

REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

MOÏSE SIBONY

Sur certains opérateurs quasi-elliptiques stationnaire et d'évolution

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,
tome 1, n° 1 (1967), p. 3-34

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_1_3_0

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR CERTAINS OPERATEURS QUASI-ELLIPTIQUES STATIONNAIRE ET D'EVOLUTION

par Moïse SIBONY (1)

SOMMAIRE

Après une brève introduction des opérateurs quasi-elliptiques, nous avons étudié, aux paragraphes 2 et 3, un problème aux limites quasi-elliptiques stationnaire, pour lequel nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le paragraphe 4, nous étudions un problème aux limites quasi-elliptiques d'évolution. Les paragraphes 5 et 6 sont consacrés à la discrétisation des deux problèmes précédents, donnent des résultats de stabilité et des théorèmes de convergence.

Enfin, le paragraphe 7 est consacré aux applications numériques.

1. NOTATIONS ET DEFINITIONS

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

est un point de R^n à coordonnées entières non négatives.

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$P(y)$ est un polynôme de n variables y_1, y_2, \dots, y_n .

(1) Faculté des Sciences de Rennes.

Ce travail est préparatoire à une thèse de Doctorat d'État ès Sciences Mathématiques dont la soutenance est prévue en 1969. Enregistré au C.N.R.S. sous le numéro A.O. 1268.

$P(D)$ est le polynôme différentiable obtenu en remplaçant y_j par D_j pour $1 \leq j \leq n$.

m_j est l'exposant maximum de la variable y_j isolée dans le polynôme $P(y)$.

Posons $m = \max_j (m_j)$.

$$q = \left(\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}, \dots, \frac{m}{m_n} \right)$$

Définition 1.1

Un opérateur quasi-elliptique est de la forme

$$P(D) = \sum_{(\alpha, q) \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

vérifiant la condition.

$$\sum_{(\alpha, q) = m} a_\alpha i^{|\alpha|} y^\alpha \neq 0 \quad \text{pour } y \in R^n \quad y \neq 0$$

où a_α sont des constantes complexes.

On vérifie facilement que l'opérateur

$$P(D) = (-1)^{m_1} D_1^{2m_1} u + (-1)^{m_2} D_2^{2m_2} u + \dots + (-1)^{m_n} D_n^{2m_n} u$$

m_i étant des entiers $\geq 0 \quad i = 1, \dots, n$

est quasi-elliptique.

2. UN PROBLEME STATIONNAIRE QUASI-ELLIPTIQUE. NOTATIONS

On se donne $\Omega = (o, a) \times (o, b) = \Omega_x \times \Omega_y \subset CR_x$

Posons

$$\Sigma_y = \partial\Omega_x \times \Omega_y$$

$$\Gamma = \partial\Omega = \text{frontière de } \Omega$$

On cherche $u(x, y)$ solution de

$$(Po) \left\{ \begin{array}{l} (2.1) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \\ (2.2) \quad u|_\Gamma = 0 \\ (2.3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Sigma_y} = 0 \quad (\text{voir figure}) \end{array} \right.$$

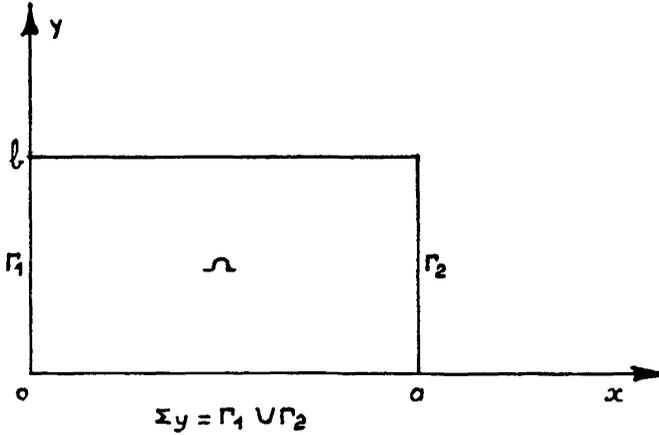


Figure 1

on pose

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \mid u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \mid u \in H^1(\Omega) \ ; \ u|_{\Gamma} = 0 \}$$

$$H^{2,1}(\Omega) = \left\{ u \mid u \in \mathcal{D}'(\Omega), D_1^p u \in L^2(\Omega), D_2^q u \in L^2(\Omega) \begin{matrix} |p| \leq 2 \\ |q| \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

$H_0^{2,1}(\Omega)$ = adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^{2,1}(\Omega)$. On munit $H^{2,1}(\Omega)$ et $H_0^{2,1}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{H_0^{2,1}(\Omega)} = \left(\sum_{|p| \leq 2} |D_1^p u|_{L^2}^2 + \sum_{|q| \leq 1} |D_2^q u|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

On montre facilement que $H^{2,1}(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On pose :

$$\varphi * \Psi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x - y) \Psi(y) dy \text{ en supposant que ceci ait un sens.}$$

Théorème 2.1.

Si on pose

$$V(\Omega) = \left\{ u \mid u \in H^{2,1}(\Omega) \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Sigma_y} = 0 \right\}$$

Alors

$$V(\Omega) \equiv H_0^{2,1}(\Omega)$$

Lemme 2.1.

Si $u \in H_0^{2,1}(\Omega)$ alors $u|_r = 0$

DÉMONSTRATION

Comme $H^{2,1}(\Omega) \subset CH^1(\Omega)$ topologiquement ; on a :

$$H_0^{2,1}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$$

Donc

$$\forall u \in H_0^{2,1}(\Omega) \Rightarrow u|_r = 0$$

Lemme 2.2.

Si $u \in H_0^{2,1}(\Omega)$ alors $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_y}$ a un sens et $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_y} = 0$.

En effet, nous avons presque partout en x :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + \int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi, y) d\xi \quad \text{pour } 0 \leq x \leq a$$

ce qui donne

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) \right|^2 \leq 2 \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 + \int_0^a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi, y) \right|^2 d\xi \right]$$

Intégrons les deux membres sur Ω et appliquons Fubini :

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^b \left| \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) \right|^2 dy &\leq 2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 dx dy \\ &\quad + 2 \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi, y) \right|^2 d\xi \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$(2.4) \quad a \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{L^2(\Omega)}^2 + 2a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{L^2(\Omega)}^2$$

En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^{2,1}(\Omega)$ et l'inégalité (2.4) il vient :

$$a \left| \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right|_{L^2(\Omega)}^2 + 2a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Gamma_1} = 0.$$

A partir de l'expression :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) + \int_a^x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi, y) d\xi$$

on démontrerait de même que $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r_2} = 0$

Donc $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_y} = 0$

Les lemmes 2.1 et 2.2 montrent que $H_0^{2,1}(\Omega) \subset V(\Omega)$.

Lemme 2.3.

On se donne la suite $\theta_m(x)$ définie comme suit :

$$\theta_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{m}\right]; & x \in \left[a - \frac{1}{m}, a\right] \\ 1 & \text{pour } x \in \left[\frac{2}{m}, a - \frac{2}{m}\right] \\ \theta_m(x) \in C^1(0, a) & \text{et } \theta_m'' \in L^\infty \end{cases}$$

On suppose de plus que :

$$|\theta_m| < K_0 \quad ; \quad |\theta_m'| < K_1 m \quad ; \quad |\theta_m''| < K_2 m^2.$$

Alors $\theta_m u \rightarrow u$ dans $H_0^{2,1}(\Omega)$ quand $m \rightarrow \infty$

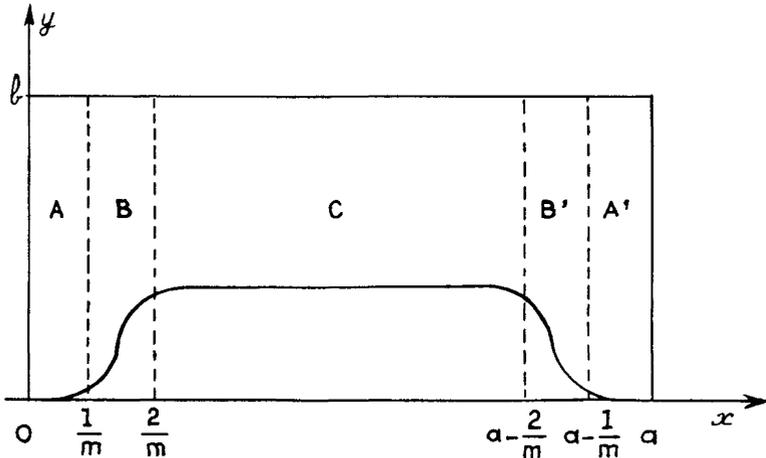


Figure 2

DÉMONSTRATION

une telle suite $\theta_m(x)$ existe. Nous pouvons prendre :

$$\theta_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{m}\right] \quad \text{et } x \in \left[a - \frac{1}{m}, a\right] \\ 1 & \text{pour } x \in \left[\frac{2}{m}, a - \frac{2}{m}\right] \\ m^3 \left(x - \frac{1}{m}\right)^3 e^{6-3mx} & \text{pour } x \in \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right] \\ m^3 \left(a - x - \frac{1}{m}\right)^3 e^{6-3m(a-x)} & \text{pour } x \in \left[a - \frac{2}{m}, a - \frac{1}{m}\right] \end{cases}$$

posons $\Omega = AUBUCUB'UA'$.

Comme $u(0, y) = 0$ nous avons presque partout :

$$u(x, y) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) dt$$

D'où :

$$(2.5) \quad |u|^2 \leq x \int_0^x \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) \right|^2 dt$$

La relation $\frac{\partial u}{\partial t}(0, y) = 0$ entraîne presque partout :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) &= \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, y) ds \\ \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) \right|^2 &\leq t \int_0^t \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, y) \right|^2 ds \end{aligned}$$

et (2.5) devient :

$$(2.6) \quad |u|^2 \leq x \int_0^x \left(t \int_0^t \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, y) \right|^2 ds \right) dt$$

ce qui donne

$$\int_B |u|^2 d\xi \leq \int_0^{2/m} \frac{x^3}{2} dx \int_0^b \int_0^{2/m} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|^2 ds dy$$

D'où :

$$(2.7) \quad \int_B |u|^2 d\xi = 0 \left(\frac{1}{m^4} \right)$$

De même les conditions aux limites

$$u(a, y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$$

entraînent :

$$(2.8) \quad \int_{B'} |u|^2 d\xi = 0 \left(\frac{1}{m^4} \right)$$

Les conditions $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$ conduisent aux formules :

$$(2.9) \quad \int_B \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 d\xi = 0 \left(\frac{1}{m^2} \right)$$

$$(2.10) \quad \int_{B'} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 d\xi = 0 \left(\frac{1}{m^2} \right)$$

Nous avons maintenant :

$$\begin{aligned} \|\theta_m u - u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 &= \|\theta_m u - u\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x}(\theta_m u) - \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \left\| \frac{\partial}{\partial y}(\theta_m u) - \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^2(\theta_m u)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad \int_{\Omega} |\theta_m u - u|^2 d\xi &\leq \int_A |u|^2 d\xi + K \int_B |u|^2 d\xi \\ &\quad + K \int_{B'} |u|^2 d\xi + \int_{A'} |u|^2 d\xi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $m \rightarrow \infty$ (d'après (2.7), (2.8) et du fait que mesure (A), mesure (A'), mesure (B), mesure (B') tendent vers 0 quand $m \rightarrow \infty$. D'où :

$$(2.11) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\theta_m u - u|^2 d\xi = 0$$

$$2^\circ \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x}(\theta_m u) - \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 d\xi \leq \int_{\Omega} \left| \theta_m \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 d\xi + \int_{\Omega} |\theta'_m u|^2 d\xi$$

En remplaçant u par $\frac{\partial u}{\partial x}$ dans (2.11) il vient :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \theta_m \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 d\xi = 0$$

$$\int_{\Omega} |\theta'_m u|^2 d\xi \leq K_1^2 m^2 \int_B |u|^2 d\xi + K_1^2 m^2 \int_{B'} |u|^2 d\xi \rightarrow 0$$

quand $m \rightarrow \infty$ d'après (2.7) et (2.8). D'où :

$$(2.12) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x} (\theta_m u) - \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 d\xi = 0$$

$$3^\circ \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial y} (\theta_m u) - \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 d\xi = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \theta_m \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 d\xi = 0$$

Il suffit de remplacer u par $\partial u / \partial y$ dans (2.11).

4° On montre facilement que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\theta_m u) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 d\xi &\leq \int_{\Omega} \left| \theta_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 d\xi \\ &+ 2 \int_{\Omega} \left| \theta'_m \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 d\xi + \int_{\Omega} |\theta''_m u|^2 d\xi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $m \rightarrow \infty$. Ceci démontre le lemme 2.3.

Lemme 2.4.

Posons $\theta_m u = v_m$, m étant fixé.

On se donne une suite $\chi_n(y)$ définie par :

$$(2.13) \quad \chi_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \in \left[0, \frac{1}{n}\right]; y \in \left[b - \frac{1}{n}, b\right] \\ 1 & \text{pour } y \in \left[\frac{2}{n}, b - \frac{2}{n}\right] \\ \chi_n(y) \in C^1(0, b) \text{ et } \chi_n'' \in L^\infty \end{cases}$$

On suppose de plus que :

$$|\chi_n| < K_0; \quad |\chi'_n| < K_1 n; \quad |\chi''_n| < K_2 n^2$$

Alors, il existe une suite $(\varphi_p) \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$ dans $H_0^{2,1}(\Omega)$ fort.

DÉMONSTRATION

De la même manière que dans le lemme 2.3. nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n v_m = v_m$ dans $H_0^{2,1}(\Omega)$ fort.

On se donne maintenant une suite régularisante $\rho_n(\xi)$ définie comme suit : (cf. [2])

$$\alpha) \quad \rho_n(\xi) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\beta) \quad \text{Support}(\rho_n) = \{ \xi \mid |\xi| < \varepsilon_n, \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \}$$

$$\gamma) \quad \rho_n > 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n(\xi) d\xi = 1.$$

On sait que $(\chi_n \nu_m) * \rho_n = \varphi_m^n \in \mathcal{D}(\Omega)$ et l'on montre facilement que

$$\varphi_m^n \rightarrow \chi_n \nu_m \quad \text{dans} \quad H_0^{2,1}(\Omega) \text{ fort}$$

et d'après le lemme 2.4 nous avons :

$$H_0^{2,1}(\Omega) \text{ fort} \quad H_0^{2,1}(\Omega) \text{ fort} \\ \chi_n \nu_m \longrightarrow \nu_m \longrightarrow u$$

Donc, quel que soit $u \in V_0(\Omega)$ on a pu trouver une suite

$$(\varphi_p) = (\varphi_m^n) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

telle que $\varphi_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} u$ dans $H_0^{2,1}(\Omega)$ fort. Ceci démontre le lemme 2.4 et termine la démonstration du théorème 2.1 ($H_0^{2,1}(\Omega) \supset V(\Omega)$.)

3. FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME P₀

Posons

$$a(u, \nu) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial \nu}{\partial y} \right)_{L^2(\Omega)}$$

Le problème (P_0) est alors équivalent au problème (P_1) suivant : on cherche $u \in V(\Omega)$ vérifiant :

$$(3.1) \quad a(u, \nu) = (f, \nu)_{L^2}$$

$\forall \nu \in V(\Omega)$; pour f donnée dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 3.1.

Le problème (P_1) admet une solution unique.

DÉMONSTRATION

Montrons que $a(u, \nu)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$ et V -elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$(3.2) \quad |a(\nu, \nu)| \geq \alpha \|\nu\|_V^2 \quad \forall \nu \in V$$

Nous avons en effet :

$$1^\circ \quad |a(u, \nu)| \leq \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{L^2} \left| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \right|_{L^2} + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{L^2} \left| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right|_{L^2}$$

or, pour $a_i, b_i \geq 0$ on a :

$$\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_i b_i^2 \right)^{1/2}$$

ce qui donne :

$$|a(u, \nu)| \leq \left(\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \left(\left\| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

$$|a(u, \nu)| \leq \left(\|u\|_V^2 - \|u\|_{L^2}^2 - \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \left(\|\nu\|^2 - \|\nu\|_{L^2}^2 - \left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

D'où

$$|a(u, \nu)| \leq \|u\|_V \|\nu\|_V$$

2° Nous avons presque partout

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) = \int_0^\xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) dx \quad 0 \leq \xi \leq a$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 \leq a \int_0^a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 dx$$

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi dy \leq a \int_0^a d\xi \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \right|^2 dx dy$$

En posant $l_2 = \frac{1}{a^2}$ on a :

$$(3.3) \quad l_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2$$

ce qui donne :

$$a(u, \nu) \geq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \frac{l_2}{4} \left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2}^2$$

$$+ \inf \left(\frac{1}{2}, \frac{l_2}{4} \right) \left(\left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \right)$$

or si $\nu \in H_0^1(\Omega)$, Ω étant un ouvert borné on a :

$$(3.4) \quad \|\nu\|_{L^2}^2 \leq c(\Omega) \left(\left\| \frac{\partial \nu}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right)$$

où $c(\Omega)$ est une constante positive ne dépendant que de Ω .

En posant $\beta = \inf \left(\frac{1}{2}, \frac{l_2}{4} \right)$ on a :

$$|a(u, \nu)| \geq \inf \left(\frac{1}{2}, \frac{l_2}{4}, \beta \right) \|\nu\|^2$$

D'où (3.2)

**4. UN PROBLEME D'EVOLUTION QUASI-ELLIPTIQUE.
NOTATIONS ET POSITION DU PROBLEME**

On se donne un ouvert borné $\Omega \subset R^n$ de la forme $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $\Omega_x \subset R^r$; $\Omega_y \subset R^s$; un point $\xi \in R^n$ s'écrit :

$$\xi = (x, y) \quad x \in R^r, \quad y \in R^s$$

Posons :

$$H^{m,n}(\Omega) = \left\{ u \mid u \in \mathcal{D}'(\Omega), D_x^p u \in L^2, D_y^q u \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{l} |p| \leq m \\ |q| \leq n \end{array} \right\}$$

m et n étant des entiers non négatifs.

$$\|u\|_{H^{m,n}(\Omega)} = \left(\sum_{|p| \leq m} |D_x^p u|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|q| \leq n} |D_y^q u|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

On note :

$$\Sigma_y = \partial\Omega_x \times \Omega, \quad \Sigma_x = \Omega_x \times \partial\Omega_y$$

$H_0^{m,n}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^{m,n}(\Omega)$.

Par définition $H^{-m,-n}(\Omega) = (H_0^{m,n}(\Omega))' =$ dual topologique de $H_0^{m,n}(\Omega)$; c'est l'espace des distributions u de la forme :

$$u = \sum_{|p| \leq m} D_x^p f_p + \sum_{|q| \leq n} D_y^q f_q \quad \text{avec} \quad f_p, f_q \in L^2(\Omega)$$

On sait que si $u \in H_0^{m,n}(\Omega)$ on a : (cf. [3])

$$\begin{aligned} \gamma_0 u &= \gamma_1 u = \dots = \gamma_{(m-1/2)^*} u = 0 \\ \delta_0 u &- \delta_1 u = \dots = \delta_{(n-1/2)^*} u = 0 \end{aligned}$$

où $\gamma_i u$ est la restriction à $\bar{\Sigma}_y$ de la première dérivée normale de u par rapport à Σ_y et $\delta_i u$ est la restriction à $\bar{\Sigma}_x$ de la première dérivée normale de u par rapport à Σ_x .

$\left(m - \frac{1}{2}\right)^*$ et $\left(n - \frac{1}{2}\right)^*$ représentent les plus grands entiers non négatifs minorants $\left(m - \frac{1}{2}\right)$ et $\left(n - \frac{1}{2}\right)$ respectivement.

On note :

$$\begin{aligned} u(t) &: (x, y) \rightarrow u(t; x, y) \\ f(t) &: (x, y) \mapsto f(t; x, y) \\ t &\in [0, T] \quad x \in \Omega_x, y \in \Omega_y. \end{aligned}$$

Problème (P₀)

On cherche une fonction $u(t) \in L^2(0, T; H_0^{m,n}(\Omega))$

$$u'(t) = \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H^{-m,-n}(\Omega))$$

vérifiant :

$$(4.1) \quad u'(t) + Au(t) = f(t)$$

$$(4.2) \quad u(0) = u_0$$

Pour l'opérateur $A = A_1 + A_2$ avec :

$$A_1 = (-1)^{p_1} D_{x_1}^{2p_1} + \dots + (-1)^{p_r} D_{x_r}^{2p_r}$$

$$A_2 = (-1)^{q_1} D_{y_1}^{2q_1} + \dots + (-1)^{q_s} D_{y_s}^{2q_s}$$

avec $f(t)$ donnée dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$; $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Problème (P₁)

Trouver $u \in L^2(0, T; H_0^{m,n}(\Omega))$ vérifiant :

$$(4.3) \quad a(u(t), \nu) + \frac{d}{dt} (u(t), \nu) = (f(t), \nu) + (u_0, \nu)\delta$$

Pour tout $\nu \in H_0^{m,n}(\Omega)$ et f donnée dans $L^2(0, T, L^2)$; $u_0 \in L^2(\Omega)$ avec :

$$(4.4) \quad a(u, \nu) = \sum_{|p|=m} (D_x^p u, D_x^p \nu) + \sum_{|q|=n} (D_y^q u, D_y^q \nu)$$

$$m = |p| = p_1 + \dots + p_r$$

$$n = |q| = q_1 + \dots + q_s$$

$\frac{d}{dt} (u(t), \nu)$ étant la dérivée au sens des distributions sur $]0, T[$ de la fonction $t \mapsto (u(t), \nu)$.

Problème (P₂)

Trouver $u \in L^2(0, T; H_0^{m,n}(\Omega))$ vérifiant :

$$(4.5) \quad \int_0^T \{ a(u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t)) \} dt = \int_0^T (f(t), \varphi(t)) dt + (u_0, \varphi(0))$$

pour toute fonction

$$\varphi \in \Phi = \{ \varphi \mid \varphi \in L^2(0, T; H_0^{m,n}), \varphi' \in L^2(0, T; H^{-m,-n}(\Omega)); \varphi(T) = 0 \}$$

u_0 et $f(t)$ sont données dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(0, T; L^2)$ respectivement.

On démontre comme dans [2] pages 44-46 la :

Proposition 4.1.

Les problèmes (P_0) , (P_1) , (P_2) sont équivalents.

Proposition 4.2.

Le problème (P_0) admet une solution unique.

DÉMONSTRATION

Il suffit de démontrer (cf. [2]) que

- 1) $a(u, \nu)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H_0^{m,n}(\Omega) \times H_0^{m,n}(\Omega)$
- 2) Il existe une constante réelle $\alpha > 0$:

$$|a(\nu, \nu)| \geq \alpha \|\nu\|_{H_0^{m,n}(\Omega)}^2 \quad \forall \nu \in H_0^{m,n}(\Omega)$$

— $a(u, \nu)$ est bien une forme sesquilinéaire sur $H_0^{m,n}(\Omega) \times H_0^{m,n}(\Omega)$

$$a(u, \nu) = \sum_{|p|=m} (D_x^p u, D_x^p \nu) + \sum_{|q|=n} (D_y^q u, D_y^q \nu)$$

$$|a(u, \nu)| \leq \sum_{|p|=m} |D_x^p u|_{L^2} |D_x^p \nu|_{L^2} + \sum_{|q|=n} |D_y^q u|_{L^2} |D_y^q \nu|_{L^2}$$

$$|a(u, \nu)| \leq \left(\sum_{|p|=m} |D_x^p u|_{L^2}^2 + \sum_{|q|=n} |D_y^q u|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|p|=m} |D_x^p \nu|_{L^2}^2 + \sum_{|q|=n} |D_y^q \nu|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

D'où $|a(u, \nu)| \leq \|u\| \|\nu\|_{H_0^{m,n}(\Omega)}$.

— Sans restreindre les hypothèses, supposons que $0 \leq x_i \leq a_i$ pour tout i . Nous avons alors :

$$D_{x_i}^{p_i} u(x, y) = \int_0^{x_i} \frac{\partial^{p_i+1} u}{\partial x_i^{p_i+1}} (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_r; y) dt$$

$$|D_{x_i}^{p_i} u|^2 \leq a_i \int_0^{a_i} |D_{x_i}^{p_i+1} u(x_1, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_r; y)|^2 dt$$

$$|D_{x_i}^{p_i} u|_{L^2}^2 \leq a_i \int_{\Omega} \int_0^{a_i} |D_{x_i}^{p_i+1} u(t, y)|^2 dt dx dy$$

$$|D_{x_i}^{p_i} u|_{L^2}^2 \leq a_i^2 |D_{x_i}^{p_i+1} u|_{L^2}^2$$

Donc, il existe une constante $c(\Omega)$ telle que

$$c(\Omega) \left(\sum_{|h| \leq m} |D_x^h u|_{L^2}^2 \right) \leq \sum_{|p|=m} |D_x^p u|_{L^2}^2$$

et de manière analogue, il existe $c'(\Omega)$ telle que

$$c'(\Omega) \left(\sum_{|k| \leq n} |D_y^k u|_{L^2}^2 \right) \leq \sum_{|q|=n} |D_y^q u|_{L^2}^2$$

En posant $\alpha = \inf(c, c')$, il vient :

$$|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_{H_0^{m,n}(\Omega)}^2$$

5. PROBLEME STATIONNAIRE DISCRETISE

Notations et position du problème en différences finies

Nous écrirons un point de R^2 , $M = \xi = (x, y)$; $h = (h_1, h_2)$.
On a alors :

$$\xi + h_1 = M + h_1 = (x + h_1, y)$$

$$\xi + h_2 = M + h_2 = (x, y + h_2)$$

On pose :

$$R_h = \left\{ M \mid M \in R^2, M = \left((2p+1) \frac{h_1}{2}, qh_2 \right), p, q \in Z \right\}$$

R_h s'appelle réseau de pas h .

(c, M) est le pavé ouvert de centre M , de côtés parallèles aux axes ox et oy du plan et de longueurs h_1, h_2 respectivement.

On définira la croix de centre M comme suit :

$$\rho(M) = (c, M) \cup (c, M \pm h_1) \cup \left(c, M \pm \frac{h_2}{2} \right)$$

Posons :

$$\Omega_h = \{ (c, M), M \in R_h ; \rho(M) \subset \Omega \}$$

$$\Omega_h = \{ M \mid M \in R_h ; \rho(M) \subset \Omega \}$$

$$\nabla_i u(\xi) = \frac{u\left(\xi + \frac{h_i}{2}\right) - u\left(\xi - \frac{h_i}{2}\right)}{h_i}$$

$$\nabla_i(\nabla_i u) = \nabla_i^2 u$$

Ω_h approche Ω au sens suivant : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un nombre $h(K) > 0$ tel que si $h < h(K) \Rightarrow K \subset \Omega_h$.

En outre $\nabla_i u(\xi)$ et $\nabla_i^2 u(\xi)$ sont bien définies dans Ω_h .

W_M étant la fonction caractéristique de (c, M) soit :

$$V_h = \left\{ u_h \mid u_h = \sum_{M \in \Omega_h} \xi_h W_M \right\}$$

V_h est un espace vectoriel de dimension finie, égale au nombre de points de Ω_h .

Nous nous proposons d'approcher au sens de $L^2(\Omega)$ la fonction $u(\xi)$ solution du problème (P_1) par une suite d'éléments de V_h . Nous cherchons donc $u_h \in V_h$ telle que l'on ait :

$$(P_h) \begin{cases} a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) & \forall v_h \in V_h \\ a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla_i^2 u_h \overline{\nabla_1^2 v_h} d\xi + \int_{\Omega} \nabla_2 u_h \overline{\nabla_2 v_h} dx \end{cases}$$

Existence et unicité de la solution du problème (P_h)

Lemme 5.1.

Si $u_h \in V_h \Rightarrow$ il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$k |\nabla_1 u_h|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |\nabla_1^2 u_h|_{L^2(\Omega)}^2$$

DÉMONSTRATION

Considérons les entiers P et N tels que :

$$(2p + 1) \frac{h_1}{2} \leq a < (2p + 3) \frac{h_1}{2} \quad \text{et} \quad Nh_2 \leq b < (N + 1)h_2$$

Soit

$$R_h = \left\{ M \mid = \left((2p + 1) \frac{h_1}{2}, qh_2 \right) \quad \begin{array}{l} p = 1, 2, \dots, P \\ q = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\}$$

le réseau correspondant.

En prolongeant $u_h(M)$ par zéro en dehors de Ω et en supposant que $u_h(rh_1, qh_2) = 0$ pour $r = 0, 1, \dots, M$, quel que soit q , on vérifie les identités :

$$u_h \left((2p + 1) \frac{h_1}{2}, qh_2 \right) = h_1 \sum_{r=0}^{2P} \nabla_1 u_h \left(r \frac{h_1}{2}, qh_2 \right)$$

$$u_h \left((2p - 1) \frac{h_1}{2}, qh_2 \right) = h_1 \sum_{r=0}^{2P} \nabla_1 u_h \left((r - 2) \frac{h_1}{2}, qh_2 \right)$$

pour soustraction membre à membre :

$$\nabla_1 u_h(p h_1, q h_2) = h_1 \sum_{r=0}^{2P} \nabla_1^2 u_h \left((r-1) \frac{h_1}{2}, q h_2 \right)$$

ce qui donne :

$$\sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^P |\nabla_1 u_h(p h_1, q h_2)|^2 \leq 2a^2 \sum_{q=1}^N \sum_{r=0}^{2P} \left| \nabla_1^2 u_h \left((r-1) \frac{h_1}{2}, q h_2 \right) \right|^2$$

par passage à la limite on a :

$$\int_{\Omega} |\nabla_1 u_h|^2 dx dy \leq 2a^2 \int_{\Omega} |\nabla_1^2 u_h|^2 dx dy$$

D'où le lemme 5.1 en posant $k = \frac{1}{2a^2}$.

Lemme 5.2.

Si $u_h \in \mathcal{E}_h$ nous avons

$$|u_h|_{L_2}^2 \leq c(\Omega) |\nabla_1 u_h|_{L_2}^2$$

où $c(\Omega)$ est une constante ne dépendant que de Ω .

DÉMONSTRATION

Comme dans le lemme 5.1 nous avons

$$u_h \left((2p+1) \frac{h_1}{2}, q h_2 \right) = h_1 \sum_{r=0}^{2P} \nabla_1 u_h \left(r \frac{h_1}{2}, q h_2 \right)$$

$$p = 1, \dots, P$$

$$q = 1, \dots, N$$

ce qui donne :

$$\left| u_h \left((2p+1) \frac{h_1}{2}, q h_2 \right) \right|^2 \leq 2p h_1^2 \sum_{r=0}^{2P} \left| \nabla_1 u_h \left(r \frac{h_1}{2}, q h_2 \right) \right|^2$$

$$\sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^P \left| u_h \left((2p+1) \frac{h_1}{2}, q h_2 \right) \right|^2 \leq 2a^2 \sum_{q=1}^N \sum_{r=0}^{2P} \left| \nabla_1 u_h \left(r \frac{h_1}{2}, q h_2 \right) \right|^2$$

et par passage à la limite :

$$\int_{\Omega} |u_h|^2 dx dy \leq 2a^2 \int_{\Omega} |\nabla_1 u_h|^2 dx dy$$

D'où le lemme 5.2 en posant $c(\Omega) = 2a^2$

Des deux lemmes précédents on déduit facilement le

Lemme 5.3.

Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$|a_h(u_h, u_h)| \geq \alpha(|u_h|_{L^2}^2 + |\nabla_1 u_h|_{L^2}^2 + |\nabla_2 u_h|_{L^2}^2 + |\nabla_1^2 u_h|_{L^2}^2)$$

Convergence de la solution approchée vers la solution exacte

Théorème 5.1.

Il existe une sous-suite u_k , extraite de u_h et un élément u^* de $V(\Omega)$ tel que :

$$(5.1) \quad \lim_{k \rightarrow 0} u_k = u^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

$$(5.2) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \nabla_1 u_k = \frac{\partial u^*}{\partial x} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$(5.3) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \nabla_2 u_k = \frac{\partial u^*}{\partial y} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$(5.4) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \nabla_1^2 u_k = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

DÉMONSTRATION

Du lemme 5.3 on déduit les inégalités :

$$|u_h|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} |f|_{L^2(\Omega)} ; \quad |\nabla_1 u_h|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} |f|_{L^2(\Omega)}$$

$$|\nabla_2 u_h|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} |f|_{L^2(\Omega)} ; \quad |\nabla_1^2 u_h|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} |f|_{L^2(\Omega)}$$

On peut donc extraire une sous-suite u_k de u_h telle que $u_k, \nabla_1 u_k, \nabla_2^1 u_k, \nabla_1^2 u_k$ convergent respectivement vers u^*, W_1, W_2, W_3 .

Nous sommes dans les hypothèses d'une proposition (cf. J. Cea [1], théorème 2.1) qui donne :

$$W_1 = \frac{\partial u^*}{\partial x} \quad ; \quad W_2 = \frac{\partial u^*}{\partial y} \quad ; \quad W_3 = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}$$

Théorème 5.2.

Si
$$u^* = \lim_{k \rightarrow 0} u_k \quad ; \quad \frac{\partial u^*}{\partial x} = \lim_{k \rightarrow 0} \nabla_1 u_k$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \nabla_2 u_k \quad ; \quad \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \nabla_1^2 u_k \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et Ω'_h est un ouvert approchant Ω .

Alors :

$$(5.5) \quad u^* \Big|_{\Gamma} = 0$$

$$(5.6) \quad \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{\Sigma} = 0$$

DÉMONSTRATION

Comme u_h sont nulles au voisinage de Γ , on peut les considérer comme définies dans R^2 , en les prolongeant par 0 hors de Ω .

Nous avons alors :

$$\lim_{k \rightarrow 0} u_k = \tilde{u} \quad \text{dans } L^2(R^2)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \nabla_1 u_k = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \quad \text{--- ---}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \nabla_2 u_k = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad \text{--- ---}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \nabla_1^2 u_k = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \quad \text{--- ---}$$

où $\tilde{u} = u^*$ dans Ω et $\tilde{u} = 0$ hors de Ω .

Alors

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \in L^2(R^2)$$

ce qui entraîne $\tilde{u} = 0$ sur Γ et $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \Big|_{\Sigma} = 0$. D'où le théorème.

La sous-suite extraite u_k vérifie l'équation

$$(5.7) \quad a_h(u_k, W_p) = (f, W_p)_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour tout } p \in \Omega_h.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et posons $\varphi_k = \sum_{M \in \Omega_h} \varphi(M) W_M$.

Multiplions les 2 membres de (5.7) par $\bar{\varphi}(M)$ et sommons pour tous les points $p \in \Omega_h$:

$$a_h(u_k, \varphi_k) = (f, \varphi_k)_{L^2(\Omega)}$$

On démontre facilement le

Lemme 5.4.

$$1^\circ (5.8) \quad \lim_{k \rightarrow 0} (f, \varphi_k)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

$$2^\circ (5.9) \quad \lim_{k \rightarrow 0} a_k(u_k, \varphi_k) = a(u^*, \varphi)$$

Théorème 5.3.

La suite u_k converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers la solution u du problème variationnel (P) :

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \text{quel que soit } \varphi \in V$$

et l'on a dans $L^2(\Omega)$ faible :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \nabla_1 u_h = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \nabla_2 u_h = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \nabla_1^2 u_h = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

DÉMONSTRATION

Par passage à la limite l'équation :

$$a_h(u_k, \varphi_k) = (f, \varphi_k)_{L^2(\Omega)}$$

devient d'après le lemme 5.4

$$a(u^*, \varphi) = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans

$$V(\Omega) = \left\{ u \mid u \in H_0^1(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Sigma} = 0 \right\}$$

par prolongement par continuité on a :

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \text{quel que soit } \varphi \in V$$

comme le problème variationnel (P) admet une solution unique ; il s'en suit que $u^* = u$.

Par ailleurs, la limite u est indépendante de la sous-suite extraite u_k . Donc la suite elle-même $u_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u$ dans $L^2(\Omega)$ faible, et d'après le théorème 5.1, on a dans $L^2(\Omega)$ faible :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \nabla_1 u_h = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \nabla_2 u_h = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \nabla_1^2 u_h = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

D'où le théorème 5.3.

Théorème 5.4. (récapitulatif).

Les problèmes (P) et (P_h) admettent des solutions uniques $u \in V(\Omega)$ et $u_h \in V_h$.

De plus on a dans $L^2(\Omega)$ fort :

$$(5.10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} u_h = 0 \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \nabla_1 u_h = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$(5.11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \nabla_2 u_h = \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \nabla_1^2 u_h = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

DÉMONSTRATION

(cf. CEA [1] théorème général de la convergence forte).

Posons : $F = (L^2(\Omega))^4$

Soit $P_h : V_h \rightarrow F$ définie par la relation :

$$P_h u_h = (u_0^h, u_h^1, u_h^2, u_h^{12}) \quad \text{pour tout } u_h \in V_h$$

avec

$$\begin{aligned} u_0^h &= \text{restriction à } \Omega \text{ de } u_h \\ u_h^1 &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad \nabla_1 u_h \\ u_h^2 &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad \nabla_2 u_h \\ u_h^{12} &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad \nabla_1^2 u_h \end{aligned}$$

$V(\Omega)$ peut être considéré comme un sous-espace fermé de F : c'est le sous-espace des fonctions (u_0, u^1, u^2, u^{12}) de F pour lesquelles $u_0 = u$; $u^1 = D_1^0 u$; $u^2 = D_2 u$; $u^{12} = D_1^2 u$.

On a $(u, \varphi)_{V(\Omega)} = (u, \varphi)_{F(\Omega)}$ pour $u, \varphi \in V(\Omega)$.

$a(u, \varphi)$ peut être prolongée en une forme sesquilinéaire continue sur $P_h V_h \times P_h V_h$ et l'on a encore :

$$(5.12) \quad |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_{F(\Omega)}^2 \quad \text{pour tout } u \in P_h V_h.$$

D'après le théorème 5.3 nous avons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} P_h u_h = u \quad \text{dans } F(\Omega) \text{ faible.}$$

de plus :

$$(5.13) \quad a_h(u_h, u_h) = a(p_h u_h, p_h u_h)$$

$$(5.14) \quad (f, u_h) = (f, p_h u_h)$$

d'après le théorème 5.3 et ce qui précède :

$$(5.15) \quad \lim_{h \rightarrow 0} a(p_h u_h, u) = a(u, u)$$

$$(5.16) \quad \lim_{h \rightarrow 0} a(u, p_h u_h) = a(u, u)$$

$$(5.17) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (f, p_h u_h) = (f, u)$$

Les relations (5.13), (5.14), et (5.17) entraînent

$$\lim_{h \rightarrow 0} a_h(u_h, u_h) = a(u, u)$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} a(p_h u_h - u, p_h u_h - u) \\ = \lim_{h \rightarrow 0} a(p_h u_h, p_h u_h) - \lim_{h \rightarrow 0} a(p_h u_h, u) - \lim_{h \rightarrow 0} a(u, p_h u_h) + a(u, u) = 0 \end{aligned}$$

D'après (5.12) on aura :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|p_h u_h - u\|_F = 0 \text{ d'où le théorème.}$$

6. PROBLEME D'EVOLUTION DISCRETISE

Problème en différences finies. Notations.

Soit

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_r) \quad h_i > 0 \quad \forall i$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_s) \quad k_i > 0 \quad \forall i$$

$$|h| = h_1 + h_2 + \dots + h_r$$

$$|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_s$$

$$M = (l_1 h_1, l_2 h_2, \dots, l_r h_r; m_1 k_1, \dots, m_s k_s) \in R^n = R^r \times R^s$$

$$\mathcal{R} = \{ M \mid M \in R^n, m_i l_i \in Z, \forall i \}$$

(C, M) est le pavé de centre M , de côtés parallèles aux axes et de longueurs $h_1, h_2, \dots, h_r, k_1, k_2, \dots, k_s$.

W_M est la fonction caractéristique de (C, M) . Posons :

$$\rho(M) = \left(\bigcup_{i=1}^r \left((c, M) + l_i \frac{h_i}{2} \right) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^s \left((c, M + m_j \frac{h_j}{2}) \right) \right)$$

avec :

$$|l_i| \leq p_i, |m_j| \leq q_j \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, s \end{matrix}$$

$$\Omega_h = \{ M \mid M \in R_h, \rho(M) \subset \Omega \}$$

$$\Omega(h) = \left\{ \bigcup_M (c, M) \mid M \in R_h, \rho(M) \subset \Omega \right\}$$

$$\delta_{x_i}^1 u(x, y) = \frac{u\left(x + \frac{h_i}{2}, y\right) - u\left(x - \frac{h_i}{2}, y\right)}{h_i}$$

en posant $x + \frac{h_i}{2} = \left(x_1, \dots, x_i + \frac{h_i}{2}, x_{i+1}, \dots, x_r \right)$

$$\delta_x^{i_1} u = \delta_{x_1}^1 (\delta_{x_1}^{i_1-1} u)$$

$$\delta_x^i u = \delta_{x_1}^{i_1} \delta_{x_2}^{i_2} \dots \delta_{x_r}^{i_r} u$$

Soit V_h une famille d'espaces de Hilbert sur C . On munit V_h de deux produits scalaires :

$$(u_h, v_h)_h = \int_{\Omega(h)} u_h(x, y) \overline{v_h(x, y)} \, dx \, dy$$

$$((u_h, v_h))_h = \int_{\Omega(h)} \sum_{|i| \leq m} \delta_x^i u \overline{\delta_x^i v} \, dx \, dy + \int_{\Omega(h)} \sum_{|j| \leq n} \delta_y^j u \overline{\delta_y^j v} \, dx \, dy$$

On a donc :

$$|u_h|_h = |u_h|_{L^2}$$

$$\|u_h\|_h = \left(\sum_{|i| \leq m} |\delta_x^i u|_{L^2}^2 + \sum_{|j| \leq n} |\delta_y^j u|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

En prolongeant $u(x, y)$ par zéro en dehors de $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ on vérifie facilement les relations :

$$|\delta_x^{\alpha} u|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2^{\alpha}}{h_x^{\alpha}} |u|_{L^2(\Omega)} \quad \alpha = 1, 2, \dots, r$$

$$|\delta_y^{\beta} u|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2^{\beta}}{k_y^{\beta}} |u|_{L^2(\Omega)} \quad \beta = 1, 2, \dots, s$$

D'où :

$$(6.1) \quad |u_h|_h \leq \|u_h\|_h \leq C(h) |u_h|_h$$

avec

$$C(h) = \left(\sum_{|i| \leq m} \frac{2^{2i}}{h_i^2} + \sum_{|j| \leq n} \frac{2^{2j}}{k_j^2} \right)^{1/2}$$

Posons :

$$(6.2) \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{|p|=m} (\delta_x^p u_h, \delta_x^p v_h) + \sum_{|q|=n} (\delta_y^q u_h, \delta_y^q v_h)$$

C'est une famille de formes sesquilinéaires continues sur $V_h \times V_h$ et l'on a avec la même démonstration que dans le cas continu :

$$(6.3) \quad |a_h(u_h, v_h)| \leq \|u_h\|_h \|v_h\|_h$$

$$(6.4) \quad |a_h(u_h, v_h)| \leq M(h) |u_h|_h |v_h|_h$$

avec

$$M(h) = \sum_{|i| \leq m} \frac{2^{2i}}{h_i^2} + \sum_{|j| \leq n} \frac{2^{2j}}{k_j^2}$$

$$(6.5) \quad |a_h(u_h, u_h)| \geq \alpha \|u_h\|_h^2 \quad \forall u_h \in V_h \quad \alpha \text{ réel } > 0$$

Soit $O_h \in \mathcal{L}(L^2, V_h)$ défini par :

$$0_h u = \frac{1}{h_1 \dots h_r k_1 \dots k_s} \sum_{M \in \Omega_h} \left(\int_{(C, M)} \tilde{U} \, dx \right) W_M$$

où \tilde{U} est le prolongement par 0 de u en dehors de Ω

On a :

$$|0_h|_h = \sup_{u \in L^2(\Omega)} \frac{|0_h u|_h}{|u|_{L^2}} = 1$$

Considérons un découpage de $(0, T) : 0, l, 2l, \dots, ml = T$. Soit $W_r(t)$ la fonction caractéristique de $[rl, (r+1)l[$

Posons :

$$E_l(0, T+l; V_h) = \left\{ u_{h,i}(t) \mid u_{h,i}(t) = \sum_{r=0}^m u_{h,i}(rl) W_r(t); u_{h,i}(rl) \in V_h \right\}$$

$$f_{h,i}(t) = \frac{1}{l} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\int_{rl}^{(r+1)l} 0_h f(t) \, dt \right) \times W_r(t)$$

Problème (P_h).

On cherche $U_{h,i}(t) \in E_l(0, T+l; V_h)$ vérifiant :

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nabla_i u_{h,i}(t), \varphi_h)_h + a_h(u_{h,i}(t)) + \theta l \nabla_i u_{h,i}(t), \varphi_h = (f_{h,i}(t), \varphi_h)_h \\ \text{pour } t \in [0, T[\quad \theta \text{ paramètre réel } \geq 0. \\ u_{h,i}(0) = 0_h u_0 \quad \forall \varphi_h \in V_h \end{array} \right.$$

avec :

$$\nabla_i u_{h,i}(t) = \frac{1}{l} (u_{h,i}(t+l) - u_{h,i}(t))$$

Proposition 6.1.

Le problème (P_h) admet une solution unique [4], $u_{h,i}$ vérifiant dans V_h l'équation discrète :

$$(6.7) \quad \nabla_i u_{h,i}(t) + (1 - \theta) A_h u_{h,i}(t) + \theta A_h u_{h,i}(t+l) = f_{h,i}(t)$$

avec :

$$a_{h,i}(0) = 0_h u_0$$

$$A_h = \sum_{|p|=m} \delta_x^p + \sum_{|q|=n} \delta_y^q$$

Majorations et stabilité de la solution $u_{h,i}(t)$.**Définition.**

La solution du problème (P_h) est $L^\infty(O, T; X)$ -stable, X étant un espace de Banach; s'il existe une constante C indépendante de h et l telle que :

$$\|P_h u_{h,i}(t)\|_X \leq C \quad \text{quel que soit } t \in [0, T[$$

où P_h est un prolongement de V_h dans X .

Théorème 6.1.

$L^\infty(O, T; L^2(\Omega))$ stabilité.

1° Si $\theta \geq \frac{1}{2}$ la solution $u_{h,i}(t)$ du problème (P_h) vérifie les majorations suivantes, indépendantes de h et l :

$$\begin{aligned} |u_{h,i}(t)|_h &\leq C_1 \\ \int_0^T \|(1 - \theta)u_{h,i}(t) + \theta u_{h,i}(t + l)\|_h^2 dt &\leq C_2 \end{aligned}$$

et $u_{h,i}$ est $L^\infty(O, T; L^2)$ -stable quels que soient h et l

2° Si $\theta < \frac{1}{2}$ la solution $u_{h,i}$ vérifie les majorations :

$$\begin{aligned} |u_{h,i}| &\leq D_1 \\ \int_0^T \|u_{h,i}(t) + \theta l \nabla_i u_{h,i}(t)\|_h^2 dt &\leq D_2 \quad \text{et } t \in [0, T[\end{aligned}$$

Si entre h et k on a la relation :

$$(6.8) \quad l \left(\sum_{|i| \leq m} \frac{2^{2i}}{h_i^2} + \sum_{|j| \leq n} \frac{2^{2j}}{k_j^2} \right) \leq \frac{2}{1 - 2\theta} - 3\eta$$

$\eta > 0$ arbitrairement petit.

3° Une condition suffisante pour que $u_{h,i}$ soit $L^\infty(O, T; L^2)$ -stable est que l'on ait :

$$(6.9) \quad l \left(\sum_{|p|=m} \frac{2^{2p}}{h_p^2} + \sum_{|q|=n} \frac{2^{2q}}{k_q^2} \right) \leq \frac{1}{1 - 2\theta} - \eta'$$

$\eta' > 0$ arbitrairement petit.

DÉMONSTRATION

1° Les théorèmes 3.1 et 4.1 de [4] sont directement applicables.

2° Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 6.1 de [4] en écrivant :

$$a_h(u_h, v_h) = a_h^0(u_h, v_h) + a_h^1(u_h, v_h)$$

avec $a_h^1(u_h, v_h) = 0$.

i) Les formes $a_h^0(u_h, v_h)$ sont sesquilinéaires continues sur $V_h \times V_h$ pour tout $t \in [0, T]$ et l'on a :

$$\begin{aligned} |a_h^0(u_h, v_h)| &\leq \|u_h\|_h \|v_h\|_h \\ |a_h^0(u_h, v_h)| &\leq \left(\sum_{|i| \leq m} \frac{2^{2i}}{h_i^2} + \sum_{|j| \leq n} \frac{2^{2j}}{k_j^2} \right) |u_h|_h |v_h|_h \\ a^0(u_h, v_h) &= \overline{a_h^0(v_h, u_h)} \\ a_h^0(v_h, v_h) &\geq \alpha \|v_h\|_h^2 \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

ii) Comme les formes $a_h(u_h, v_h)$ sont indépendantes de t , toutes les hypothèses de différentiabilité en t , sont trivialement vérifiées. D'où (6.8)

3° En prenant la partie principale de $M(h)$ on a (6.9)

$L^2(O, T; F)$ -Stabilité

Posons $F = (L^2(\Omega))^\alpha$; $\alpha = r + s + 1$ un élément de F s'écrit alors : $U = (u, u_1, u_2, \dots, u_\alpha)$. F est muni de la norme hilbertienne.

$$\|U\|_F^2 = |u|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{\alpha} |u_i|_{L^2}^2$$

Si $\pi \in \mathcal{L}(F, L^2)$ est défini par $\pi U = u$

• $P_h \in \mathcal{L}(V_h, F)$ est défini par :

$$p_h U_h = (u_h, \delta_{x_1}^{p_1} u_h, \dots, \delta_{x_r}^{p_r} u_h, \delta_{y_1}^{q_1} u_h, \dots, \delta_{y_s}^{q_s} u_h) \in F$$

• $q_h \in \mathcal{L}(V_h, L^2)$ est défini par $q_h u_h = u_h \in L^2(\Omega)$

On a alors :

$$\|p_h\|_h = 1 \quad |q_h|_h = 1$$

Soit u la solution du problème continu ; et P_u la fonction qui la prolonge par zéro en dehors de Ω .

Posons

$$S_h u = \frac{1}{h_1 h_2 \dots h_r k_1 \dots k_s} \sum_{M \in \Omega_h} \left(\int_{(C, M)} P_u \, dx \right) W_M$$

$$S_h \in \mathcal{L}(V, V_h) \quad \text{en posant} \quad V = H_0^{m, n}(\Omega)$$

On a :

$$\|S_h\|_h = \sup_{u \in V} \frac{\|S_h u\|_h}{\|u\|_V} \leq C^{te}$$

Théorème 6.2.

On suppose que $u_0 \in V$ et $U_{h,t}(O) = S_h u_0$. Alors :

1° Si $\theta \geq \frac{1}{2}$ on a les inégalités :

$$(6.10) \quad \|u_{h,t}\| \leq D_1 \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

$$(6.11) \quad \int_0^T |\nabla_t u_{h,t}|_h^2 dt \leq D_2$$

et $u_{h,t}(t)$ est inconditionnellement $L^\infty(O, T; F)$ -stable.

2° Si $\theta < \frac{1}{2}$ on a, (6.10) et (6.11) si la condition (6.8) a lieu.

Une condition suffisante pour que $U_{h,t}$ soit $L^\infty(O, T; F)$ -stable et que l'on ait (6.9).

Convergence faible

Définissons un opérateur $\bar{\omega} \in \mathcal{L}(V, F)$ par la relation

$$\bar{\omega} \nu = \left(\nu, \frac{\partial^{p_1} \nu}{\partial x_1^{p_1}}, \dots, \frac{\partial^{p_r} \nu}{\partial x_r^{p_r}}, \frac{\partial^{q_1} \nu}{\partial y_1^{q_1}}, \dots, \frac{\partial^{q_s} \nu}{\partial y_s^{q_s}} \right) \in F$$

Soit enfin r_h une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V_h défini par

$$r_h \nu = \sum_{M \in \Omega_h} \nu(M) W_M \quad \text{pour tout } \nu \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Théorème 6.3.

On suppose que $u_{h,t}(t)$ est $L^\infty(O, t, L^2)$ -stable et $L^2(O, T; F)$ -stable.

Alors u , étant la solution du problème continu on a :

$$\begin{aligned} [p_h u_{h,t}]_0^T &\rightarrow \bar{\omega} u && \text{dans } L^2(0, T; F) \text{ faible} \\ [q_h u_{h,t}]_0^T &\rightarrow u && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2) \text{ faible} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION

D'après les majorations des théorèmes précédents, nous pouvons extraire de $(u_{h,t})$ une sous-suite encore notée $(u_{h,t})$ telle que l'on ait :

$$(6.12) \quad [p_h u_{h,t}]_0^T \rightarrow U \quad \text{dans } L^2(0, T; F) \text{ faible}$$

$$(6.13) \quad [q_h u_{h,t}]_0^T \rightarrow u = \pi U \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2) \text{ faible}$$

$[\varphi]_0^T$ désigne la restriction à $[O, T]$ de la fonction $\varphi(t)$. Vérifions les points suivants :

1) $u \in L^2(0, T; V) \Rightarrow U = \bar{\omega}u$

En effet $U = (u_0, u_1, \dots, u_s)$ et l'on montre facilement à l'aide de (6.12) que l'on a au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$u_1 = \frac{\partial^{p_1} u}{\partial x_1^{p_1}}, \dots, u_r = \frac{\partial^{p_r} u}{\partial x_r^{p_r}}, \dots, u_s = \frac{\partial^{q_s} u}{\partial y_s^{q_s}}$$

2) Soit $\Psi(t) \in \mathcal{L}^1([O, T])$ avec $\varphi(T) = 0$.

Posons $\Psi_l(t) = \sum_{r=-1}^{m-2} \Psi((r+1)l)W_r(t)$. On a alors :

$$(6.14) \quad \int_0^T a_h(u_{h,l}(t), \Psi_l(t)r_{h\nu}) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T a(u(t), \Psi(t)\nu) dt \quad \forall \nu \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En effet, pour $\nu \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} p_{hr}r_{h\nu} &\rightarrow \bar{\omega}\nu && \text{dans } F \text{ fort} \\ \Psi_l p_{hr}r_{h\nu} &\rightarrow \Psi \bar{\omega}\nu && \text{dans } L^2(0, T; F) \text{ fort} \end{aligned}$$

et l'on en déduit (6.14).

3) De même la restriction à (O, T) de

$$\bar{\nabla}_l \Psi_l = \frac{1}{l} (\Psi(t) - \Psi(t-l)) \xrightarrow{l \rightarrow 0} \Psi'(t) \quad \text{dans } L^2(0, T) \text{ fort}$$

ce qui entraîne :

$$(6.15) \quad \int_0^T ((u_{h,l}(t), \bar{\nabla}_l \Psi_l(t)r_{h\nu}))_h dt \xrightarrow{l \rightarrow 0} \int_0^T (u(t), \Psi'(t))_{L^2} dt$$

4) Enfin

$$\int_0^T (0_h f(t), \Psi_l'(t)r_{h\nu})_h dt \rightarrow \int_0^T (P(t), \Psi(t)\nu)_{L^2} dt$$

et

$$(0_h u_0, r_{h\nu}) \rightarrow (u_0, \nu)_{L^2} \quad \text{pour tout } \nu \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nous venons de nous placer dans les hypothèses du théorème 8.1 de [4].

Convergence forte**Théorème 6.4.**

La solution $u_{h,t}$ du problème (P_h) est telle que

$$[q_h u_{h,t}]_0^T \rightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; L^2)$$

u étant la solution du problème continu.

DÉMONSTRATION

D'après le théorème 6.3 nous avons déjà la convergence faible dans $L^2(O, T; L^2)$.

Par ailleurs l'injection canonique de $H_0^{m,n}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. On démontre que :

$$B = \left\{ q_h u_h \mid u_h \in \bigcup_{|h| \leq h^0} V_h, \|p_h u_h\|_F \leq C^{te} \right\}$$

est relativement compact et ceci démontre le théorème.

Conclusion.

Le schéma explicite correspondant au problème formel :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^{m_1} D_{x_1}^{2m_1} u + \dots + (-1)^{m_n} D_{x_n}^{2m_n} u = f(x, t)$$

$x \in R_n$ $u(x, t) = u_0(x)$ est stable si l'on a :

$$\Delta t \left(\sum_{i=1}^n \frac{2^{2m_i}}{h_i^{2m_i}} \leq C^{te} \right)$$

Si l'on cherche la solution dans un « bon espace » on obtient la convergence forte de la solution du problème discrétisé vers la solution exacte du problème continu.

7. APPLICATIONS NUMERIQUES**Etude d'un exemple : méthode de Gauss-Seidel.**

Donnons-nous ici, une solution analytique du problème (P) soit :

$$(7.1) \quad u(x, y) = x^2(x-a)^2 y(y-b)$$

elle vérifie (2.1), (2.2), (2.3) si on pose :

$$(7.2) \quad f(x, y) = 24y(y-b) - 2x^2(x-a)^2$$

Nous nous proposons de calculer la solution approchée u_h à l'aide des formules (P_h) .

Nous donnons ici quelques tableaux récapitulatifs des différents cas que nous avons étudiés, mettant en jeu le nombre de points du réseau, le rapport h_2/h_1^2 , le nombre d'itérations, l'erreur dans $L^2(\Omega)$ et enfin l'erreur maximum relative.

NOTATIONS

$V(I, J)$ est la solution exacte au point de coordonnées (I, J) .

N = nombre de points du réseau.

K = nombre d'itération.

La résolution du système (P_h) a d'abord été faite par la méthode de Gauss-Seidel [5].

Nous obtenons les résultats suivants pour

$$N = 1\ 000 \quad ; \quad \frac{h_2}{h_1^2} = 2.$$

K	ERREUR DANS $L^2(\Omega)$	MAX $\frac{V-u}{V}$
500	$0,96635351 \cdot 10^{-3}$	0,19
1 000	$0,15893485 \cdot 10^{-3}$	$0,80 \cdot 10^{-1}$
1 500	$0,26438360 \cdot 10^{-4}$	$0,33 \cdot 10^{-1}$
2 000	$0,44804373 \cdot 10^{-5}$	$0,145 \cdot 10^{-1}$

Pour un rapport $h_2/h_1^2 = 2$, la convergence est très lente mais est cependant améliorée par une initialisation à la valeur moyenne.

Pour $N = 500$ et $h_2/h_1^2 = 1/2$ la convergence est beaucoup plus rapide et indépendante de l'initialisation.

K	ERREUR DANS $L^2(\Omega)$	MAX $\frac{V-u}{V}$
2	$0,63340228 \cdot 10^{-2}$	
200	$0,22875134 \cdot 10^{-5}$	
500	$0,13782348 \cdot 10^{-7}$	$0,105 \cdot 10^{-2}$
800	$0,13062713 \cdot 10^{-7}$	
1 000	$0,13062713 \cdot 10^{-7}$	$0,101 \cdot 10^{-2}$

après $K = 500$ le nombre d'itérations n'améliore pratiquement pas les résultats, tous les chiffres restent constants après $K = 600$.

Pour confirmer les remarques qui vont suivre en ce qui concerne le rapport h_2/h_1^2 , nous avons étudié le cas où $N = 767$ et $h_2/h_1^2 = 0,75$.

Nous obtenons les résultats suivants :

K	ERREUR DANS $L^2(\Omega)$	$\text{MAX } \frac{V-u}{V}$
200	$0,14088292 \cdot 10^{-3}$	$0,84 \cdot 10^{-1}$
600	$0,22690915 \cdot 10^{-6}$	$0,37 \cdot 10^{-2}$
800	$0,20887202 \cdot 10^{-7}$	$0,10 \cdot 10^{-2}$
1 200	$0,51474549 \cdot 10^{-8}$	$0,68 \cdot 10^{-3}$
1 400	$0,484954 \cdot 10^{-8}$	$0,665 \cdot 10^{-3}$

A partir de $K = 1\ 200$, le nombre d'itérations n'améliore plus les résultats.

Nous pouvons écrire l'équation (P_n) sous la forme

$$u(I, J) = A_1[u(I-2, J) - 4u(I-1, J) - 4u(I+1, J) + u(I+2, J)] \\ + A_3[u(I, J-1) + u(I, J+1)] + D(I, J)$$

avec

$$A_1 = \frac{-h_2^2}{6h_2^2 + 2h_1^4} \quad A_3 = \frac{h_1^4}{6h_2^2 + 2h_1^4}$$

Quel que soit le pas $h = (h_1, h_2)$ nous avons l'identité

$$(7.3) \quad -6A_1 + 2A_3 = 1.$$

Elle exprime seulement que dans la discrétisation $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ la somme algébrique des coefficients est nulle.

Il est évident que si l'on prend A_1 très grand par rapport à A_3 ou le contraire, l'un des crochets va être presque négligé par rapport à l'autre bien que l'identité (7.3) reste vérifiée.

Ceci nous amène à étudier le rapport $A_1/A_3 = -h_2^2/h_1^4$ ou bien le rapport h_2/h_1^2 .

Définition.

On appelle cellule C_h d'un réseau R_h , le pavé de côtés h_1, h_2 respectivement parallèles aux axes Ox et Oy .

On se propose de déterminer la cellule optimale pour le problème qui nous intéresse.

Appelons $\mathcal{C}(h_2/h_1^2)$ la courbe de l'erreur dans $L^2(\Omega)$ en fonction du nombre d'itérations K , pour h_2/h_1^2 donné.

En faisant varier ce rapport nous obtenons un éventail de courbes comme ci-dessous.

La valeur optimale du rapport h_2/h_1^2 est celle qui donne la plus forte pente à la courbe $\mathcal{C}(h_2/h_1^2)$.

Nous voyons que $\mathcal{C}(0,5)$ est la plus décroissante pour $K \leq 400$ mais elle a l'inconvénient de « s'épuiser » assez rapidement.

$\mathcal{C}(0,75)$ continue à décroître pour $K > 400$, mais le nombre d'itérations augmente. Nous payons en itérations ce que nous gagnons en précision.

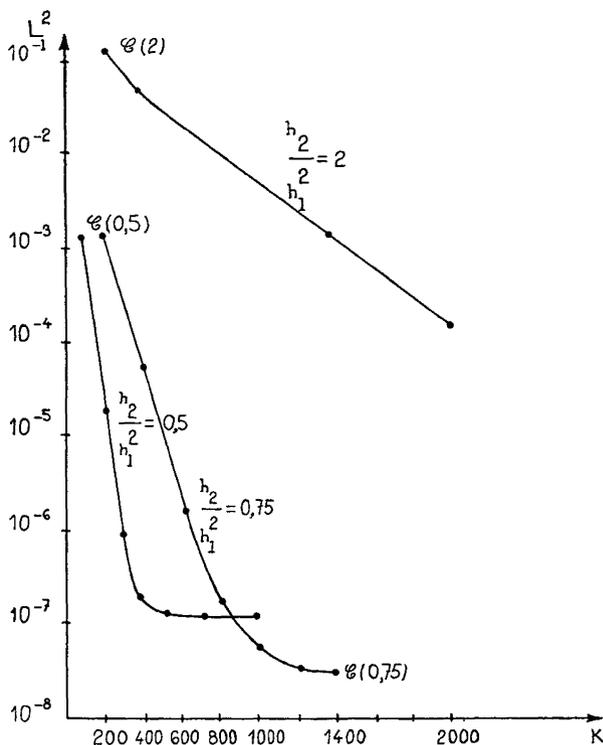


Figure 3

Méthode de relaxations successives.

Nous avons essayé la méthode bien connue de «relaxations successives » cf. [5].

R étant le rayon spectral de la matrice de Gauss-Seidel on sait que

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - R}}$$

Pour $N = 767$ $h_2/h_1^2 = 0,75$ et $\omega = 1,920$. Nous avons les résultats suivants :

K	ERREUR DANS $L^2(\Omega)$	$\text{MAX } \frac{V-U}{V}$
50	$0,67916924 \cdot 10^{-4}$	$0,27 \cdot 10^{-1}$
100	$0,12570775 \cdot 10^{-5}$	$0,12 \cdot 10^{-1}$
150	$0,26951347 \cdot 10^{-7}$	$0,285 \cdot 10^{-2}$
200	$0,42046396 \cdot 10^{-8}$	$0,47 \cdot 10^{-3}$

Nous pouvons conclure d'après ce qui précède que la convergence de $u(I, J)$ vers la solution $V(I, J)$ est nettement plus rapide si $h_2/h_1^2 < 1$ et $\text{opt}(h_2/h_1^2) \simeq 0,75$, ce qui donne $A_1 \simeq -\frac{9}{16} A_3$ et la relation (7.3) devient plus équilibrée.

Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur I.B.M. 7094. La durée de l'exécution du programme de Gauss-Seidel permettant le calcul de la solution exacte en 767 points, des coordonnées, de la valeur moyenne, de l'erreur dans $L^2(\Omega)$ toutes les 200 itérations avec impressions partielles toutes les 200 itérations, est de 1 mm 27 s.

Les mêmes calculs faits avec la méthode de relaxations successives ont été effectués en 29 secondes pour 250 itérations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ЧЕЛ, Approximation variationnelle des problèmes aux limites (*Thèse, 1964*).
- [2] J. L. LIONS, Équations différentielles opérationnelles (*Springer Verlag, 1961*).
— Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles (*Montréal, 1962*).
- Méthodes d'approximation numérique des problèmes aux limites de la physique mathématique (*Tome I et II, C.N.R.S. Institut Blaise-Pascal*).
- [3] PAGNI MAURO, Problemi al contorno per una certa classe di equazioni lineari alle derivate parziali (*Seminari Matematico Fisico. Università di Modena, 1964*).
- [4] P. A. RAVIART, Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires (*Thèse, 1965*).
- [5] R. S. VARGA, Matrix iterative analysis (*Prentice-Hall, 1963*).