que le système

$$\left\{ \begin{array}{l} u' - \Delta u = 0 \\ u(T) = \chi \\ u \in L^2(0, T; V) \end{array} \right. \quad , \quad u' \in L^2(0, T; E)$$

où l'on aurait au préalable inversé le sens du temps (avec, dans ce dernier problème, une difficulté supplémentaire :  $\chi$  est défini sur  $] -q, +q[$  et non sur  $] -\infty, +\infty[$ ).

Indiquons maintenant deux propriétés de l'opérateur  $A$ .

**Proposition 2.2.** —  $A$  est injectif.

C'est en fait une propriété « d'unicité rétrograde ». Le résultat est contenu dans un théorème de Ito et Yamabe (cf. Lions-Malgrange [9], Ito-Yamabe [5]).

Le problème (1.1) admet donc une solution unique. On a également le résultat suivant, sans utilité pour le problème (1.1), mais qui conditionne l'existence de solutions du problème (1.2) :

**Proposition 2.3.** —  $A^*$ , opérateur adjoint de  $A$ , est injectif [énoncé équivalent : Si  $\chi$  est donné, quelconque, dans  $F$ , alors

$$\inf_{\xi \in E} J(\xi) = 0]$$

Soit  $\bar{\chi} \in E$ , prolongement quelconque de  $\chi$ . Alors, d'après un théorème de Lattes-Lions [7] :

$$\inf_{\xi \in E} \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, T) - \bar{\chi}(x)]^2 dx = 0$$

Mais  $J(\xi) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, T) - \bar{\chi}(x)]^2 dx$ , d'où le résultat.

Pour terminer l'étude du problème « continu » (le problème « discrétisé » fait l'objet du n° 3 ci-après), indiquons comment nous proposons de résoudre numériquement le problème (1.1). On sait (cf. [7]) que la solution (unique)  $\xi(\lambda)$  de l'équation de la Stabilisation associée à (2.3)

$$(2.4) \quad A^*A\xi + \lambda\xi = A^*\chi \quad , \quad \lambda > 0,$$

converge, quand  $\lambda \rightarrow 0$ , vers  $\xi_0$  solution [unique, d'après la proposition (2.2)] de l'équation (2.3).

Nous allons voir qu'on peut approcher  $\xi_0$  par la solution d'une équation obtenue par discrétisation à partir de (2.4).

### 3. APPROXIMATION DE LA SOLUTION

(Le cadre de ce numéro est emprunté à Aubin [1].)

Soit  $\mathcal{J}$  un ensemble borné de nombres réels positifs dont l'adhérence contient 0 et  $h \in \mathcal{J}$  un paramètre destiné à tendre vers 0. On se donne pour tout  $h \in \mathcal{J}$  :

- $E_h, F_h$ , espaces de Hilbert de dimension finie
- $A_h \in \mathcal{L}(E_h, F_h)$ , dont l'adjoint est noté  $A_h^*$

- $p_h \in \mathcal{L}(E_h, E)$ , « prolongement » de  $E_h$  dans  $E$
- $r_h \in \mathcal{L}(E, E_h)$ , « restriction » de  $E$  dans  $E_h$
- $q_h \in \mathcal{L}(F_h, F)$ , prolongement de  $F_h$  dans  $F$
- $s_h \in \mathcal{L}(F, F_h)$ , restriction de  $F$  dans  $F_h$

et l'on formule les hypothèses suivantes :

$$(3.1) \quad \|u_h\|_{E_h} = \|p_h u_h\|_E \quad , \quad \forall u_h \in E_h,$$

$$(3.2) \quad \|v_h\|_{F_h} = \|q_h v_h\|_F \quad , \quad \forall v_h \in F_h,$$

$$(3.3) \quad \chi_h \text{ est donné dans } F_h \text{ et vérifie } \lim_{h \rightarrow 0} \|\chi_h - s_h \chi\|_{F_h} = 0,$$

$$(3.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} p_h r_h u = u \quad , \quad \forall u \in E,$$

$$(3.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} q_h s_h v = v \quad , \quad \forall v \in F,$$

$$(3.6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|A_h^* s_h v - r_h A^* v\|_{E_h} = 0 \quad , \quad \forall v \in F,$$

(3.7) <sup>(1)</sup> La fonction  $\lambda : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est donnée et vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda(h) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|A_h r_h \xi_0 - \chi_h\|_{F_h}}{\sqrt{\lambda(h)}} = 0$$

REMARQUE (3.1).

L'hypothèse (3.4) [resp. (3.5)] n'est autre que l'hypothèse de *convergence de la suite d'approximations*  $\{E, E_h, p_h, r_h\}$  [resp.  $\{F, F_h, q_h, s_h\}$ ]. Quant à l'hypothèse (3.6), c'est l'hypothèse de *consistance de  $A_h^*$  à  $A^*$* .

REMARQUE (3.2).

L'hypothèse (3.7) implique

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|A_h r_h \xi_0 - \chi_h\|_{F_h} = 0$$

Une condition suffisante raisonnable pour qu'il en soit ainsi est que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|A_h r_h u - s_h A u\|_{F_h} = 0 \quad , \quad \forall u \in E,$$

c'est-à-dire que  $A_h$  soit consistant à  $A$  (cf. n° 4).

(1) Hypothèse suggérée par un travail de J. CÉA, Fac. Sc. de Rennes [communication personnelle].

Associons maintenant à (2.4) l'équation discrétisée

$$(3.8) \quad A_h^* A_h \xi_h + \lambda(h) \xi_h = A_h^* \chi_h$$

qui possède la solution unique  $\xi_h$ .

Nous allons montrer la convergence du schéma (3.8) :

**Théorème (3.1).** — *Si les hypothèses (3.1) à (3.7) sont vérifiées, alors  $p_h \xi_h$  converge vers  $\xi_0$ , solution de (2.3).*

*Démonstration.* Notons

$$\Phi_h(u_h) = \|A_h u_h - \chi_h\|_{F_h}^2 + \lambda(h) \|u_h\|_{E_h}^2, \quad u_h \in E_h.$$

On sait (théorème fondamental de la méthode variationnelle) que la solution  $\xi_h$  de (3.8) vérifie l'inégalité

$$\Phi_h(\xi_h) \leq \Phi_h(u_h) \quad , \quad \forall u_h \in E_h$$

qui, avec  $u_h = r_h \xi_0$ , prend la forme

$$(3.9) \quad \|A_h \xi_h - \chi_h\|_{F_h}^2 + \lambda(h) \|\xi_h\|_{E_h}^2 \leq \|A_h r_h \xi_0 - \chi_h\|_{F_h}^2 + \lambda(h) \|r_h \xi_0\|_{E_h}^2$$

D'après (3.7),  $\lim_{h \rightarrow 0} \|A_h r_h \xi_0 - \chi_h\|_{F_h} = 0$  et d'après (3.4),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h \xi_0\|_{E_h} = \|\xi_0\|_E.$$

On déduit alors de (3.9)

$$(3.10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|A_h \xi_h - \chi_h\|_{F_h} = 0$$

et compte tenu de (3.7)

$$(3.11) \quad \|p_h \xi_h\|_E \leq \|\xi_0\|_E + \varepsilon(h) \quad , \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

La relation (3.10), avec (3.3) et (3.5) implique que

$$(3.12) \quad \lim_{h \rightarrow 0} q_h A_h \xi_h = A \xi_0$$

et la relation (3.11) montre que la suite  $p_h \xi_h$  est bornée : il existe donc une sous-suite extraite  $p_{h'} \xi_{h'}$ , convergeant faiblement vers un élément  $\xi'$  de  $E$ .

Or  $q_{h'} A_{h'} \xi_{h'} \rightharpoonup A \xi'$  ( $\rightharpoonup$  indique la convergence faible).

Soit, en effet,  $v$  quelconque dans  $F$ . Étant donné que  $q_{h'} A_{h'} \xi_{h'}$  est borné d'après (3.12) et compte tenu de (3.6)

$$\begin{aligned} \lim_{h' \rightarrow 0} (q_{h'} A_{h'} \xi_{h'}, v)_F &= \lim_{h' \rightarrow 0} (q_{h'} A_{h'} \xi_{h'}, q_{h'} s_{h'} v)_F \\ &= \lim_{h' \rightarrow 0} (p_{h'} \xi_{h'}, p_{h'} A_{h'}^* s_{h'} v)_E \\ &= (A \xi', v)_F \end{aligned}$$

Donc  $q_h \cdot A_h \cdot \xi_h \rightarrow A\xi'$  et aussi, d'après (3.12),  $q_h \cdot A_h \cdot \xi_h \rightarrow A\xi_0$ . Il s'ensuit que  $A\xi' = A\xi_0$  et,  $A$  étant injectif, que  $\xi' = \xi_0$  : la limite  $\xi'$  est indépendante de la sous-suite extraite, donc  $p_h \xi_h \rightarrow \xi_0$  et, étant donné (3.11),  $p_h \xi_h$  converge fortement vers  $\xi_0$ .

#### 4. MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE

##### 4.1. Éléments de discrétisation

Espaces  $E_h$  et  $F_h$ . On choisit  $\mathcal{H} = \left\{ \frac{2q}{1}, \frac{2q}{2}, \dots, \frac{2q}{k}, \dots \right\}$  et on pose, pour  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\frac{2q}{h} = m(h)$ ; donc  $m(h)$  tend vers l'infini avec  $\frac{1}{h}$ . On se donne  $h \rightarrow Y(h)$  [il en existe une infinité] vérifiant

$$Y(h) \rightarrow +\infty \text{ avec } \frac{1}{h}$$

$$\frac{2Y(h)}{h} \in \mathbf{N}^*, \quad \text{si } h \in \mathcal{H},$$

et on pose  $\frac{2Y(h)}{h} = n(h)$ ,  $n(h)$  tendant également vers l'infini avec  $\frac{1}{h}$ . On introduit alors les espaces :

$$E_h = \{ u_h \mid u_h = (u_{h,1}, \dots, u_{h,i}, \dots, u_{h,n}) \}, \quad u_{h,i} \in \mathbf{R}$$

$$F_h = \{ v_h \mid v_h = (v_{h,1}, \dots, v_{h,j}, \dots, v_{h,m}) \}, \quad v_{h,j} \in \mathbf{R}$$

$E_h$  [resp.  $F_h$ ] est un espace de Hilbert de dimension finie  $n(h)$  [resp.  $m(h)$ ] pour la norme définie par (3.1) [resp. (3.2)].

Opérateur  $A_h$ . — Posons

$$\sigma_{h,i} = ]-Y(h) + (i-1)h, -Y(h) + ih[, \quad i = 1, \dots, n(h)$$

$$\tau_{h,j} = ]-q + (j-1)h, -q + jh[, \quad j = 1, \dots, m(h)$$

$$K_{h,ij} = \frac{1}{h^2} \iint_{\tau_{h,j} \times \sigma_{h,i}} K(x, y) \, dx \, dy \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n(h) \\ j = 1, \dots, m(h) \end{array}$$

Rappelons que  $K(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4T}}$  et notons que  $K_{h,ij} = K_{h,ji}$

On définit  $A_h$  par :

$$\forall u_h \in E_h, A_h u_h = v_h \in F_h, v_h \text{ t.q. } v_{h,j} = h \sum_{i=1}^n K_{h,ij} u_{h,i}.$$

On déduit de la définition de  $A_h$  celle de  $A_h^*$  :

$$\forall v_h \in F_h, A_h^* v_h = u_h \in E_h, u_h \text{ t.q. } u_{h,i} = h \sum_{j=1}^m K_{h,ij} v_{h,j}.$$

*Prolongements et restrictions.*

Soit  $\theta_{h,i}$  [resp.  $\psi_{h,j}$ ] la fonction caractéristique de l'intervalle  $\sigma_{h,i}$  [resp.  $\tau_{h,j}$ ]. De façon standard, on introduit  $p_h, q_h, r_h, s_h$  définies par

$$\begin{aligned} p_h u_h &= \sum_{i=1}^n u_{h,i} \theta_{h,i}, & \forall u_h \in E_h \\ q_h v_h &= \sum_{j=1}^m v_{h,j} \psi_{h,j}, & \forall v_h \in F_h \\ r_h u &= u_h \in E_h, u_h \text{ t.q. } u_{h,i} = \frac{1}{h} \int_{\sigma_{h,i}} u(y) dy, & \forall u \in E \\ s_h v &= v_h \in F_h, v_h \text{ t.q. } v_{h,j} = \frac{1}{h} \int_{\tau_{h,j}} v(x) dx, & \forall v \in F \end{aligned}$$

#### 4.2. Vérification des hypothèses (3.1) à (3.7)

Les hypothèses (3.1) et (3.2) constituent en fait un choix naturel des normes  $\|\cdot\|_{E_h}$  et  $\|\cdot\|_{F_h}$ , lorsque  $p_h$  et  $q_h$  sont injectives, ce qui est ici le cas.

La vérification des hypothèses (3.4) et (3.5) est classique. Restent les conditions (3.6) et (3.7) : nous allons montrer les consistances de  $A_h$  à  $A$ , de  $A_h^*$  à  $A^*$  et préciser un peu le choix de  $\lambda$ .

**Proposition (4.1).** — *La suite  $A_h$  est consistante à  $A$ .*

*Démonstration :* On utilise les propriétés suivantes de  $K$

$$— K \in L^2(\text{—} q, + q[\times \mathbf{R})$$

$$— K \text{ est continue sur tout compact de } [— q, + q] \times \mathbf{R}.$$

a) Montrons d'abord que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|A_h r_h \varphi - s_h A \varphi\|_{F_h} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^0(\mathbf{R}).$$

On peut toujours supposer que  $h$  est assez petit pour que  $]\text{—} Y(h), Y(h)[$  contienne le support  $\mathcal{K}_\varphi$  de  $\varphi$ . Soit  $n_1(h)$  et  $n_2(h) \in \mathbf{N}^*$  pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , tels que le système des  $\sigma_{h,i}$  recouvre  $\mathcal{K}_\varphi$  pour  $n_1 \leq i \leq n_2$  et tels que la quantité  $h(n_2(h) - n_1(h))$  soit bornée indépendamment de  $h$ . Désignons par  $\bar{\sigma}_{h,i}, \bar{\tau}_{h,j}$  les fermés

$$[— Y(h) + (i - 1)h, — Y(h) + ih], \quad [— q + (j - 1)h, — q + jh].$$

D'après la formule de la moyenne  $\int_{\sigma_{h,i}} \varphi(y) dy = h\varphi(\eta_i)$ , où  $\eta_i \in \bar{\sigma}_{h,i}$ , et la  $j$ -ième composante  $\Phi_j$  de  $A_h r_h \varphi - s_h A \varphi$  peut alors s'écrire

$$\Phi_j = \frac{1}{h} \int_{\tau_{h,j}} dx \sum_{i=n_1}^{n_2} \int_{\sigma_{h,i}} [K_{h,ij} \varphi(\eta_i) - K(x, y) \varphi(y)] dy$$

D'autre part  $K$  [resp.  $\varphi$ ] est uniformément continue sur  $\mathcal{K}_\varphi \times [-q, +q]$  (resp. sur  $\mathcal{K}_\varphi$ ), donc, quels que soient  $i$  et  $j$  tels que  $n_1 \leq i \leq n_2$ ,  $1 \leq j \leq m$ , il existe une fonction  $\omega$  vérifiant

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \omega(h) \geq & \text{Max}_{(x,y) \in \bar{\tau}_{h,j} \times \bar{\sigma}_{h,i}} K(x, y) \cdot \text{Max}_{y \in \bar{\sigma}_{h,i}} \varphi(y) \\ & - \text{Min}_{(x,y) \in \bar{\tau}_{h,j} \times \sigma_{h,i}} K(x, y) \cdot \text{Min}_{y \in \bar{\sigma}_{h,i}} \varphi(y) \end{aligned}$$

On déduit de ce qui précède que

$$(4.1) \quad |\Phi_j| \leq h[n_2(h) - n_1(h)]\omega(h)$$

et l'on obtient

$$\|A_h r_h \varphi - s_h A \varphi\|_{F_h} = O[\omega(h)]$$

d'où le résultat.

*b)* Montrons maintenant que la suite  $A_h r_h - s_h A$  est stable [i.e. uniformément continue en  $h$ ].

Soit  $u$ , quelconque dans  $E$ . Notons  $U_j$  la  $j$ -ième composante de  $A_h r_h u - s_h A u$ . On a évidemment

$$\frac{1}{2} U_j^2 \leq \left[ \sum_{i=1}^n K_{h,ij} \int_{\sigma_{h,i}} u(y) dy \right]^2 + \frac{1}{h^2} \left[ \int_{\tau_{h,j}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) u(y) dy \right]^2$$

Mais compte tenu des inégalités

$$\begin{aligned} \left( \int_{\sigma_{h,i}} u(y) dy \right)^2 & \leq h \int_{\sigma_{h,i}} u^2(y) dy \\ K_{h,ij}^2 & \leq \frac{1}{h^2} \iint_{\tau_{h,j} \times \sigma_{h,i}} K^2(x, y) dx dy \\ \left( \int_{\tau_{h,j}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) u(y) dy \right)^2 & \leq h \left( \iint_{\tau_{h,j} \times \mathbf{R}} K^2(x, y) dx dy \right) \cdot \|u\|_E^2 \end{aligned}$$

on obtient la majoration

$$(4.2) \quad U_j^2 \leq \frac{2}{h} \left( \iint_{\tau_{h,j} \times \mathbf{R}} K^2(x, y) dx dy \right) \cdot \|u\|_E^2$$

qui entraîne

$$(4.3) \quad \|A_h r_h u - s_h A u\|_{F_h}^2 \leq 2 \cdot \|K\|_{L^2([-q, +q] \times \mathbf{R})}^2 \|u\|_E^2$$

et par conséquent la stabilité de  $A_h r_h - s_h A$ .

c) Pour achever la démonstration de la proposition (4.1), il suffit d'écrire  $u = \varphi + (u - \varphi)$ , d'où

$$\|A_h r_h u - s_h A u\|_{F_h} \leq \|A_h r_h \varphi - s_h A \varphi\|_{F_h} + \|(A_h r_h - s_h A)(u - \varphi)\|_{F_h}$$

En effet,  $\mathcal{D}^0(\mathbf{R})$  étant dense dans  $L^2(\mathbf{R})$ , quel que soit  $u$  dans  $L^2(\mathbf{R})$ , il existe  $\varphi \in \mathcal{D}^0(\mathbf{R})$  tel que  $\|u - \varphi\|_E$  soit arbitrairement petit. Dans le second membre de l'inégalité, le 2<sup>e</sup> terme [d'après le point b)] peut donc être rendu arbitrairement petit;  $\varphi$  étant alors fixé, le 1<sup>er</sup> terme [d'après le point a)] tend vers zéro avec  $h$ .

**Proposition (4.2).** — *La suite  $A_h^*$  est consistante à  $A^*$ .*

*Démonstration.* On utilise ici aussi l'appartenance de  $K$  à  $L^2([-q, +q] \times \mathbf{R})$  et la continuité de  $K$  sur tout compact de  $[-q, +q] \times \mathbf{R}$ .

On procède, en partie, comme dans la démonstration précédente. Soit  $\psi$  [resp.  $v$ ] quelconque dans  $\mathcal{D}^0([-q, +q])$  [resp. dans  $F$ ]. On désigne par  $\Psi_i$  la  $i$ -ième composante de  $A_h^* s_h \psi - r_h A^* \psi$ , par  $V_i$  celle de  $A_h^* s_h v - r_h A^* v$ .

On obtient, comme précédemment, les inégalités

$$(4.4) \quad |\Psi_i| \leq 2q \cdot \omega(h),$$

$$(4.5) \quad V_i^2 \leq \frac{2}{h} \left( \iint_{[-q, +q] \times \sigma_{h,i}} K^2(x, y) dx dy \right) \cdot \|v\|_F^2,$$

$$(4.6) \quad \|A_h^* s_h v - r_h A^* v\|_{E_h} \leq 2 \cdot \|K\|_{L^2([-q, +q] \times \mathbf{R})}^2 \|v\|_F^2$$

analogues à (4.1), (4.2), (4.3).

Soit maintenant  $Y_0$ , positif, indépendant de  $h$ , dont le choix sera fixé plus loin. Soient également  $n_1(h), n_2(h) \in \mathbf{N}^*$  pour tout  $h \in \mathcal{J}$ , tels que le système des  $\sigma_{h,i}$  recouvre  $[-Y_0, +Y_0]$  pour  $n_1 \leq i \leq n_2$  et tels que la quantité  $h(n_2(h) - n_1(h))$  soit bornée indépendamment de  $h$ .

On déduit de ce qui précède, en utilisant (4.4) et (4.5)

$$\|A_h^* s_h \psi - r_h A^* \psi\|_F^2 \leq h \sum_{i=n_1}^{n_2} 4q^2 \cdot \omega^2(h) + 2 \left( \sum_{\substack{i \in [1, n] \\ i \in [n_1, n_2]}} \iint_{[-q, +q] \times \sigma_{h,i}} K^2(x, y) dx dy \right) \cdot \|v\|_F^2$$

Le 2<sup>e</sup> terme du second membre peut être rendu arbitrairement petit en choi-

issant  $Y_0$  convenablement grand : ce terme est en effet majoré par la quantité

$$2 \|v\|_F^2 \cdot \int_{-q}^{+q} \int_{|y| \geq Y_0} K^2(x, y) \, dx \, dy$$

qui tend vers zéro avec  $\frac{1}{Y_0}$ , comme proportionnelle au reste d'une intégrale convergente.

$Y_0$  étant alors fixé (donc aussi  $n_1$  et  $n_2$ ), le 1<sup>er</sup> terme, qui est en  $O[\omega^2(h)]$  tend vers zéro avec  $h$ ; et l'on a

$$(4.7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|A_h^* s_h \psi - r_h A^* \psi\|_{E_h} = 0$$

La consistance de  $A_h^*$  à  $A^*$  résulte alors de (4.7) et (4.6), exactement comme dans la démonstration précédente.

REMARQUE (4.1). — Dans notre problème, étant donné la régularité de la fonction

$$K(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4T}},$$

au lieu de

$$K_{h,ij} = \frac{1}{h^2} \iint_{\tau_{h,j} \times \sigma_{h,i}} K(x, y) \, dx \, dy,$$

on peut prendre pour définition de  $K_{h,ij}$

$$(4.8) \quad K_{h,ij} = K(x_j, y_i), \quad (x_j, y_i) \text{ centre du carré } \tau_{h,j} \times \sigma_{h,i}$$

beaucoup plus commode du point de vue numérique : avec ce choix de  $K_{h,ij}$ , les propositions (4.1) et (4.2) sont encore vraies.

Vérifions par exemple la consistance de  $A_h$  à  $A$ . Il suffit de montrer que  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h = 0$ , où

$$\Delta_h = h \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{h^2} \iint_{\tau_{h,j} \times \sigma_{h,i}} K(x, y) \, dx \, dy - K(x_j, y_i) \right) \left( \int_{\sigma_{h,i}} u(y) \, dy \right) \right\}^2$$

Or,  $K$  possédant des dérivées secondes bornées sur  $[-q, +q] \times \mathbf{R}$ ,

$$\frac{1}{h^2} \iint_{\tau_{h,j} \times \sigma_{h,i}} K(x, y) \, dx \, dy - K(x_j, y_i) = O(h^2).$$

on en déduit que

$$\Delta_h = O[h^5 \cdot n(h)]$$

On peut toujours discrétiser de façon que  $\lim_{h \rightarrow 0} h^5 \cdot n(h) = 0$ , d'où le résultat.

Choix de  $\lambda$ . — Le problème qui se pose est de déterminer  $h \rightarrow \lambda(h)$  tel que (3.7) ait lieu. Supposons  $\xi_0$  connu et posons  $\varphi(h) = \|A_h r_h \xi_0 - \chi_h\|_{F_h}$ .

[Si  $\xi_0$  est inconnu, ce qui est la règle (!), il est cependant possible, dans certains cas, de déterminer  $\Phi$  vérifiant  $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) = 0$  et

$$\|A_h r_h \xi_0 - \chi_h\|_{F_h} \leq \Phi(h), \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

et ce qui suit est alors encore valable].

On peut choisir, par exemple,

$$(4.9) \quad \lambda(h) = C \cdot \varphi(h), \quad C \text{ désigne une constante.}$$

Pour fixer  $C$ , on peut numériquement procéder ainsi. Soit  $h_0$ , convenable (convenable en particulier pour l'approximation  $\chi_h$  de  $\chi$ ) et  $\lambda_0$  voisin (par excès) de l'infimum des  $\lambda$  numériquement admissibles pour  $h = h_0$  : on prend  $C = \frac{\lambda_0}{\varphi(h_0)}$ .

On peut alors recommencer le calcul avec  $h_1 < h_0$  et  $\lambda = C\varphi(h_1)$ .

### 4.3. Exemples et résultats numériques

Nous avons repris les deux exemples traités par Cannon (cf. [4]) où la donnée  $\chi$  est définie par

$$\chi(x) = u(x, 0), \quad -2,5 \leq x \leq +2,5.$$

[ici  $q = 2,5$ ],  $u(x, t)$  désignant la solution particulière de l'équation de la chaleur

$$u(x, t) = \frac{10}{2\sqrt{\pi(t+0,01)}} \left[ \exp \left\{ -\frac{(x+0,5)^2}{4(t+0,01)} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x-0,5)^2}{4(t+0,01)} \right\} \right]$$

Dans le premier exemple  $T = 0,1$ , dans le second  $T = 1$ .

Les calculs ont été effectués (avec 16 chiffres significatifs) dans les conditions suivantes :  $h = 0,1$ ;  $\lambda(0, 1) = 5 \times 10^{-13}$  (1<sup>er</sup> exemple) et

$$\lambda(0,1) = 1,5 \times 10^{-14} \text{ (2<sup>e</sup> exemple); } Y(0,1) = 1.$$

Avant de présenter les résultats, notons deux constatations qui se dégagent de l'expérience numérique.

— Le conditionnement du système linéaire obtenu à partir de (3.8) s'est révélé extrêmement sensible au choix de  $Y$ ; il semble que  $Y$  doit satisfaire à une condition du type :  $|y| > Y(h) \Rightarrow |\xi_0(y)| < \varepsilon(h)$ , où  $\varepsilon$  (lié à la précision du calcul) vérifie  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ ;

— (toujours à propos de la résolution du système linéaire) : les méthodes itératives se sont avérées inopérantes, alors qu'au contraire la méthode (directe) de triangularisation de Gauss a été très efficace.

Les résultats sont fournis sous forme de graphiques : les figures 1 à 5 concernent le 1<sup>er</sup> exemple, les figures 6 à 9 le 2<sup>e</sup> exemple. Chaque figure indique, pour une valeur de  $t$  dans  $[0, T]$  :

— la solution (exacte)  $u(t)$  de (1.1), (1.2), (1.3) correspondant à la condition initiale  $\xi_0$ ;

— l'approximation  $\bar{u}(t)$  obtenue par Cannon [ou l'écart

$$\Delta\bar{u}(t) = u(t) - \bar{u}(t)];$$

— l'approximation  $u_s(t)$  [ou l'écart  $\Delta u_s(t) = u(t) - u_s(t)$ ] provenant de la méthode de Stabilisation :  $u_s(t)$  désigne la solution de (1.1), (1.2), (1.3) correspondant à la condition initiale  $\xi_s$  [ $\xi_s$  n'est autre que l'approximation de  $\xi_0$  fournie par (3.8)];

— l'erreur relative moyenne  $\rho_s(t) = \frac{\|\Delta u_s(t)\|_{E_h}}{\|u(t)\|_E}$ .

Les résultats obtenus à partir de la méthode de stabilisation améliorent sensiblement ceux de Cannon : dans le cas le plus défavorable (fig. 8), la précision est 20 fois supérieure; dans le cas le plus favorable (fig. 5), 5 000 fois. Signalons, au sujet du 2<sup>e</sup> exemple ( $T = 1$ ), que pour  $t = 1$ ,  $\rho_s(t) = 0,23 \times 10^{-7}$  [Cannon n'a pas fourni de résultat pour  $t = 1$ ].

Ces résultats ne sont cependant pas toujours pleinement satisfaisants (fig. 6 par exemple) et peuvent certainement être encore améliorés.

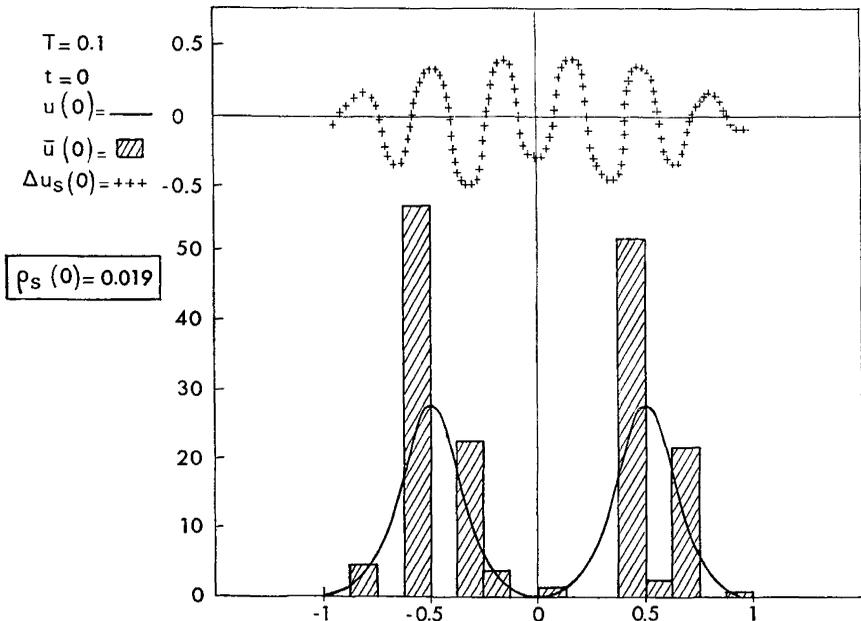


Figure 1

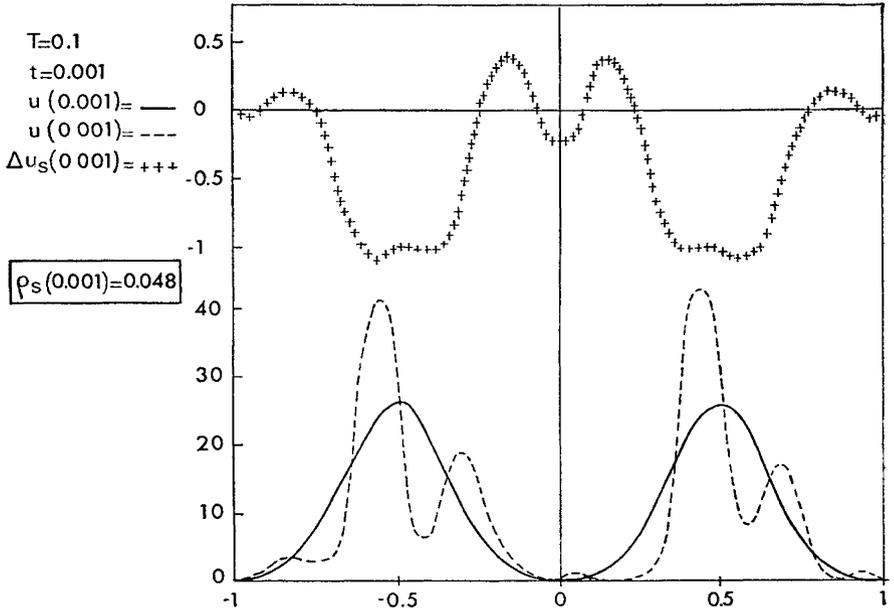


Figure 2

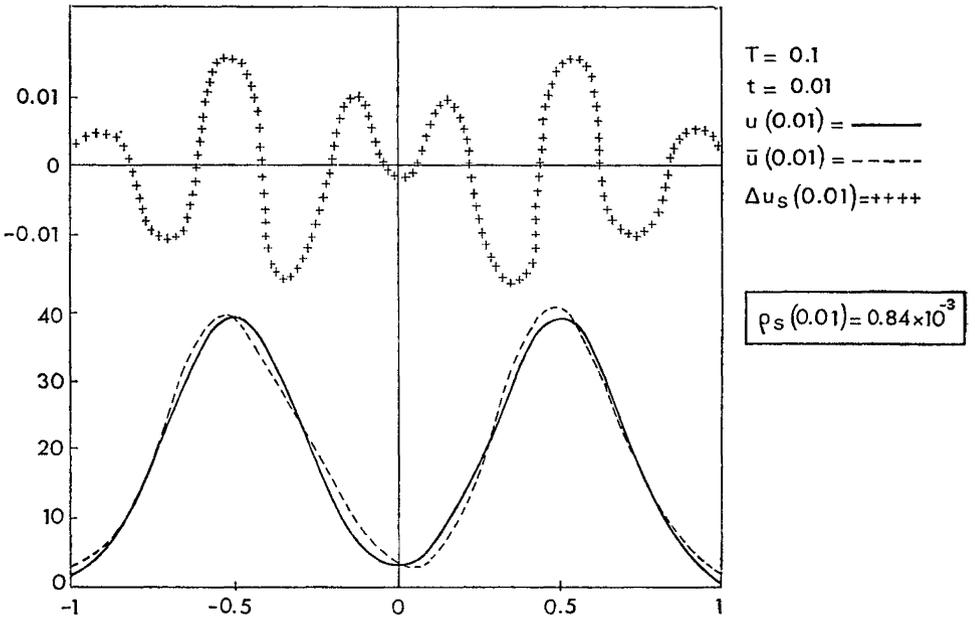


Figure 3

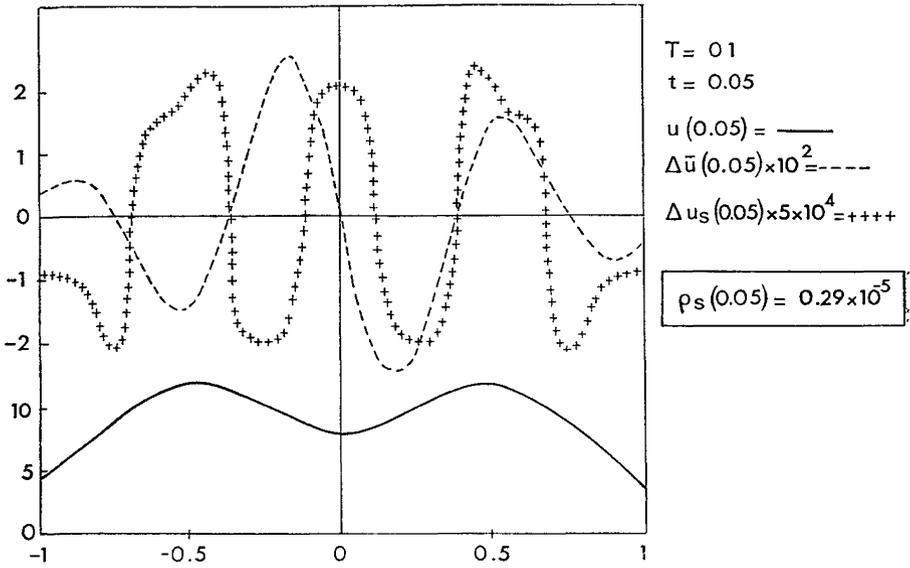


Figure 4

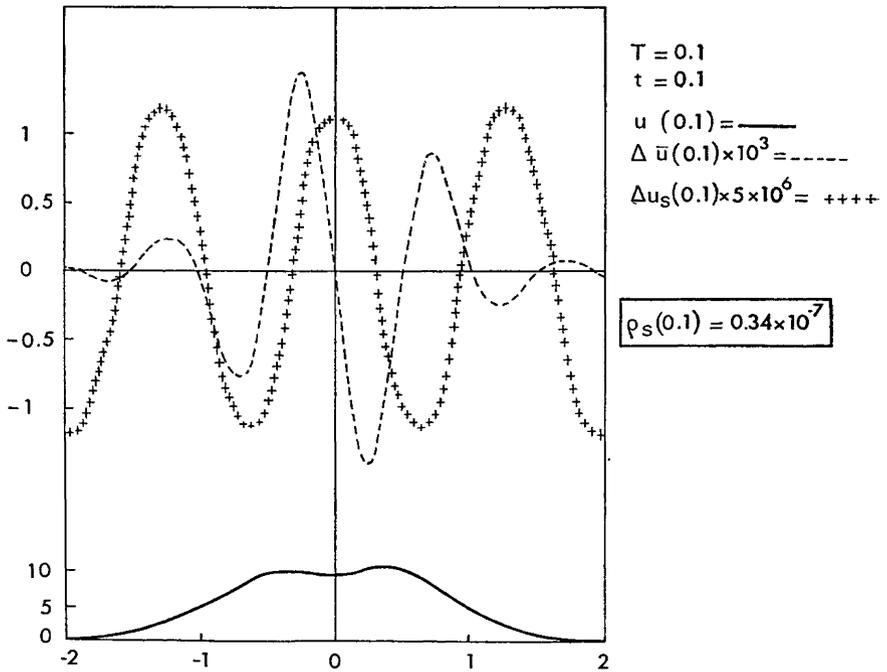


Figure 5

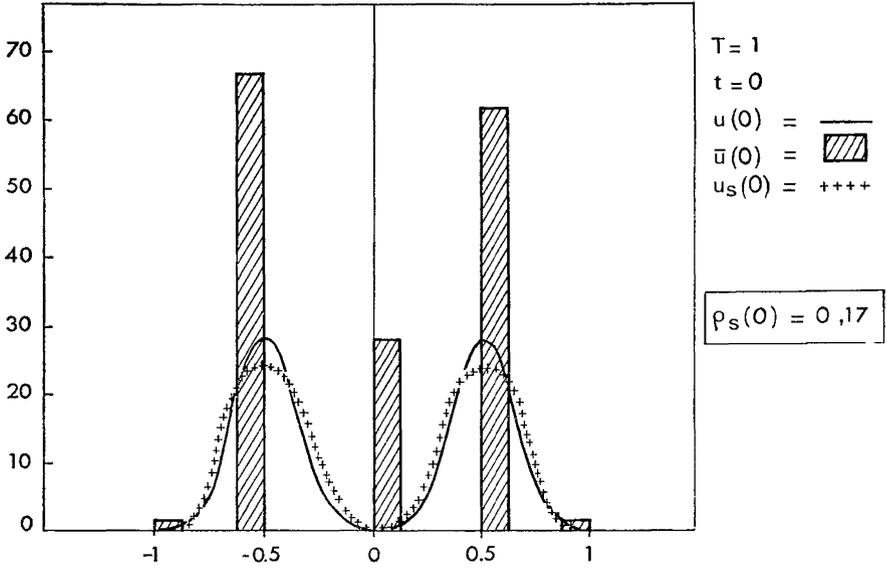


Figure 6

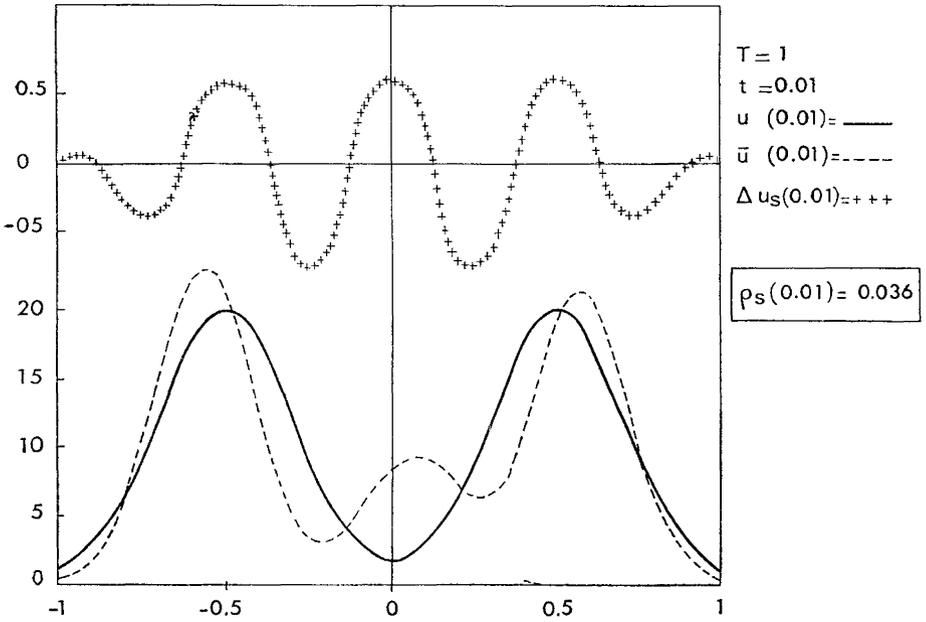


Figure 7

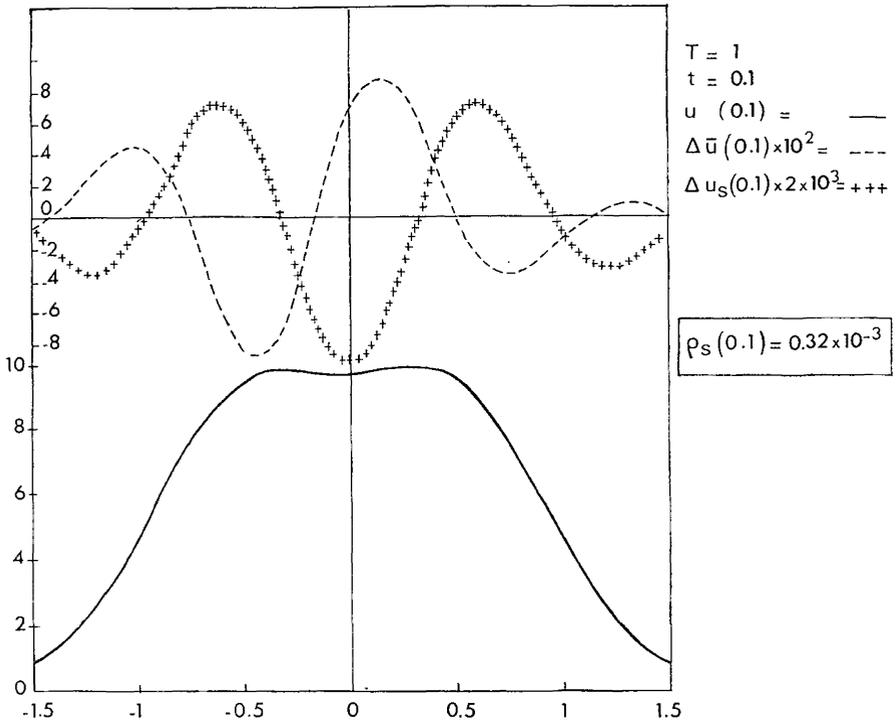


Figure 8

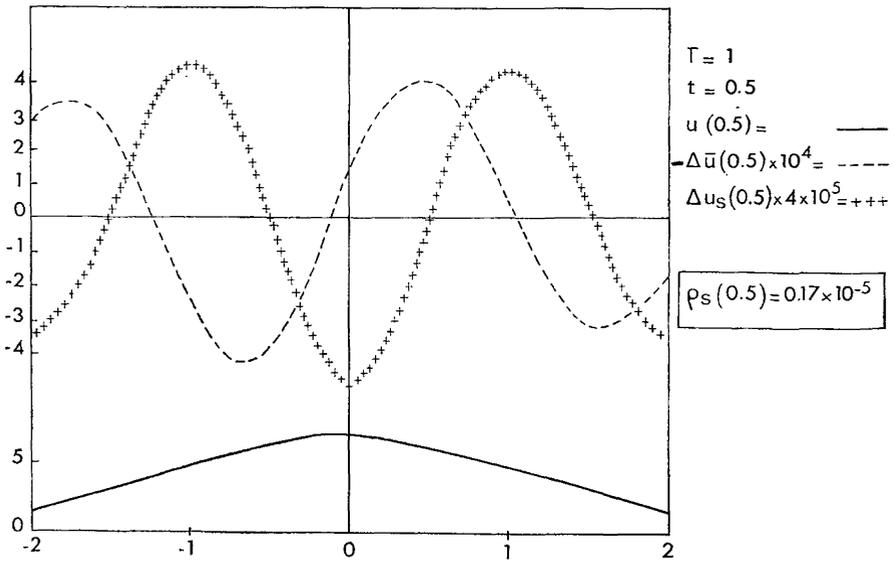


Figure 9

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARCANGELI R., *C.R.A.S.*, 263, 1966, p. 262.
- [2] AUBIN J. P., Thèse, Paris, 1966.
- [3] BALAKRISHNAN, *J.S.I.A.M.*, vol. 1, n° 2, 1963, pp. 109-127.
- [4] CANNON J. R., *Numerical Solutions of nonlinear differential equations*, Greenspan, ed., publication n° 17 of the Math. Research Center of the U. S. Army, Univ. of Wisconsin, John Wiley, 1966.
- [5] ITO S. et YAMABE H., A unique continuation theorem for solutions of a parabolic differential equation, *J. Math. Soc. Japan*, 10, 1958, 314-321.
- [6] IVANOV V. K., *Soviet Mathematics*, 3, n° 4, 1962.
- [7] LATTES R. et LIONS J. L., *Méthode de Quasi-Réversibilité et Applications*, Dunod, 1967.
- [8] LIONS J. L., *Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Springer, 1961.
- [9] LIONS J. L. et MALGRANGE B., Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques, *Math. Scand.*, 8, 1960, 277-286.