JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

GEORGES GRAS

Théorèmes de réflexion

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 10, n° 2 (1998), p. 399-499

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1998__10_2_399_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **10** (1998), 399–499

Théorèmes de réflexion

par Georges Gras

RÉSUMÉ. Soit K un corps de nombres contenant μ_p et muni d'un groupe d'automorphismes G d'ordre étranger à p ; pour toute représentation $\mathbb{F}_p$-irréductible V_χ de G, de caractère χ, et tout G-module M, soit $\mathrm{rg}_\chi(M)$ l'entier r maximum tel que M/M^p contienne V_χ^r.

Nous établissons par exemple la formule générale explicite suivante :

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(\mathcal{C}\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(\mathcal{C}\ell_S^T) = \rho_\chi(T, S),$$

où T et S sont des ensembles finis disjoints de places de K tels que $T \cup S$ contienne les places au-dessus de $p\infty$, où $\mathcal{C}\ell_T^S$ est le groupe de classes généralisées qui correspond, par le corps de classes, au groupe de Galois de la p-extension abélienne maximale T-ramifiée, S-décomposée de K, et où $\rho_\chi(T, S)$ est une expression algébrique élémentaire et * l'involution qui échange les caractères selon la dualité de Kummer classique.

Cette formule, ainsi que celles obtenues en dehors de l'hypothèse sur les places au-dessus de $p\infty$, conduisent à la théorie la plus générale du "Spiegelungssatz" de Scholz-Leopoldt-Kuroda (i.e. avec conducteurs), à la généralisation d'un grand nombre de résultats isolés (notamment dans le subtil cas $p = 2$), et enfin à des formules de rangs pour les principaux invariants arithmétiques attachés à K.

ABSTRACT. Let K be a number field containing μ_p and supplied with a group of automorphisms G of prime to p order ; for all $\mathbb{F}_p$-irreducible representation V_χ of G, with character χ, and all G-module M, let $\mathrm{rg}_\chi(M)$ be the maximal integer r such that M/M^p contains V_χ^r.

We obtain for instance the following explicit general formula :

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(\mathcal{C}\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(\mathcal{C}\ell_S^T) = \rho_\chi(T, S),$$

where T and S are finite disjoint sets of places of K such that $T \cup S$ contains all places above $p\infty$, where $\mathcal{C}\ell_T^S$ is the generalized

---

Manuscrit reçu le 24 octobre 1997.
Mots-clés. "Spiegelungssatz" avec conducteurs, théorème de Scholz-Leopoldt-Kuroda, corps de classes, groupes de classes généralisées, unités, représentations et caractères, χ-rangs, p-rangs, extensions de Kummer, décomposition des idéaux premiers, p-ramification abélienne, conjecture de Leopoldt-Jaulent, K-théorie des anneaux d'entiers.

class group corresponding, by class field theory, to the Galois group of the maximal abelian p-extension, T-ramified and S-splitted of K, and where $\rho_\chi(T, S)$ is an elementary algebraic expression and * the involution which acts on characters according to classical Kummer duality.

This formula, and those obtained without the hypothesis about the places above $p\infty$, give the most general "Spiegelungssatz" of Scholz-Leopoldt-Kuroda (i.e. with conductors), generalizations of a great number of isolated results (especially in the subtil case $p = 2$), and rank formulas for the main arithmetical invariants attached to K.

Sommaire

INTRODUCTION.

La forme générale du “Spiegelungssatz” pour les p-groupes de classes des corps de nombres, dans le cas “semi-simple”, a été donnée par Leopoldt dans [Le] en 1958. Le cas des p-groupes de classes généralisées a été ensuite abordé par Kuroda dans [Ku] en 1970. Enfin des extensions au cas “non semi-simple” ont été établies ultérieurement par Oriat [O1], qui a également approfondi le cas $p = 2$ (cf. [O2], [O3]), et par Oriat et Satgé [OS]. Des cas particuliers avaient été démontrés auparavant, principalement par Kummer [K], Hecke [He1] et Scholz [Sc], le travail de ce dernier étant le plus emblématique dans la mesure où il compare les 3-rangs des groupes des classes des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$, $d \in \mathbb{Z}$.

Le "Spiegelungssatz” classique consiste essentiellement en des inégalités sur les p-rangs de composantes convenables du groupe des classes d'idéaux et conduit également à des théorèmes d'annulation de groupes de classes réelles, dans le cadre de l'arithmétique abélienne, à partir de l'annulation classique des groupes de classes relatives par l'idéal de Stickelberger (cf. [G5], [O4], [S] pour le corps de base $\mathbb{Q}$, une théorie générale devant normalement résulter des conjectures de Stark [TBS, chap. IV, § 6]).

Or il se trouve que des situations plus générales (par exemple celle des groupes de classes $C\ell_T^S$, correspondant au corps de classes T-ramifié, S-décomposé) sont également susceptibles du même principe, lequel, rappelons-le, “compare” la théorie de Kummer et la théorie du corps de classes ; l'intérêt d'introduire des groupes de classes généralisées réside dans le fait que, dès que $T \cup S$ contient les places au-dessus de p, les relations du “Spiegelungssatz” sont des **égalités**, contrairement au cas du théorème de Leopoldt, ce qui permet de mieux comprendre les véritables “symétries” du théorème de réflexion. Il en résulte également des formules de rangs de groupes de Galois de diverses p-extensions abéliennes, attachées naturellement à un corps de nombres, comme celles données dans [G1], [G2], [G6], puis, de façon systématique, par Jaulent dans [J1], [J2], [J3], [J4]. En outre, une étude approfondie de ce principe donne des renseignements plus précis que ceux usuellement énoncés dans la littérature. C'est ce que nous allons développer ici systématiquement, et selon un nouveau point de vue qui permettra d'interpréter les inégalités classiques.

Ce travail n'utilise que la théorie du corps de classes et celle des représentations des groupes dans le cadre semi-simple, mais avec la plus grande généralité possible. De ce fait, ce texte nécessite un système de notations en rapport ; nous avons choisi, au prix d'une certaine surcharge, de n'utiliser que des notations très explicites.

Le chapitre I a pour but d'établir l'énoncé suivant (théorème 5.18) qui constitue le résultat principal de ce travail, et qui, joint au théorème 5.21, conduit à tous les énoncés particuliers du chapitre II et les calculs de rangs du chapitre III :

Soit p un nombre premier, soit K un corps de nombres contenant le groupe μ_p des racines p-ièmes de l'unité et muni d'un groupe d'automorphismes G d'ordre étranger à p.

On fixe deux ensembles T et S finis, disjoints, G-invariants, de places de K ($T = T_0 \subset P\ell_0$, formé de places finies, $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_0 \cup P\ell_\infty^r$, formé de places non complexes), on désigne par $T_p = T \cap P\ell_p$, $S_p = S \cap P\ell_p$, les sous-ensembles de places p-adiques de T et S, et on pose :

$$\begin{aligned} T^* &= T \cup (P\ell_\infty^r - S_\infty), \ S^* = S_0 \cup (P\ell_p - T_p - S_p), \\ \mathfrak{m}^* &= \prod_{\mathfrak{p} \in S_0 - S_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1} \prod_{\mathfrak{p} \in P\ell_p - T_p - S_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}}, \end{aligned}$$

où $e_\mathfrak{p}$ est l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ dans $K/\mathbb{Q}(\mu_p)$.

Alors on a, pour tout caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible χ de G, et avec $\chi^* = \omega\chi^{-1}$, l'égalité générale suivante [1] :

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = \rho_\chi(T, S),$$

qui, pour $G = 1$, donne la relation suivante sur les p-rangs :

$$\mathrm{rg}_p(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_p(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = |T| + \sum_{\mathfrak{p} \in T_p} [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p] - |S_0| - r_2 - \delta_{2,p}|S_\infty|.$$

Dans le cas particulier où $T_p \cup S_p = P\ell_p$ et $S_\infty = \emptyset$ ou $P\ell_\infty^r$, il y a “échange” de la T-ramification et de la S_0-décomposition ainsi que (pour $p = 2$) des sens “ordinaire” et “restreint” pour donner les égalités :

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^{S_0\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T\mathrm{ord}}) = \rho_\chi(T, S_0),$$

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^{S_0\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T\mathrm{res}}) = \rho_\chi(T, S_0 \cup P\ell_\infty^r),$$

qui, pour $p \neq 2$, se réduisent (avec $S_0 = S$) à :

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_S^T) = \rho_\chi(T, S).$$

[1] Dans cette égalité, $C\ell_T^S$ est le groupe de Galois de la p-extension abélienne T-ramifiée, S-décomposée, maximale de K et $C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}$ celui du p-corps de rayon modulo $\mathfrak{m}^*$, T^*-décomposé (on a $C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*} = C\ell_{S^*}^{T^*}$ dès que $T_p \cup S_p = P\ell_p$) ; le χ^*-rang de $C\ell_T^S$ est donné par celui de $C\ell_\mathfrak{n}^S$, avec $\mathfrak{n} = \prod_{\mathfrak{p} \in T - T_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p} \in T_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1}$; enfin, $\rho_\chi(T, S)$ est une constante galoisienne élémentaire.

Chapitre I. Théorie générale du "Spiegelungssatz"

1. Théorie de Kummer élémentaire.

Soit K un corps de nombres, et soit G un groupe d'automorphismes de K, de corps fixe k ; on suppose que K contient le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité pour un certain entier $n \geq 2$. On considère les extensions abéliennes finies L/K d'exposant diviseur de n et galoisiennes sur k. [2]

Fixons une telle extension L de K. Dans $K^\times/K^{\times n}$ on considère le radical de L/K :

$$W = \mathrm{Rad}(L/K) = \{w \in K^\times/K^{\times n},\ \sqrt[n]{w} \in L\}, \tag{1}$$

où $\sqrt[n]{w}$ signifie $\sqrt[n]{\alpha}$ pour un représentant $\alpha \in w$ (ceci a un sens car $\sqrt[n]{\alpha}$ est défini modulo $\mu_n K^\times$, mais $\mu_n \subset K$). Il est clair que G opère sur W puisque L/k est galoisienne (mais on ne sait pas encore que $L = K(\sqrt[n]{W})$).

On désigne par :

$$A = \mathrm{Gal}(L/K)$$

le groupe de Galois de L/K ; puisque l'on a supposé L/k galoisienne, G opère par conjugaison sur A, et on pose pour tout $s \in G$ et tout $a \in A$:

$$a^s = s' a s'^{-1},$$

pour n'importe quel $s' \in \mathrm{Gal}(L/k)$ prolongeant s.

Proposition 1.1. *On a l'isomorphisme canonique de groupes :*

$$W \simeq \mathrm{Hom}(A, \mu_n) \text{ noté } \widehat{A}.$$

Démonstration. Soit $w \in W$; on lui associe l'application φ_w suivante [3] :

$$\begin{aligned} \varphi_w : A &\longrightarrow \mu_n \\ a &\longmapsto (\sqrt[n]{w})^{a-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

On a bien $\varphi_w \in \hat{A}$ car

$$\varphi_w(ab) = (\sqrt[n]{w})^{ab-1} = (\sqrt[n]{w})^{b(a-1)+b-1} = (\sqrt[n]{w})^{a-1}(\sqrt[n]{w})^{b-1} = \varphi_w(a)\varphi_w(b),$$

pour tout $a,\ b \in A$, ce que l'on peut écrire sous la forme d'une application f :

$$\begin{aligned} f : W &\longrightarrow \widehat{A} \\ w &\longmapsto \varphi_w = ((\sqrt[n]{w})^{a-1})_a \end{aligned} \tag{3}$$

dont on vérifie que c'est un homomorphisme de groupes.

[2] On retrouve la théorie de Kummer classique (i.e. sans groupe opérant) en faisant $G = 1$ et donc $k = K$.

[3] Dans laquelle la racine de l'unité $(\sqrt[n]{w})^{a-1}$ ne dépend pas du choix de $\sqrt[n]{w}$ défini modulo $K^\times$.

Si, pour le représentant α de w, on a $(\sqrt[n]{\alpha})^{a-1} = 1$ pour tout $a \in A$, alors $\sqrt[n]{\alpha} \in K$, et $w = K^{\times n}$. D'où l'injectivité de f.

La surjectivité de f est donnée par le "théorème 90" cohomologique :

$$H^1(A, L^\times) = 0 \text{ (cf. [S2, chap. X]) ;}$$

en effet, tout élément $\varphi = (\zeta_a)_a \in \widehat{A}$ définit un 1-cocycle ; il existe donc $u \in L^\times$ tel que $\zeta_a = u^{a-1}$ pour tout $a \in A$, et $w = u^n K^{\times n} \in W$ convient comme antécédent.

Corollaire 1.2. *On a* $L = K(\sqrt[n]{W})$.

Démonstration. On a donc à montrer que $L \subseteq K(\sqrt[n]{W}) = K(\sqrt[n]{\mathrm{Rad}(L/K)})$ au sens de (1) ; il suffit que l'on ait $M = K(\sqrt[n]{\mathrm{Rad}(M/K)})$ pour toute extension M/K cyclique de degré $d|n$, $M \subseteq L$ (car on a $V = \mathrm{Rad}(M/K) \subseteq W = \mathrm{Rad}(L/K)$ et L est un composé de tels corps M) : comme, d'après la proposition 1.1, $V \simeq \mathrm{Gal}(M/K)$, $V = \langle v \rangle$ est cyclique d'ordre d, d'où $v = \beta^{n/d} K^{\times n}$, $\beta \in K^\times$, $\beta \notin K^{\times d/d'}$ pour tout $d'|d$, $d' \neq d$; or $K(\sqrt[n]{v}) = K(\sqrt[d]{\beta})$ est bien de degré d sur K : si σ est un générateur de $\mathrm{Gal}(K(\sqrt[d]{\beta})/K)$, on a $\sigma(\sqrt[d]{\beta}) = \zeta \sqrt[d]{\beta}$, $\zeta \in \mu_d$; si $d'|d$ est l'ordre de ζ, il vient $\sigma((\sqrt[d]{\beta})^{d'}) = (\sqrt[d]{\beta})^{d'}$, soit $\beta \in K^{\times d/d'}$, ce qui implique $d' = d$. D'où $K(\sqrt[d]{\beta}) = M$.

Définition 1.3. On munit $\widehat{A}$ de la structure canonique de G-module définie par $\varphi^s(a) = (\varphi(a^{s^{-1}}))^s$ pour tout $a \in A$ ($\varphi \in \widehat{A}$, $s \in G$). [4]

Le problème est alors le suivant : comment l'application f (cf. (3)) se comporte-t-elle vis-à-vis des opérations de G sur A, $\widehat{A}$ et W? Pour cela on doit introduire le "caractère cyclotomique" θ :

Définition 1.4. On désigne par $\theta : G \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ le caractère de l'action de G sur μ_n (i.e. tel que $s(\zeta) = \zeta^{\theta(s)}$ pour tout $\zeta \in \mu_n$ et tout $s \in G$).

Théorème 1.5. *L'isomorphisme $W \simeq \widehat{A}$ (cf. proposition 1.1) est un isomorphisme de G-modules (cf. définition 1.3 pour la loi de G-module) ; autrement dit, pour tout $w \in W = \mathrm{Rad}(L/K)$ et pour tout $s \in G$, on a* $(\sqrt[n]{w^s})^{a-1} = (\sqrt[n]{w})^{a^{\theta(s)s^{-1}}-1}$, *pour tout $a \in A$.*

Démonstration. Soit s' un prolongement de s dans $\mathrm{Gal}(L/k)$; comme les radicaux sont définis modulo μ_n, on peut toujours supposer que $\sqrt[n]{w^s} =$

[4]L'écriture $\varphi^s(a) = \varphi(a^s)$ ne définit pas une loi de G-module à gauche ; quant à l'écriture $\varphi^s(a) = \varphi(a^{s^{-1}})$, elle définit une loi de G-module à gauche qui n'a pas les bonnes propriétés fonctorielles qu'on attend.

$(\sqrt[n]{w})^{s'}$, auquel cas il vient :

$$\begin{aligned}
\varphi_{w^s}(a) &= (\sqrt[n]{w^s})^{a-1} = (\sqrt[n]{w})^{(a-1)s'} = (\sqrt[n]{w})^{as'-s'} \\
&= (\sqrt[n]{w})^{s'(a^{s^{-1}}-1)} = ((\sqrt[n]{w})^{a^{s^{-1}}-1})^{s} \quad (\text{car } (\sqrt[n]{w})^{a^{s^{-1}}-1} \in \mu_n) \\
&= (\varphi_w(a^{s^{-1}}))^{s} \quad (\text{ cf. définition 1.3}),
\end{aligned}$$

ce qui démontre le premier point ; ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_w^s(a) &= (\varphi_w(a^{s^{-1}}))^{s} = (\varphi_w(a^{s^{-1}}))^{\theta(s)} = \varphi_w(a^{\theta(s)s^{-1}}) \text{ (puisque } \varphi_w \in \widehat{A}) \\
&= (\sqrt[n]{w})^{a^{\theta(s)s^{-1}}-1}.
\end{aligned}$$

D'où le théorème.

Corollaire 1.6 (dualité de Kummer). *Il existe une forme bilinéaire non dégénérée λ définie par :*

$$\begin{aligned}
\lambda : W \times A &\longrightarrow \qquad \mu_n \\
(w, a) &\longmapsto (\sqrt[n]{w})^{a-1} = \varphi_w(a)
\end{aligned}$$

(cf. (3)), pour laquelle on a, pour tout $s \in G$:

$$\lambda(w^s, a) = \lambda(w, a^{\theta(s)s^{-1}}),$$

et telle que, pour tout sous-groupe V de W et tout sous-groupe B de A, on a :

(i) $V^{\perp} := \{a \in A,\ \lambda(w,a) = 1,\ \forall w \in V\} = \mathrm{Gal}(L/K(\sqrt[n]{V}))$,

(ii) $B^{\perp} := \{w \in W,\ \lambda(w,a) = 1,\ \forall a \in B\} = \mathrm{Rad}(L^B/K)$.

Démonstration. La forme λ est non dégénérée : si $(\sqrt[n]{w})^{a-1} = 1$ pour tout $a \in A$, c'est que $\sqrt[n]{w} \in K$ (i.e. $w = K^{\times n}$) ; si $(\sqrt[n]{w})^{a-1} = 1$ pour tout $w \in W$ c'est que a fixe $K(\sqrt[n]{W}) = L$, donc que $a = 1$.

L'action de G est une autre écriture de la relation donnée par le théorème 1.5.

On a ensuite : $a \in V^{\perp} \Longleftrightarrow (\sqrt[n]{w})^{a-1} = 1, \forall w \in V \Longleftrightarrow a$ fixe $\sqrt[n]{V} \Longleftrightarrow a \in \mathrm{Gal}(L/K(\sqrt[n]{V}))$.

On a enfin : $w \in B^{\perp} \Longleftrightarrow (\sqrt[n]{w})^{a-1} = 1, \forall a \in B \Longleftrightarrow \sqrt[n]{w}$ est fixe par B $\Longleftrightarrow \sqrt[n]{w} \in L^B \Longleftrightarrow w \in \mathrm{Rad}(L^B/K)$.

Remarque 1.7. On pourra également se référer à l'approche cohomologique de la théorie de Kummer décrite par Birch dans [CF, chap. III].

2. Décomposition des idéaux premiers dans une extension de Kummer cyclique de degré premier p.

Soit K un corps de nombres contenant $\mu_p = \langle \zeta \rangle$ pour p premier, et soit $w \in K^{\times}/K^{\times p}$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de K, les valuations $\mathfrak{p}$-adiques des éléments de w définissent un élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ noté par abus $v_{\mathfrak{p}}(w)$.

Désignons par $K_\mathfrak{p}$ le complété de K en $\mathfrak{p}$, puis par $O_\mathfrak{p}$, $U_\mathfrak{p}$, $\overline{K}_\mathfrak{p}$, son anneau d'entiers, son groupe des unités (muni de la filtration habituelle $U_\mathfrak{p}^{(i)} = 1 + \mathfrak{p}^i O_\mathfrak{p}$, $i \geq 1$) et son corps résiduel. On a alors (d'après [He2, § 39] et [H]) :

Théorème 2.1. *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K et soit $w \in K^\times/K^{\times p}$ représenté par un élément $\alpha \in K^\times$; on a les résultats suivants :*
(i) *Si $v_\mathfrak{p}(w) \neq \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $K(\sqrt[p]{w})/K$ est ramifiée en $\mathfrak{p}$.*
(ii) *Supposons $v_\mathfrak{p}(w) = \overline{0}$, auquel cas on peut supposer $\alpha \in K^\times \cap U_\mathfrak{p}$:*
(ii)$_1$ *Si $\mathfrak{p} \nmid p$ alors $\mathfrak{p}$ est décomposé (resp. inerte) dans $K(\sqrt[p]{w})/K$ si $\overline{\alpha} \in \overline{K}_\mathfrak{p}^{\times p}$ (resp. sinon).*
(ii)$_2$ *Si $\mathfrak{p}|p$ alors $K(\sqrt[p]{w})/K$ est non ramifiée en $\mathfrak{p}$ si et seulement si il existe $\xi_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$ tel que :*

$$\alpha \equiv \xi_\mathfrak{p}^p \bmod p(1-\zeta)O_\mathfrak{p} \ ;$$

lorsque c'est le cas, $\mathfrak{p}$ est décomposé dans $K(\sqrt[p]{w})/K$ (i.e. $\alpha \in K_\mathfrak{p}^{\times p}$) si et seulement si, en posant $\alpha = \xi_\mathfrak{p}^p(1 + p(1-\zeta)\eta_\mathfrak{p})$, $\eta_\mathfrak{p} \in O_\mathfrak{p}$, on a :

$$\mathrm{tr}_{\overline{K}_\mathfrak{p}/\mathbb{F}_p}(\overline{\eta}_\mathfrak{p}) = \overline{0}.$$ [5]

Remarques 2.2. (i) Soit $e_\mathfrak{p}$ l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ dans $K/\mathbb{Q}(\mu_p)$; la congruence :

$$\alpha \equiv \xi_\mathfrak{p}^p \bmod p(1-\zeta)O_\mathfrak{p},\ \xi_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p},$$

est équivalente à la suivante :

$$\alpha \equiv \xi_\mathfrak{p}^p \bmod \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}}O_\mathfrak{p},\ \xi_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p},$$

car $p(1-\zeta)O_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}}O_\mathfrak{p}$, mais cette dernière écriture ne permet pas de lire facilement la nature de la décomposition de $\mathfrak{p}$ dans $K(\sqrt[p]{w})/K$. Enfin, pour approcher $\eta_\mathfrak{p}$, il suffit de calculer :

$$\frac{\alpha\xi_\mathfrak{p}^{-p} - 1}{p(1-\zeta)} \text{ modulo } \mathfrak{p}.$$

(ii) L'application trace dans $\overline{K}_\mathfrak{p}/\mathbb{F}_p$ est surjective ; ainsi on peut déterminer une fois pour toutes $\eta_\mathfrak{p}^0 \in U_\mathfrak{p}$ tel que $\mathrm{tr}_{\overline{K}_\mathfrak{p}/\mathbb{F}_p}(\overline{\eta}_\mathfrak{p}^0) = \overline{1}$ par exemple, et on aura inertie de $\mathfrak{p}$ dans $K(\sqrt[p]{w})/K$ (i.e. $\alpha \notin K_\mathfrak{p}^{\times p}$) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ et $\xi_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$ tels que :

$$\frac{\alpha}{1 + p(1-\zeta)\lambda\eta_\mathfrak{p}^0} \equiv \xi_\mathfrak{p}^p \bmod \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1}O_\mathfrak{p}.$$

[5] On a donc $\alpha \in K_\mathfrak{p}^{\times p}$ si et seulement si il existe $\xi'_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$ tel que $\alpha \equiv \xi'^{\,p}_\mathfrak{p} \bmod p(1-\zeta)\mathfrak{p}O_\mathfrak{p}$; mais ayant obtenu $\alpha = \xi_\mathfrak{p}^p(1 + p(1-\zeta)\eta_\mathfrak{p})$, la solubilité de la congruence précédente est donc caractérisée par la condition (plus immédiate) de nullité de la trace résiduelle de $\eta_\mathfrak{p}$.

Lorsque le degré résiduel de $\mathfrak{p}$ dans $K/\mathbb{Q}$ est étranger à p, on peut prendre $\eta_{\mathfrak{p}}^0 = 1$, auquel cas $\mathfrak{p}$ est inerte dans $K(\sqrt[p]{w})/K$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ et $\xi_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}$ tels que :

$$\frac{\alpha}{1+p(1-\zeta)\lambda} \equiv \xi_{\mathfrak{p}}^p \bmod \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1} O_{\mathfrak{p}}.$$

Exemples 2.3. Pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-23}, j)$, j racine primitive cubique de l' unité, considérons $K(\sqrt[3]{\varepsilon})$ pour $\varepsilon = \frac{1}{2}(25 + 3\sqrt{69})$ (unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{69}) \subset K$) ; en remarquant que $\varepsilon \equiv -(1 + 3\sqrt{69}) \bmod 9$, on a donc $\varepsilon \equiv (-1)^3(1+3\sqrt{-3}\sqrt{-23}) \equiv (-1)^3(1+3(1-j)j\sqrt{-23}) \bmod 9$ (car $\sqrt{-3} = j(1-j)$), d'où $\varepsilon = (-1)^3(1 + 3(1-j)\eta)$ avec $\eta = j\sqrt{-23} \equiv \sqrt{-23} \bmod \mathfrak{p}$ (pour tout $\mathfrak{p}|3$ dans K). Comme 3 est décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$, $\sqrt{-23} \equiv \lambda \bmod \mathfrak{p}$ (avec $\lambda = \pm 1$), ce qui montre que 3 est inerte dans $K(\sqrt[3]{\varepsilon})/K$ [il est clair que $K(\sqrt[3]{\varepsilon})/K$ est partout non ramifiée, et on peut enfin vérifier que $K(\sqrt[3]{\varepsilon})/K$ est le composé $H\mathbb{Q}(j)$, où H est le corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$)].

Démonstration du théorème. Les points (i) et $(\text{ii})_1$ étant évidents, supposons que $\alpha \in w$ est une unité $\mathfrak{p}$-adique et que $\mathfrak{p}|p$. On rappelle (cf. [S2, chap. III, § 5]) que $K_{\mathfrak{p}}$ admet une unique extension cyclique non ramifiée de degré p qu'il convient de définir de façon kummérienne :

Lemme 2.4. *Soit $\kappa = 1 + p(1-\zeta)\eta$, $\eta \in O_{\mathfrak{p}}$. Alors $K_{\mathfrak{p}}(\sqrt[p]{\kappa})/K_{\mathfrak{p}}$ est non ramifiée ; elle est de degré p (i.e. $\kappa \notin K_{\mathfrak{p}}^{\times p}$) si et seulement si on a $\mathrm{tr}_{\overline{K}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_p}(\overline{\eta}) \neq \overline{0}$.*

Démonstration. On remarque que $x = \sqrt[p]{\kappa} - 1$ est racine du polynôme :

$$X^p + pX^{p-1} + \dots + pX - p(1-\zeta)\eta\ ;$$

ensuite $y = \frac{x}{1-\zeta}$ est racine du polynôme :

$$P = Y^p + \sum_{i\in[2,p-1]} \alpha_i Y^i + \frac{p}{(1-\zeta)^{p-1}} Y - \frac{p}{(1-\zeta)^{p-1}} \eta,$$

où les α_i sont multiples de $1-\zeta$ dans $\mathbb{Z}[\zeta]$. On a $\prod_{i\in[1,p[} (1-\zeta^i) = p$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{p}{(1-\zeta)^{p-1}} &= \prod_{i\in[1,p[} \frac{1-\zeta^i}{1-\zeta} = \prod_{i\in[1,p[} (1+\zeta+\dots+\zeta^{i-1}) \\ &\equiv (p-1)! \equiv -1 \bmod (1-\zeta). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'image résiduelle de P dans $\overline{K}_{\mathfrak{p}}[Y]$ est :

$$\overline{P} = Y^p - Y + \overline{\eta}\ ;$$

c'est un polynôme séparable sur $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$ qui a 0 ou p racines dans $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$ puisque si $P(\overline{y}) = \overline{0}$ pour $\overline{y} \in \overline{K}_{\mathfrak{p}}$, on a $\overline{P}(\overline{y} + \overline{a}) = \overline{0}$ pour tout $\overline{a} \in \mathbb{F}_p$. On sait également qu'il est irréductible sur $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$ si et seulement si il n'y admet pas de racines. [6]

Le lemme de Hensel montre alors que si $\overline{P}$ a une racine dans $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$, P a une racine dans $K_{\mathfrak{p}}$ et on a $\kappa \in K_{\mathfrak{p}}^{\times p}$; sinon (i.e. si $\overline{P}$ est irréductible sur $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$), P est irréductible dans $K_{\mathfrak{p}}[Y]$ et $K_{\mathfrak{p}}(\sqrt[p]{\kappa})$ est une extension non ramifiée de degré p de $K_{\mathfrak{p}}$.

Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}_{\overline{K}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_p}) = \{\overline{t} - \overline{t}^p,\ \overline{t} \in \overline{K}_{\mathfrak{p}}\}$, le lemme en résulte.

Ainsi, connaissant l'extension résiduelle $\overline{K}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_p$, il suffit de poser :

$$\kappa_0 = 1 + p(1-\zeta)\eta_{\mathfrak{p}}^0, \text{ avec } \mathrm{tr}_{\overline{K}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_p}(\overline{\eta}_{\mathfrak{p}}^0) = \overline{1}, \tag{1}$$

pour définir l'unique extension de Kummer non ramifiée de degré p de $K_{\mathfrak{p}}$; pour $[\overline{K}_{\mathfrak{p}} : \mathbb{F}_p]$ étranger à p, on peut prendre :

$$\kappa_0 = 1 + p(1-\zeta). \tag{1'}$$

Revenons maintenant à l'extension $K_{\mathfrak{p}}(\sqrt[p]{\alpha})/K_{\mathfrak{p}}$. Si cette extension est non ramifiée en $\mathfrak{p}$ c'est que, par unicité, $\alpha = \xi_{\mathfrak{p}}^p \kappa_0^\lambda$, $\xi_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ (cf. (1)), et on obtient la congruence $\alpha \equiv \xi_{\mathfrak{p}}^p \bmod p(1-\zeta)O_{\mathfrak{p}}$. On a donc bien une équivalence, ce qui démontre complètement le point $(\mathrm{ii})_2$ du théorème.

Remarques 2.5. (i) En utilisant le théorème d'approximation, on peut écrire que $K(\sqrt[p]{\alpha})/K$ (α supposé étranger à p) est non ramifiée en p si et seulement si il existe $\xi \in K^\times$ tel que l'on ait, dans K :

$$\alpha \equiv \xi^p \bmod p(1-\zeta) \ ;$$

si c'est le cas, la décomposition de p dans $K(\sqrt[p]{\alpha})/K$ se lit sur les images résiduelles modulo $\mathfrak{p}|p$ de l'élément p-entier :

$$\frac{\alpha\xi^{-p} - 1}{p(1-\zeta)}.$$

En particulier (cf. remarque 2.2, (ii)), si le degré résiduel de $\mathfrak{p}|p$ dans $K/\mathbb{Q}$ est étranger à p, alors $\mathfrak{p}$ est inerte dans $K(\sqrt[p]{\alpha})/K$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ et $\xi \in K^\times$ tels que :

$$\frac{\alpha}{1 + p(1-\zeta)\lambda} \equiv \xi^p \bmod \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1}.$$

(ii) Le cas $p = 2$ est particulièrement simple puisque, pour un corps de nombres K quelconque et pour $\alpha \in K^\times$, étranger à 2, l'extension $K(\sqrt{\alpha})/K$ est non ramifiée en 2 si et seulement si il existe $\xi \in K^\times$ tel que :

$$\alpha \equiv \xi^2 \bmod (4) \ ;$$

[6] En effet, un $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$-isomorphisme non trivial σ de $\overline{K}_{\mathfrak{p}}(y)$ ($P(\overline{y}) = \overline{0}$, $\overline{y} \notin \overline{K}_{\mathfrak{p}}$) est tel que $\sigma(\overline{y}) = \overline{y} + \overline{a}$, $\overline{a} \in \mathbb{F}_p^\times$; or ceci définit un $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$-automorphisme d'ordre p de $\overline{K}_{\mathfrak{p}}(y)$.

si c'est le cas, on forme :

$$\frac{\alpha\xi^{-2}-1}{4} \bmod \mathfrak{p},$$

pour en déduire la décomposition de $\mathfrak{p}|2$ dans $K(\sqrt{\alpha})/K$. Si le degré résiduel de $\mathfrak{p}|2$ dans $K/\mathbb{Q}$ est impair alors $\mathfrak{p}$ est inerte dans $K(\sqrt{\alpha})/K$ si et seulement si il existe $\xi \in K^\times$ tel que :

$$\frac{\alpha}{5} \equiv \xi^2 \bmod 4\mathfrak{p}.$$

(iii) Le lemme 2.4 montre que le plus petit module $\mathfrak{p}^h$, tel que [7]:

$$U_{\mathfrak{p}}^{(h)} = 1 + \mathfrak{p}^h O_{\mathfrak{p}} \subset K_{\mathfrak{p}}^{\times p}, \tag{2}$$

est donné par :

$$\mathfrak{p}^h = p(1-\zeta)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1}. \tag{2'}$$

(iv) On démontre facilement (en déterminant la suite des groupes de ramification $G = G_0 = \cdots = G_t$, $G_{t+1} = 1$, et en notant que le $\mathfrak{p}$-conducteur normique de $K(\sqrt[p]{\alpha})/K$ est donné par $\mathfrak{p}^{t+1}$ (cf. [H], [S2, chap. XV, § 2])), que, pour $\mathfrak{p}|p$:

(iv)$_1$ si $v_{\mathfrak{p}}(\alpha) \equiv 0 \bmod p$, et si l'on suppose qu'il y a ramification, alors le $\mathfrak{p}$-conducteur normique de $K(\sqrt[p]{\alpha})/K$ (α pris étranger à p) est :

$$\mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1-m},$$

où $m < pe_{\mathfrak{p}}$ est l'entier maximum pour lequel la congruence :

$$\alpha \equiv \xi^p \bmod \mathfrak{p}^m$$

a une solution dans K ;

(iv)$_2$ si $v_{\mathfrak{p}}(\alpha) \not\equiv 0 \bmod p$, ce $\mathfrak{p}$-conducteur est égal à $\mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1}$.

Définitions 2.6. Soit K un corps de nombres contenant μ_p, et, pour $\mathfrak{p}|p$, soit $e_{\mathfrak{p}}$ l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ dans $K/\mathbb{Q}(\mu_p)$:
(i) Les modules $\mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}}$ et $\mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1}$ s'appellent respectivement le module de $\mathfrak{p}$-primarité et le module de $\mathfrak{p}$-hyperprimarité dans K (cf. [H]).
(ii) Un élément $\alpha \in K^\times$ est dit $\mathfrak{p}$-primaire s'il est de la forme :

$$\alpha = \xi_{\mathfrak{p}}^p(1 + p(1-\zeta)\eta_{\mathfrak{p}}),\ \xi_{\mathfrak{p}} \in K_{\mathfrak{p}}^\times,\ \eta_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}.$$

Il est dit p-primaire, s'il est $\mathfrak{p}$-primaire pour tout $\mathfrak{p}|p$; par conséquent, $\alpha \in K^\times$ est p-primaire s'il est de la forme :

$$\alpha = \xi^p(1 + p(1-\zeta)\eta),\ \xi \in K^\times,\ \text{où } \eta \in K \text{ est } p\text{-entier}.$$

(iii) Soit Δ_p un ensemble d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ au-dessus de p dans K ; alors si F est un sous-groupe de $K^\times$, on désigne par $F_{\Delta_p\text{-prim}}$ le sous-groupe de

[7]Pour $\mathfrak{p}|p$, $U_{\mathfrak{p}}^{(h)} \subset K_{\mathfrak{p}}^{\times p}$ équivaut en fait à $U\mathfrak{p}^{(h)} \subseteq U_{\mathfrak{p}}^{(1)p}$.

F formé des éléments $\mathfrak{p}$-primaires pour tout $\mathfrak{p} \in \Delta_p$. Si Δ_p est l'ensemble de tous les idéaux $\mathfrak{p}|p$, ce sous-groupe se note $F_{p\text{-prim}}$.

Les résultats précédents conduisent également à la formulation suivante qui nous sera utile dans la section 5 :

Proposition 2.7. *On a la suite exacte canonique (où $\mathfrak{p}|p$, $\mu_p = \langle\zeta\rangle$) :*

$$1 \longrightarrow U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})} \cap U_{\mathfrak{p}}^{(1)p} \longrightarrow U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})} \xrightarrow{\tau} \mu_p \longrightarrow 1$$
$$\alpha = 1 + p(1-\zeta)\eta \longmapsto \zeta^{\mathrm{tr}_{\overline{K}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_p}(\overline{\eta})}.$$

3. Caractères p-adiques.

Fixons un nombre premier p ; considérons comme corps de base le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques et soit $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ de $\mathbb{Q}_p$.

3.1. Caractères $\mathbb{Q}_p$-irréductibles.

Soit G un groupe fini d'ordre g et soit $\Psi_p(G) = \Psi$ (resp. $\mathfrak{X}_p(G) = \mathfrak{X}$) l'ensemble des caractères $\mathbb{C}_p$-irréductibles (resp. $\mathbb{Q}_p$-irréductibles) de G. Rappelons comment sont obtenus les éléments de $\mathfrak{X}$ à partir de ceux de Ψ (d'après [S1, § 12]) :

Soit $\psi \in \Psi$ et soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}/\mathbb{Q}_p)$; si l'on pose :

$$(\sigma\psi)(s) = \sigma(\psi(s)), \text{ pour tout } s \in G, \tag{1}$$

on définit $\sigma\psi \in \Psi$ qui est dit un $\mathbb{Q}_p$-conjugué de ψ.

On sait que pour tout $\chi \in \mathfrak{X}$, il existe un caractère absolument irréductible $\psi \in \Psi$ et un entier m_χ (l'indice de Schur) [8], tels que :

$$\chi = m_\chi \sum_{\psi'} \psi', \tag{2}$$

la somme étant prise sur l'ensemble des $\mathbb{Q}_p$-conjugués distincts ψ' de ψ.

On utilisera la notation :

$$\psi'|\chi, \tag{3}$$

pour indiquer que $\psi' \in \Psi$ est un terme de χ dans la somme ci-dessus.

Pour calculer $\sum_{\psi'|\chi} \psi'$, considérons le corps $\mathbb{Q}_p(\mu_{g_0})$, où g_0 est par exemple égal au p.p.c.m. des ordres des éléments de G, et posons :

$$\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{g_0})/\mathbb{Q}_p),$$

identifié canoniquement à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/g_0\mathbb{Z})^*$. Le corps des valeurs, sur $\mathbb{Q}_p$, des caractères ψ', $\psi'|\chi$, est une extension ne dépendant que de χ,

[8]Pour le calcul de m_χ en général, voir [S1, §12.2] ; dans la situation "semi-simple" (p ne divise pas g) que nous considérerons, les m_χ seront tous égaux à 1.

notée $\mathbb{Q}_p(\chi)$, contenue dans $\mathbb{Q}_p(\mu_{g_0})$, et alors (cf. [S1, § 12.4]), tout $\mathbb{Q}_p$-conjugué de $\psi|\chi$ est de la forme ψ^a [9], où :

$$\psi^a(s) = \psi(s^a), \text{ pour tout } s \in G, \tag{4}$$

pour $a \in (\mathbb{Z}/g_0\mathbb{Z})^*$ correspondant à $\sigma \in \Gamma$ (i.e. tel que $\sigma(\xi) = \xi^a$ pour tout $\xi \in \mu_{g_0}$).

Conclusion 3.1. *Posons $\Gamma_\chi = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{g_0})/\mathbb{Q}_p(\chi))$ et désignons par D_χ un système exact de représentants dans $(\mathbb{Z}/g_0\mathbb{Z})^*$ des éléments $\overline{\sigma} \in \Gamma/\Gamma_\chi$; on a donc, en fixant arbitrairement un terme $\psi \in \Psi$ de χ :*

$$\chi = m_\chi \sum_{\overline{\sigma} \in \Gamma/\Gamma_\chi} \sigma\psi = m_\chi \sum_{a \in D_\chi} \psi^a.$$

Si $\psi(1)$ est le degré commun des $\mathbb{Q}_p$-conjugués de ψ, alors le degré $\chi(1)$ de χ est donné par la formule :

$$\chi(1) = m_\chi\ |D_\chi|\ \psi(1),\ \ \psi|\chi.$$

Définitions 3.2. Soit $\psi \in \Psi_p(G)$; on appelle noyau de ψ, le noyau d'une représentation $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ de caractère ψ, à savoir, $\mathrm{Ker}\,\psi = \{s \in G,\ \rho_s = \mathrm{id}_V\} = \{s \in G,\ \psi(s) = \psi(1)\}$ (cf. [S1, §6.5, ex.2]). On remarque que $\mathrm{Ker}\,\psi$ ne dépend pas du choix du $\mathbb{Q}_p$-conjugué de ψ et que l'on peut ainsi noter $\mathrm{Ker}\,\chi$ ce noyau commun. On en déduit un caractère χ' de $G^\chi = G/\mathrm{Ker}\,\chi$, $\mathbb{Q}_p$-irréductible, de noyau trivial, appelé le caractère fidèle associé à χ.

3.2. **Définition des χ-composantes et des χ-rangs** (cas semi-simple).

Supposons maintenant que p ne divise pas l'ordre g de G ; on a alors les simplifications suivantes :

Lemme 3.3. *Lorsque p ne divise pas g, on a $m_\chi = 1$ pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$ (cf. conclusion 3.1) ; en outre, $R_\chi = \mathbb{Z}_p[G]e_\chi$, avec $e_\chi = \frac{\psi(1)}{g} \sum\limits_{s \in G} \chi(s^{-1})s$, est isomorphe à l'algèbre de matrices $M_{\psi(1)}(\mathbb{Z}_p(\chi))$, où $\mathbb{Z}_p(\chi)$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p(\chi)$ (i.e. l'anneau des valeurs de $\psi|\chi$ sur $\mathbb{Z}_p$).*

Démonstration. Les $\frac{1}{m_\chi}e_\chi$ constituent un système fondamental d'idempotents orthogonaux centraux de $\mathbb{Q}_p[G]$ et même de $\mathbb{Z}_p[G]$. D'après [R, § 17], l'algèbre simple $\mathbb{Q}_p[G]e_\chi$ est isomorphe à une algèbre de la forme $M_r(C_\chi)$, où C_χ est un corps gauche, et, dans cet isomorphisme, $\mathbb{Z}_p[G]e_\chi$ a pour image $M_r(Z_\chi)$ où Z_χ est le $\mathbb{Z}_p$-ordre maximal de C_χ ; d'après [R, (41.7), (14.3)], dès que $p \nmid g$, les algèbres considérées sont non ramifiées, d'où le fait

[9]Notation à ne pas confondre avec la puissance d'un caractère.

que C_χ est un corps (commutatif), ce qui démontre que $m_\chi = 1$ (cf. [S1, § 12.2]).

Comme le caractère de $\mathbb{Q}_p[G]e_\chi$ est $\psi(1)\chi$, on a $r = \psi(1)$, d'où $[C_\chi : \mathbb{Q}_p] = |D_\chi|$; il suffit alors de montrer que $\mathbb{Q}_p[G]e_\chi$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}_p(\chi)$ pour en déduire que C_χ est isomorphe à $\mathbb{Q}_p(\chi)$; or on vérifie immédiatement que l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_p[G]e_\chi &\longrightarrow \mathbb{Q}_p(\chi)[G]e_\psi, \ \psi|\chi \text{ fixé}, \\ xe_\chi &\longmapsto xe_\psi \end{aligned} \tag{5}$$

où $e_\psi = \frac{\psi(1)}{g}\sum_{s\in G}\psi(s^{-1})s$, est un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres [si $xe_\psi = 0$, pour $x \in \mathbb{Q}_p[G]$, on a $0 = \sum_{\overline{\sigma}\in\Gamma/\Gamma_\chi}\sigma(xe_\psi) = \sum_{\overline{\sigma}\in\Gamma/\Gamma_\chi}x\sigma(e_\psi) = xe_\chi$; si $y \in \mathbb{Q}_p(\chi)[G]$, $x = \sum_{\overline{\sigma}\in\Gamma/\Gamma_\chi}\sigma(ye_\psi) \in \mathbb{Q}_p[G]$ et est tel que $xe_\psi = (\sum_{\overline{\sigma}\in\Gamma/\Gamma_\chi}\sigma(y)e_{\sigma\psi})e_\psi = ye_\psi$], et que $\mathbb{Q}_p(\chi)e_\psi \simeq \mathbb{Q}_p(\chi)$. D'où le lemme.

On a donc :

$$\mathbb{Z}_p[G] = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}} R_\chi. \tag{6}$$

L'algèbre R_χ est, d'après le lemme 3.3, un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang :

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} R_\chi = |D_\chi|(\psi(1))^2 = \chi(1)\psi(1), \ \psi|\chi. \tag{7}$$

On rappelle maintenant que si p ne divise pas g, les représentations irréductibles sur $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{F}_p$ se correspondent bijectivement (cf. [S1, §15.5]), par "réduction modulo p", de la façon suivante :

Si U est une $\mathbb{Q}_p$-représentation irréductible, pour tout $\mathbb{Z}_p$-réseau M de U, stable par G (i.e. tout sous-$\mathbb{Z}_p[G]$-module de $\mathbb{Z}_p$-rang maximum), M/M^p définit une unique $\mathbb{F}_p$-représentation irréductible V ; ainsi on peut parler du caractère d'une $\mathbb{F}_p$-représentation $V = \oplus_i V_i^{n_i}$, V_i irréductibles distinctes, $n_i \in \mathbb{N}$, comme étant le caractère de la $\mathbb{Q}_p$-représentation $U = \oplus_i U_i^{n_i}$ qui "relève" V.

En particulier, l'anneau $\mathbb{F}_p[G]$ est le produit des anneaux R_χ/pR_χ, $\chi \in \mathfrak{X}$, qui sont simples (cf. [S1, § 15.5]) et R_χ/pR_χ est, en tant que représentation de G sur $\mathbb{F}_p$, isomorphe à $V_\chi^{\psi(1)}$, $\psi|\chi$, où V_χ est la représentation $\mathbb{F}_p$-irréductible de caractère χ au sens précédent.

Soit maintenant M un $\mathbb{Z}[G]$-module de type fini, et considérons, pour $\chi \in \mathfrak{X}$, la χ-composante de M :

$$M_\chi = (\mathbb{Z}_p \otimes M)^{e_\chi}. \tag{8}$$

Comme représentation sur $\mathbb{F}_p$, $(\mathbb{F}_p \otimes M)^{e_\chi} \simeq (M/M^p)^{e_\chi} \simeq M_\chi/M_\chi^p$ (e_χ vu ici dans $\mathbb{F}_p[G]$) est isomorphe à V_χ^r, $r \geq 0$, ce qui conduit à poser la définition suivante :

Définition 3.4 (χ-rang d'un G-module). Soit $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$ et soit M un $\mathbb{Z}[G]$-module de type fini ; le nombre $r \geq 0$, tel que $M_\chi/M_\chi^p \simeq V_\chi^r$, s'appelle le χ-rang de M et est noté $\mathrm{rg}_\chi(M)$; c'est donc le " nombre de fois que la représentation $\mathbb{F}_p$-irréductible de caractère χ est contenue dans M_χ/M_χ^p ".

Remarques 3.5. (i) Si $G = 1$, on a $\mathfrak{X}_p(G) = 1$, $R_\chi = \mathbb{Z}_p$, $M_\chi = \mathbb{Z}_p \otimes M$, et on pose $\mathrm{rg}_\chi(M) = \mathrm{rg}_p(M)$ [10] qui s'appelle alors le p-rang de M et est égal à la dimension du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel M/M^p.
(ii) Il vient, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:
$\mathrm{rg}_p(M_\chi) = \chi(1)\ \mathrm{rg}_\chi(M) = |D_\chi|\psi(1)\mathrm{rg}_\chi(M)$ (cf. conclusion 3.1).
D'après (7), on a $\mathrm{rg}_\chi(R_\chi) = \psi(1)$.
(iii) Lorsque M est un groupe fini (cas des groupes de classes qui nous intéressent particulièrement ici), on a $M_\chi \simeq \prod_{i=1}^{r} R_\chi/\mathfrak{a}_i$, où les $\mathfrak{a}_i$ sont des idéaux à droite de R_χ, de même $\mathbb{Z}_p$-rang que R_χ (cf. [R, ex.4, p.202]).
(iv) Si M est un $\mathbb{Z}$-module libre, pour tout corps Q de caractéristique nulle, $Q \otimes M$, comme $Q[G]$-module, et $\mathbb{F}_p \otimes M$, comme $\mathbb{F}_p[G]$-module, ont même caractère, et on peut donc conduire les calculs par extension des scalaires arbitraire en caractéristique 0 (en effet, il suffit de faire les calculs de caractères à partir d'une $\mathbb{Z}$-base de M).
(v) Pour toute suite exacte de $\mathbb{Z}[G]$-modules :

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 1,$$

on a, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, la suite exacte :

$$1 \longrightarrow N_\chi \longrightarrow M_\chi \longrightarrow P_\chi \longrightarrow 1$$

(en effet, $\mathbb{Z}_p$ est plat).
(vi) Pour tout $\mathbb{Z}[G]$-module M de type fini, on a évidemment :

$$\mathbb{Z}_p \otimes M = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}} M_\chi.$$

Exemples 3.6 (cas abélien d'ordre étranger à p). Si G est abélien d'ordre étranger à p, Ψ s'identifie au dual de G. Soit alors $\psi \in \Psi$; le caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible χ associé à ψ est donné (cf. conclusion 3.1) par :

$$\chi = \sum_{a \in D_\chi} \psi^a, \tag{9}$$

où $D_\chi = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{g_\chi})/\mathbb{Q}_p)$, g_χ étant l'ordre commun des $\mathbb{Q}_p$-conjugués de ψ [11] ; or D_χ est ici engendré par le Frobenius de p, et on a :

$$\chi = \sum_{i \in [0, |D_\chi|[} \psi^{p^i}\ ; \tag{10}$$

on remarque que $|D_\chi|$ est égal à l'ordre de p modulo g_χ.

---

[10] Ne pas confondre les notations $\mathrm{rg}_p(M)$ (caractéristique du cas $G = 1$) et $\mathrm{rg}_1(M)$ (qui existe pour tout G).

[11] En effet, le corps des valeurs $\mathbb{Q}_p(\chi)$ est ici égal à $\mathbb{Q}_p(\mu_{g_\chi})$.

On a (cf. lemme 3.3) :

$$R_\chi \simeq \mathbb{Z}_p[\mu_{g_\chi}], \tag{11}$$

qui est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p(\mu_{g_\chi})$. C'est donc un anneau commutatif principal et tout R_χ-module de type fini, du type M_χ (cf. (8)), peut être écrit sous la forme :

$$M_\chi \simeq R_\chi^{r'_\chi} \times \prod_{i=1}^{r''_\chi} R_\chi/p^{\nu_i}R_\chi,\ \nu_i \geq 1, \tag{12}$$

auquel cas on a :

$$\mathrm{rg}_\chi(M) = r'_\chi + r''_\chi\ ; \tag{12'}$$

autrement dit, dans ce cas, le χ-rang coïncide avec la notion usuelle de R_χ-rang, défini comme étant la dimension de $M_\chi/{M_\chi}^p$ sur le corps R_χ/pR_χ.

3.3. Cas des $\mathcal{G}$-familles.

Soit k un corps de nombres fixé et soit k^{gal} l'extension galoisienne maximale de k de degré étranger à p (au sens profini) ; posons $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{gal}}/k)$.

On suppose maintenant que G est le groupe de Galois d'une extension galoisienne finie K de k dans k^{gal} ; dans ce cas, $\Psi_p(G)$ (resp. $\mathfrak{X}_p(G)$) se note Ψ_K (resp. $\mathfrak{X}_K$) et est dit l'ensemble des caractères $\mathbb{C}_p$ (resp. $\mathbb{Q}_p$)-irréductibles de K. [12]

Définition 3.7. Si $\chi \in \mathfrak{X}_K$, le sous-corps de K fixe par $\mathrm{Ker}\,\chi$ (cf. définitions 3.2) est une extension galoisienne de k, notée K^χ ; ce corps K^χ ne dépend que du caractère fidèle issu de χ et, en un sens évident, ne dépend pas du corps K dans k^{gal} servant à le définir.

Supposons alors que l'on dispose d'une famille de $\mathbb{Z}_p[\mathcal{G}]$-modules de type fini, $(M_F)_F$, indexée par l'ensemble des sous-extensions galoisiennes finies F/k de k^{gal}/k, et pour laquelle on dispose d'applications naturelles de $\mathcal{G}$-modules :

$$N_{F'/F} : M_{F'} \longrightarrow M_F,\ \ j_{F'/F} : M_F \longrightarrow M_{F'}\ (F \subseteq F'), \tag{13}$$

telles que :

$$j_{F'/F} \circ N_{F'/F} = \sum_{t \in \mathrm{Gal}(F'/F)} t,\ \ N_{F'/F} \circ j_{F'/F} = [F' : F] \tag{13'}$$

(par exemple, $(M_F)_F$ est la famille des p-groupes de classes d'idéaux des corps F, ou des groupes $\mathbb{Z}_p \otimes E_F$ pour le groupe des unités E_F de F, et les applications N et j sont respectivement les "normes" et les "extensions").

[12] Ce vocabulaire vient du fait que toute représentation de G peut être vue comme représentation de $\mathcal{G}$ de noyau ouvert (fixant un corps K), et inversement.

L'hypothèse "p ne divise pas l'ordre de $\mathcal{G}$" entraîne facilement que toutes les applications $N_{F'/F}$ sont surjectives et toutes les applications $j_{F'/F}$ injectives (ce qui n'est évidemment pas le cas sans cette hypothèse).

Soit alors $\chi \in \mathfrak{X}_K$ et soit χ' le caractère fidèle correspondant ; on a (cf. lemme 3.3) :

$$e_\chi = \frac{\psi(1)}{g} \sum_{s\in G} \chi(s^{-1})s = \frac{\psi(1)}{g} \sum_{\overline{s}\in G^\chi} \chi'(\overline{s}^{-1})s' \sum_{t\in \mathrm{Ker}\,\chi} t,$$

où $s' \in G$ désigne un représentant arbitraire de $\overline{s}$; d'où :

$$e_\chi = e'_{\chi'} \frac{1}{|\mathrm{Ker}\,\chi|} \sum_{t\in \mathrm{Ker}\,\chi} t,$$

où $e'_{\chi'}$ est un antécédent arbitraire de $e_{\chi'}$ dans la projection canonique :

$$\mathbb{Z}_p[G] \to \mathbb{Z}_p[G^\chi].$$

Par conséquent, il vient :

$$\begin{aligned} M_K^{e_\chi} &= \left(M_K^{\frac{1}{|\mathrm{Ker}\,\chi|}\sum_{t\in\mathrm{Ker}\,\chi} t} \right)^{e'_{\chi'}} \simeq \left(j_{K/K^\chi} \circ N_{K/K^\chi}(M_K)\right)^{e'_{\chi'}} \\ &\simeq \left(N_{K/K^\chi}(M_K)\right)^{e_{\chi'}} \simeq M_{K^\chi}^{e_{\chi'}}. \end{aligned}$$

Ainsi, la définition de la χ-composante M_χ (cf. (8)) ne dépend pas de l'extension K utilisée pour la définir (on peut toujours la calculer à partir d'un caractère fidèle, dans le corps K^χ qui lui correspond) ; par exemple, on a :

(14) $$M_1 \simeq M_k.$$

Conclusion 3.8. *Au triplet formé par k, le nombre premier p et la $\mathcal{G}$-famille $(M_F)_F$, est donc associée canoniquement une famille $(M_\chi)_\chi$, indexée par $\mathfrak{X}_{k^{\mathrm{gal}}} = \bigcup_K \mathfrak{X}_K$, avec $M_\chi \simeq M_{K^\chi}^{e_{\chi'}}$, où χ' est le caractère fidèle associé à χ, pour laquelle on a, pour tout $K \subset k^{\mathrm{gal}}$, la décomposition :*

(15) $$M_K \simeq \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}_K} M_\chi.$$

3.4. χ-rangs des représentations de permutation.

Illustrons ces calculs de χ-rangs dans un cas particulier de représentation induite que nous rencontrerons sous la forme suivante : K/k est une extension galoisienne, de groupe de Galois G d'ordre g étranger à p, et V est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel dont une base est indexée par l'ensemble des places $\mathfrak{p}$ de K au-dessus d'une place v de k :

(16) $$V = \bigoplus_{\mathfrak{p}|v} \mathbb{F}_p\, \mathfrak{p} ;$$

on fait opérer G sur V en posant :

$$s\Big(\sum_{\mathfrak{p}|v} a_{\mathfrak{p}}\ \mathfrak{p}\Big) = \sum_{\mathfrak{p}|v} a_{\mathfrak{p}}\ s\mathfrak{p} = \sum_{\mathfrak{p}|v} a_{s^{-1}\mathfrak{p}}\ \mathfrak{p}.$$

Soit $H_v = H$ le sous-groupe de décomposition d'une place $\mathfrak{p}_0$ fixée de K au-dessus de v et soit $h = |H|$; alors si $(s_i)_{i\in[1,g/h]}$ est un système exact de représentants des classes de G modulo H, tout $\sum_{\mathfrak{p}|v} a_{\mathfrak{p}}\ \mathfrak{p} \in V$ s'écrit $\sum_{i\in[1,g/h]} a_i\ s_i\mathfrak{p}_0$, et il est clair que V est la représentation de permutation V_H de G modulo H (cf. [S1, § 3.3, ex.2]), représentation que l'on peut également écrire sous les formes suivantes :

$$V_H = \underset{i\in[1,g/h]}{\oplus} \mathbb{F}_p\ s_iH \simeq \mathbb{F}_p[G]\sum_{t\in H} t. \tag{16'}$$

Nous montrerons, à la section 6, que pour tout sous-groupe F d'indice fini dans le groupe E_K^{Σ} des Σ-unités de K, où Σ est un ensemble fini de places de K, stable par G, la représentation $\mathbb{F}_p \oplus (\mathbb{F}_p \otimes F)$ est, essentiellement, la somme des représentations V_{H_v}, v parcourant l'ensemble formé des places à l'infini de k et de celles en-dessous des éléments de Σ ; nous rencontrerons également ces représentations dans d'autres circonstances, et il convient donc d'indiquer comment on calcule leurs χ-rangs.

La représentation V_H est induite par la représentation unité de H et son caractère est donc $\mathrm{Ind}_H^G(1_H)$. Pour déterminer le χ-rang de V_H, il suffit de déterminer le produit scalaire $< \mathrm{Ind}_H^G(1_H), \psi >_G$, $\psi|\chi$, qui donne le nombre de fois que V_H contient la représentation $\mathbb{F}_p$-irréductible de caractère χ ; or (cf. [S1, § 7.2]), la formule de réciprocité de Frobenius conduit à $< \mathrm{Ind}_H^G(1_H), \psi >_G = < 1_H, \mathrm{Res}_H^G(\psi) >_H$, où $\mathrm{Res}_H^G(\psi)$ est la restriction à H du caractère ψ de G. On a alors :

$$< 1_H, \mathrm{Res}_H^G(\psi) >_H = \frac{1}{h}\sum_{t\in H} \psi(t).$$

Résumons ces propriétés dans l'énoncé suivant :

Proposition 3.9. *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G, et soit V_H la représentation de permutation de G modulo H ; alors le caractère de V_H est :*

$$\mathrm{Ind}_H^G(1_H) = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}} \rho_\chi \chi, \quad \textit{où} \quad \rho_\chi = \frac{1}{|H|}\sum_{t\in H} \psi(t), \ \ \psi|\chi,$$

et le χ-rang de V_H est égal à ρ_χ.

Remarques 3.10. (i) Si H est normal dans G, V_H est alors la représentation régulière de G/H dont les caractères $\mathbb{F}_p$-irréductibles sont les éléments de $\mathfrak{X}_p(G)$ dont le noyau contient H ; dans ce cas on a :

$$\rho_\chi = \psi(1) \text{ (resp. 0) si } H \subseteq \operatorname{Ker}\chi \text{ (resp. } H \not\subseteq \operatorname{Ker}\chi).$$

Si H^χ est l'image canonique de H (non supposé normal dans G) dans $G^\chi = G/\operatorname{Ker}\chi$ (cf. définitions 3.2), on a immédiatement (en confondant, par abus, un caractère et son caractère fidèle associé) :

$$\rho_\chi = \frac{1}{|H^\chi|} \sum_{t \in H^\chi} \psi(t), \ \psi|\chi,$$

qui montre que ρ_χ est aussi le χ-rang de la représentation de permutation de G^χ modulo H^χ ; on peut donc appliquer ce qui précède à cette situation, ce qui est plus précis comme le montre l'exemple suivant :

Soient $G = S_3 = \langle\sigma\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$, $H = \langle\tau\rangle$ et ψ le caractère de degré 1 de noyau $\langle\sigma\rangle$; on a $H^\chi = G^\chi \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et par conséquent H^χ est normal dans G^χ sans que H le soit dans G.

(ii) L'application canonique

$$\underset{s\in G}{\oplus} \mathbb{F}_p \ s \longrightarrow \underset{i\in[1,g/h]}{\oplus} \mathbb{F}_p \ s_i H \qquad \text{(cf. (16'))}$$

est un homomorphisme de G-modules surjectif ; V_H est donc facteur direct de la représentation régulière de G [13] et on a $\rho_\chi \leq \psi(1)$ (égalité si et seulement si $H \subseteq \operatorname{Ker}\chi$).

Avec $G = S_3 = \langle\sigma\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$, $H = \langle\tau\rangle$, mais pour le caractère ψ de degré 2 (pour lequel $\psi(1) = 2$, $\psi(\sigma) = \psi(\sigma^2) = -1$, $\psi(\tau) = \psi(\tau\sigma) = \psi(\tau\sigma^2) = 0$), on illustre ce phénomène puisque $\rho_\chi = \frac{1}{2}(\psi(1) + \psi(\tau)) = 1$.

3.5. Comparaison des représentations M/M^p et $M[p]$.

On utilisera souvent le résultat suivant :

Proposition 3.11. *Soit p un nombre premier et soit G un groupe fini d'ordre étranger à p. Si M est un $\mathbb{Z}[G]$-module* **fini**, *alors les caractères de M/M^p et $M[p] = \{x \in M, \ x^p = 1\}$ sont égaux.*

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour chaque $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, M/M^p et $M[p]$ contiennent autant de fois la $\mathbb{F}_p$-représentation irréductible V_χ (cf. § 3.2). Posons $(M/M^p)_\chi = V_\chi^r$, $M[p]_\chi = V_\chi^{r'}$; la suite exacte de $\mathbb{Z}_p[G]$-modules :

$$1 \longrightarrow M[p] \longrightarrow M \longrightarrow M^p \longrightarrow 1,$$

conduit à :

$$1 \longrightarrow M[p]_\chi \longrightarrow M_\chi \longrightarrow M_\chi^p \longrightarrow 1,$$

[13] Dont on rappelle que le caractère est $\sum_{\psi\in\Psi} \psi(1)\psi = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}} \psi(1)\chi$.

et puisque M est fini, il vient :

$$|M[p]_\chi| = |M_\chi|\,|M_\chi^p|^{-1} = |(M/M^p)_\chi|,$$

d'où $r = r'$.

Corollaire 3.12. *Si M est un $\mathbb{Z}[G]$-module fini, où G est un groupe fini d'ordre étranger à p, on a $\mathrm{rg}_\chi(M) = \mathrm{rg}_\chi(M/M^p) = \mathrm{rg}_\chi(M[p])$, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$.*

4. Involution du miroir ("Spiegelungsrelation").

Le cadre est le suivant : on fixe un nombre premier p, un corps de nombres K contenant le groupe μ_p des racines p-ièmes de l'unité et on considère un groupe d'automorphismes G de K, d'ordre g non divisible par p. On désigne toujours par $\Psi_p(G) = \Psi$ (resp. $\mathfrak{X}_p(G) = \mathfrak{X}$) l'ensemble des caractères $\mathbb{C}_p$ (resp. $\mathbb{Q}_p$)-irréductibles de G et par $e_\chi = \frac{\psi(1)}{g} \sum_{s\in G} \chi(s^{-1})s$ l'idempotent central associé à un caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible χ (cf. §3.2).

Les $\mathbb{Z}_p[G]$-modules de type fini M [14] admettent la décomposition :

$$M = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}} M_\chi,\ \text{où } M_\chi = M^{e_\chi}\ (\text{cf. remarque 3.5, (vi)}). \tag{1}$$

Soit L une extension abélienne finie p-élémentaire de K, galoisienne sur $k = K^G$, soient $W = \mathrm{Rad}(L/K)$ et $A = \mathrm{Gal}(L/K)$ (cf. section 1) ; on a alors :

$$W = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}} W_\chi,\ A = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}} A_\chi. \tag{2}$$

Nous allons traduire le résultat du théorème 1.5 en termes de χ-composantes (i.e. en termes d'idempotents) ; on va voir qu'il suffit de munir $\mathbb{Z}_p[G]$ d'une involution (l'involution du miroir) qui est la suivante :

Définitions 4.1. (i) On désigne par ω le caractère de Teichmüller (i.e. le caractère $\omega\ : G \longrightarrow \mu_{p-1} \subset \mathbb{Z}_p^*$, où $\omega(s)$ est l'unique élément de μ_{p-1} congru à $\theta(s)$ modulo p) (cf. définition 1.4). On retrouve θ (pour $n = p$) au moyen du composé d'applications suivant :

$$G \xrightarrow{\omega} \mathbb{Z}_p^* \xrightarrow{\mathrm{mod} p} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*.$$

(ii) On désigne par * l'involution de $\mathbb{Z}_p[G]$ définie par :

$$x = \sum_{s\in G} x_s s \in \mathbb{Z}_p[G] \longmapsto x^* = \sum_{s\in G} x_s\omega(s)s^{-1}.$$

[14] Obtenus éventuellement comme tensorisés par $\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Z}$-modules.

Remarque 4.2. Si $\mu_p \subset k = K^G$ (ce qui est toujours le cas pour $p = 2$), l'involution $*$ est donnée par :

$$x = \sum_{s \in G} x_s s \longmapsto x^* = \sum_{s \in G} x_s s^{-1}.$$

L'involution $*$ est l'identité si et seulement si $\mu_p \subset k$ et G est 2-élémentaire.

Lemme et définition 4.3. *Pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, on a $e_\chi^* = e_{\chi^*}$, où $\chi^* = \omega\chi^{-1}$ (χ^{-1} étant défini par $\chi^{-1}(s) = \chi(s^{-1})$ pour tout $s \in G$) est un élément de $\mathfrak{X}_p(G)$ (appelé le reflet de χ).*

Démonstration. L'irréductibilité de χ^* va provenir de celle de χ (ce qui constitue une équivalence puisque $*$ est une involution). Soit $\psi \in \Psi$ tel que :

$$\chi = \sum_{\overline{\sigma} \in \Gamma/\Gamma_\chi} \sigma\psi,$$

où Γ/Γ_χ est le groupe de Galois du corps des valeurs de ψ sur $\mathbb{Q}_p$ (cf. conclusion 3.1) ; comme $\chi^* = \omega\chi^{-1}$, on a $\chi^* = \sum_{\overline{\sigma} \in \Gamma/\Gamma_\chi} \omega(\sigma\psi)^{-1} = \sum_{\overline{\sigma} \in \Gamma/\Gamma_\chi} \omega\sigma(\psi^{-1})$; mais comme $\mu_{p-1} \subset \mathbb{Q}_p$, on a $\omega = \sigma\omega$ pour tout $\sigma \in \Gamma$, ce qui fait que $\chi^* = \sum_{\overline{\sigma} \in \Gamma/\Gamma_\chi} \sigma(\omega\psi^{-1})$. On peut donc étendre l'involution $*$ à l'ensemble Ψ, et il suffit alors ici de montrer que $\psi^* = \omega\psi^{-1} \in \Psi$; or (cf. [S1, § 2.3, th. 5]) on a :

$$\begin{aligned} < \psi^*, \psi^* > &= \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \psi^*(s^{-1})\psi^*(s) = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \omega\psi^{-1}(s^{-1})\, \omega\psi^{-1}(s) \\ &= \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \psi(s)\psi(s^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

Ensuite on a facilement :

$$\begin{aligned} e_\chi^* &= \left(\frac{\psi(1)}{g} \sum_{s \in G} \chi(s^{-1}) s \right)^* = \frac{\psi(1)}{g} \sum_{s \in G} \chi(s^{-1})\omega(s) s^{-1} \\ &= \frac{\psi(1)}{g} \sum_{s \in G} \omega\chi^{-1}(s) s^{-1} = e_{\chi^*}. \end{aligned}$$

Théorème 4.4. *Soit K un corps de nombres contenant μ_p, et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p. Soit $L = K(\sqrt[p]{W})$, $W \subset K^\times/K^{\times p}$, une extension de Kummer, galoisienne sur $k = K^G$, et soit $A = \mathrm{Gal}(L/K)$. Alors, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, on a l'isomorphisme de G-modules (cf. définition 1.3) :*

$$W_\chi \simeq \widehat{A_{\chi^*}}.$$

Démonstration. Posons $B = \mathrm{Gal}(L/K(\sqrt[p]{W_\chi}))$; on sait (cf. corollaire 1.6) que $B = W_\chi^\perp$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} b \in B &\iff \lambda(w^{e_\chi}, b) = 1, \ \forall w \in W \\ &\iff \lambda(w, b^{e_{\chi^*}}) = 1, \ \forall w \in W \ \text{(d'après les définitions 4.1 et 4.3)} \\ &\iff b^{e_{\chi^*}} = 1 \ ; \end{aligned}$$

ainsi $B = \oplus_{\varphi \neq \chi^*} A_\varphi$ et $\mathrm{Gal}(K(\sqrt[p]{W_\chi})/K) \simeq A/B \simeq A_{\chi^*}$. A ce niveau on a des isomorphismes de G-modules, et on en déduit (d'après le théorème 1.5 appliqué à $W = W_\chi$ et $A = A_{\chi^*}$), l'isomorphisme de G-modules anoncé. [15]

En utilisant la notion de χ et χ^*-rangs (cf. définition 3.4) on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.5. *On a, pour tout* $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$ *:*

$$\mathrm{rg}_\chi(W) = \mathrm{rg}_{\chi^*}(A).$$

5. Corps de classes et théorème général de T-S-réflexion.

On se place dans le contexte de la section 4 (théorème 4.4 notamment), et on fait maintenant appel au corps de classes pour interpréter le groupe $A = \mathrm{Gal}(L/K)$ en termes de groupes de classes généralisées, en fonction de la nature de la ramification imposée dans L/K. On peut donc varier considérablement les situations.

Nous allons tout de suite établir les résultats les plus généraux possibles qui donneront, par spécialisation, un grand nombre de conséquences pratiques.

On suppose toujours que le corps K contient le groupe μ_p des racines p-ièmes de l'unité, car l'objectif est de comparer théorie du corps de classes et théorie de Kummer, mais cette hypothèse n'intervient qu'au-delà des définitions 5.1 dans lesquelles nous allons rappeler les éléments du corps de classes "T-ramifié, S-décomposé" (on peut se référer à [AT], [J1], [M]).

Définitions générales 5.1.
(i) **Ensembles de places.** On désigne par :

$$P\ell_K = P\ell,$$

l'ensemble des places de K ; on a :

$$P\ell = P\ell_0 \cup P\ell_\infty \ ; \ P\ell_\infty = P\ell_\infty^r \cup P\ell_\infty^c, \tag{1}$$

où $P\ell_0$ (resp. $P\ell_\infty$, $P\ell_\infty^r$, $P\ell_\infty^c$) est l'ensemble des places finies (resp. des places à l'infini, réelles, complexes) de K. On pose également :

$$P\ell_p = \{\mathfrak{p} \in P\ell, \ \mathfrak{p} | p\}. \tag{2}$$

[15] L'application directe du théorème 1.5 donnerait $W \simeq \widehat{A}$, soit $W_\chi \simeq (\widehat{A})_\chi$, mais l'involution du miroir se traduit alors par $(\mathrm{Hom}(A, \mu_p))_\chi = \mathrm{Hom}(A_{\chi^*}, \mu_p)$ (cf. définition 1.3).

Par commodité, on utilise les valuations $\mathfrak{p}$-adiques $v_\mathfrak{p}$ de K, $\mathfrak{p} \in P\ell$, sachant que pour $\mathfrak{p} \in P\ell^r_\infty$ et $x \in K^\times$, $v_\mathfrak{p}(x) = 0$ (resp. 1) si $\sigma_\mathfrak{p}(x) > 0$ (resp. $\sigma_\mathfrak{p}(x) < 0$), où $\sigma_\mathfrak{p}$ est le plongement réel de K associé à $\mathfrak{p}$, les éléments de $P\ell^c_\infty$ n'intervenant pas. On convient, comme dans [J1], [M], que les places à l'infini réelles ne se ramifient pas : dans une extension L/K, un élément de $P\ell^r_\infty$ est soit totalement décomposé, soit de degré résiduel égal à 2 (on parle alors de complexification).

(ii) **Groupes de nombres et d'idéaux.** Soit T un ensemble fini de places finies de K et soit Δ_∞ un sous-ensemble de $P\ell^r_{K,\infty}$; on désigne par $\mathfrak{f}$ un module[16] de K construit sur T (i.e. un élément du monoïde engendré par T). On désigne par :

$K_T^{\times\Delta_\infty} = \{x \in K^\times,\ v_\mathfrak{p}(x) = 0 \text{ pour tout } \mathfrak{p} \in T \cup \Delta_\infty\}$, le sous-groupe de $K^\times$ formé des éléments étrangers à T et positifs sur Δ_∞,

$K_T^{\times\mathrm{pos}} = K_T^{\times P\ell^r_\infty}$, le sous-groupe des éléments totalement positifs de $K_T^\times$,

$K_{T,\mathfrak{f}}^{\times\Delta_\infty} = \{x \in K_T^{\times\Delta_\infty},\ x \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}\}$,

$I_K = I$, le groupe des idéaux fractionnaires non nuls de K,

$I_{K,T} = I_T$, le sous-groupe de I formé des idéaux étrangers à T,

$P_K = P = \{(x),\ x \in K^\times\}$, le groupe des idéaux principaux,

$P_{K,T}^{\Delta_\infty} = P_T^{\Delta_\infty} = \{(x),\ x \in K_T^{\times\Delta_\infty}\}$,

$P_K^{\mathrm{pos}} = P^{\mathrm{pos}} = P^{P\ell^r_\infty} = \{(x),\ x \in K^{\times\mathrm{pos}}\}$,

$P_{K,T,\mathfrak{f}}^{\Delta_\infty} = P_{T,\mathfrak{f}}^{\Delta_\infty} = \{(x),\ x \in K_{T,\mathfrak{f}}^{\times\Delta_\infty}\}$; en particulier, $P_{T,\mathfrak{f}} = P_{T,\mathfrak{f}}^{\mathrm{ord}}$ (resp. $P_{T,\mathfrak{f}}^{P\ell^r_\infty} = P_{T,\mathfrak{f}}^{\mathrm{pos}}$) est le rayon modulo $\mathfrak{f}$ qui correspondra au "sens ordinaire" (resp. au "sens restreint").

(iii) **Groupes de classes.** Soient T et S deux ensembles finis disjoints de places de K ; on suppose que T ne contient pas de places à l'infini et que S ne contient pas de places à l'infini complexes, et on pose (cf. (1) et (2)) :

$$\begin{aligned} T_p &= T \cap P\ell_{K,p},\ S_p = S \cap P\ell_{K,p}, \\ S_0 &= S \cap P\ell_{K,0},\ S_\infty = S \cap P\ell^r_{K,\infty}. \end{aligned} \tag{3}$$

Soit $\mathfrak{f}$ un module de K construit sur T ; on désigne par :

$$C\ell^S_{K,\mathfrak{f}} = C\ell^S_\mathfrak{f} \tag{4}$$

le p-Sylow de

$$I_T / P_{T,\mathfrak{f}}^{\Delta_\infty} \langle S_0 \rangle, \tag{4'}$$

où $\Delta_\infty = P\ell^r_\infty - S_\infty$ et où $\langle S_0 \rangle$ désigne le sous-groupe de I engendré par S_0. Le groupe $C\ell^S_\mathfrak{f}$ s'appelle le p-groupe des S-classes de rayon modulo $\mathfrak{f}$ de K. Par exemple, si $T = S = \emptyset$, $C\ell^\emptyset_{(1)} = C\ell^{\mathrm{res}}$ est le p-groupe des classes au sens

[16] Appelé également cycle dans la littérature sur le corps de classes, dans la mesure où l'on choisit de faire intervenir les places à l'infini au niveau de la ramification, ce qui n'est pas le cas ici.

restreint ; de même, $C\ell_{\mathfrak{f}}^{\emptyset} = C\ell_{\mathfrak{f}}^{\text{res}}$ est le p-groupe des classes de rayon modulo $\mathfrak{f}$ au sens restreint. Si $S = P\ell_\infty^r$, alors $C\ell_{(1)}^{P\ell_\infty^r} = C\ell^{\text{ord}}$ et $C\ell_{\mathfrak{f}}^{P\ell_\infty^r} = C\ell_{\mathfrak{f}}^{\text{ord}}$ sont respectivement le p-groupe des classes au sens ordinaire et le p-groupe des classes de rayon modulo $\mathfrak{f}$ au sens ordinaire.

Si $S_\infty = \emptyset$ (resp. $P\ell_\infty^r$), on notera aussi, par commodité, en termes de S_0-classes :

$$C\ell_{\mathfrak{f}}^S = C\ell_{\mathfrak{f}}^{S_0\text{res}} \text{ (resp. } C\ell_{\mathfrak{f}}^{S_0\text{ord}}). \tag{5}$$

(iv) **Groupes d'unités.** On désigne par :

$$E_K^S = E^S = \{\varepsilon \in K^\times,\ v_{\mathfrak{p}}(\varepsilon) = 0,\ \forall \mathfrak{p} \notin S\}, \tag{6}$$

le groupe des S-unités de K ($\varepsilon \in E^S$ est donc positive sur $P\ell_\infty^r - S_\infty$ et de signature arbitraire sur S_∞),

$$E_{K,\mathfrak{f}}^S = E_{\mathfrak{f}}^S = \{\varepsilon \in E^S,\ \varepsilon \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}\}. \tag{6'}$$

Par exemple, si $S = \emptyset$, $E^\emptyset = E^{\text{pos}}$ est le groupe des unités totalement positives de K. Si $S = P\ell_\infty^r$, $E^{P\ell_\infty^r} = E^{\text{ord}}$ est le groupe des unités au sens ordinaire ; plus généralement, si $S_\infty = \emptyset$ (resp. $P\ell_\infty^r$), $E^S = E^{S_0\text{pos}}$ (resp. $E^{S_0\text{ord}}$) est le groupe des S_0-unités totalement positives (resp. au sens ordinaire).

Remarque 5.2. Ne pas confondre le principe de notation utilisé dans (ii) pour certains sous-groupes de $K^\times$, et celui utilisé ici au niveau des unités ; dans le premier cas, il s'agit de définir les sous-groupes de $K^\times$ associés aux rayons définissant les groupes de classes correspondants, et pour lesquels on fait apparaître explicitement la ramification (T) et le type de complexification ($\Delta_\infty = P\ell_\infty^r - S_\infty$), allant du sens ordinaire au sens restreint ; dans le second cas, les groupes d'unités sont associés, au contraire, au-delà du cas limite $E^\emptyset = E^{\text{pos}}$, à la décomposition ($S$) imposée. Il est alors normal que, au niveau de $P\ell_\infty^r$, la S_∞-décomposition soit équivalente à la Δ_∞-complexification.

Enfin, lorsqu'un ensemble de places est vide ou un module égal à (1), le symbole $\emptyset$ ou (1) sera systématiquement omis dans la notation correspondante (en particulier, une notation du type $C\ell$ (resp. E) désigne un groupe de classes au sens restreint (resp. un groupe d'unités totalement positives), ce que nous notons néanmoins par $C\ell^{\text{res}}$ (resp. E^{pos}) pour éviter toute confusion, bien que ceci soit surabondant) [17].

(v) **Extensions.** On désigne par :

$$H_{K,T}^S = H_T^S,$$

[17] De plus la distinction $C\ell^{\text{res}}$, $C\ell^{\text{ord}}$ (resp. E^{pos}, E^{ord}) n'est utile que dans le cas $p = 2$; dans le cas $p \neq 2$ on peut supposer que tout est pris au sens ordinaire.

la p-extension abélienne maximale T-ramifiée, S-décomposée de K (on rappelle que T-ramifié signifie non ramifié en dehors de T, et S-décomposé signifie la totale décomposition de S).

Pour $T = S = \emptyset$, $H = H^{\mathrm{res}}$ est le p-corps de classes de Hilbert de K au sens restreint (i.e. la p-extension abélienne maximale non ramifiée pour les places finies). Si $S = P\ell_\infty^r$, $H^{P\ell_\infty^r} = H^{\mathrm{ord}}$ est le p-corps de classes de Hilbert de K au sens ordinaire (i.e. la p-extension abélienne maximale non ramifiée, non complexifiée).

Si $T_p = \emptyset$ (situation modérée), $H_T = H_T^{\mathrm{res}}$ est donné par le p-corps de rayon modulo $\prod_{\mathfrak{p}\in T} \mathfrak{p}$ au sens restreint (cf. [M, § 1.1.2]). Si $T_p \neq \emptyset$, alors $H_T = H_T^{\mathrm{res}}$ peut être infini (c'est le cas si $T_p = P\ell_p$ car H_T^{res} contient au moins la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique) ; on a alors le résultat suivant :

Lemme 5.3. *Si $\mu_p \subset K$, la p-sous-extension maximale élémentaire L_T^{res} de H_T^{res}/K est contenue dans le corps de rayon modulo*

$$\mathfrak{n} = \prod_{\mathfrak{p}\in T-T_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p}\in T_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1}$$

au sens restreint. [18]

Démonstration. Reprenons les notations "locales" introduites au début de la section 2. D'après le corps de classes global, le conducteur de L_T^{res}/K est le produit des conducteurs normiques locaux $\mathfrak{p}^{h_\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in T$. Comme pour $\mathfrak{p} \in T_p$ on a $U_\mathfrak{p}^{(pe_\mathfrak{p}+1)} \subseteq U_\mathfrak{p}^{(1)p}$ (cf. remarque 2.5, (iii)) , et pour $\mathfrak{p} \in T-T_p$ on a $U_\mathfrak{p}^{(1)} \subseteq U_\mathfrak{p}^{(1)p}$, le lemme en résulte (il résulte aussi des calculs kummériens des conducteurs (cf. remarque 2.5, (iv)).

Remarque 5.4. Lorsque K contient μ_p, $\overline{K}_\mathfrak{p}^\times$ contient un groupe cyclique d'ordre p, pour tout $\mathfrak{p} \in P\ell_0 - P\ell_p$, et on a donc $|\overline{K}_\mathfrak{p}^\times| = N\mathfrak{p} - 1 \equiv 0 \mod p$; ainsi toute place finie peut effectivement intervenir dans T.

Ces définitions étant posées, le corps de classes nous donne l'isomorphisme :

$$\mathrm{Gal}(H_T^S/K) \simeq C\ell_T^S = \varprojlim_{\mathfrak{f}} C\ell_\mathfrak{f}^S,$$

la limite projective étant prise sur le monoïde des modules $\mathfrak{f}$ construits sur T.

Nous allons maintenant préciser le cadre dans lequel nous nous situerons définitivement :

---

[18] On rappelle que pour $\mathfrak{p}|p$, $e_\mathfrak{p}$ est l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ dans $K/\mathbb{Q}(\mu_p)$.

Définitions et hypothèses 5.5. On suppose que K contient μ_p pour le nombre premier p. Soit alors G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p. On prend, comme p-extension abélienne élémentaire L de K, l'extension L_T^S fixée par $\mathrm{Gal}(H_T^S/K)^p$ et on suppose les ensembles T et S stables par G ; on pose :

$$A_T^S = \mathrm{Gal}(L_T^S/K),\ W_T^S = \mathrm{Rad}(L_T^S/K) \ ;$$

on a donc l'isomorphisme canonique de G-modules :

$$A_T^S \simeq C\ell_T^S/(C\ell_T^S)^p \simeq C\ell_{\mathfrak{n}}^S/(C\ell_{\mathfrak{n}}^S)^p,$$

où :

$$\mathfrak{n} = \prod_{\mathfrak{p}\in T-T_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p}\in T_p} \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1} \quad \text{(cf. lemme 5.3).}$$

En faisant intervenir l'ensemble $\mathfrak{X}_p(G)$ des caractères $\mathbb{Q}_p$-irréductibles de G, et en utilisant le corollaire 4.5 au théorème 4.4, il vient le résultat intermédiaire suivant, qui constitue l'un des deux points essentiels du "Spiegelungssatz" :

Proposition 5.6. *Sous les hypothèses et notations précédentes, on a*

$$\mathrm{rg}_\chi(W_T^S) = \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^S) = \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{\mathfrak{n}}^S),$$

pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$.

Le théorème de réflexion proviendra alors d'une analyse "classes et unités" du radical W_T^S, compte tenu du fait que L/K est T-ramifiée, S-décomposée, p-élémentaire maximale, et qui sera l'objet du paragraphe ci-après.

La démonstration de la proposition suivante est immédiate à partir du théorème (2.1) (on rappelle que $T \subset P\ell_{K,0}$, $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell^r_{K,\infty}$, $T \cap S = \emptyset$, et que l'on a posé $T_p = T \cap P\ell_{K,p}$, $S_p = S \cap P\ell_{K,p}$; ici le groupe G n'intervient pas) :

Proposition 5.7. *Soit* $w \in K^\times/K^{\times p}$ *et soit* $\alpha_0 \in w$:
(i) $K(\sqrt[p]{w})/K$ *est* T*-ramifiée si et seulement si les 2 conditions suivantes sont réalisées (pour* α_0 *choisi étranger à* $P\ell_p - T_p$*) :*
(i)$_1$ $(\alpha_0) = \mathfrak{a}_0^p\mathfrak{a}_T,\ \mathfrak{a}_0 \in I_{P\ell_p - T_p},\ \mathfrak{a}_T \in \langle T\rangle$;
(i)$_2$ *pour tout* $\mathfrak{p} \in P\ell_p - T_p$, *il existe* $\xi_{\mathfrak{p}} \in K^\times$ *tel que* $\alpha_0 \equiv \xi_{\mathfrak{p}}^p \bmod \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}}$.
(ii) $K(\sqrt[p]{w})/K$ *est* S*-décomposée si et seulement si les 3 conditions suivantes sont réalisées (pour* α_0 *choisi étranger à* S_0*) :*
(ii)$_1$ *pour tout* $\mathfrak{p} \in S_0 - S_p$, *il existe* $\xi_{\mathfrak{p}} \in K^\times$ *tel que* $\alpha_0 \equiv \xi_{\mathfrak{p}}^p \bmod \mathfrak{p}$;
(ii)$_2$ *pour tout* $\mathfrak{p} \in S_p$, *il existe* $\xi_{\mathfrak{p}} \in K^\times$ *tel que* $\alpha_0 \equiv \xi_{\mathfrak{p}}^p \bmod \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1}$;
(ii)$_3$ *on a* $\sigma_{\mathfrak{p}}(\alpha_0) > 0$, *pour tout* $\mathfrak{p} \in S_\infty$ *(dans le cas* $p = 2$*).*

Approche du théorème général de réflexion.

Notations 5.8. Les ensembles de places G-invariants $T \subset P\ell_{K,0}$, $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell^r_{K,\infty}$, de K, étant fixés tels que $T \cap S = \emptyset$, on pose :

$$\Delta_p = P\ell_p - T_p - S_p,\ \Delta_\infty = P\ell^r_\infty - S_\infty,$$

$$T^* = T \cup \Delta_\infty,\ S^* = S_0 \cup \Delta_p,\ \mathfrak{m}^* = \prod_{\mathfrak{p} \in S_0 - S_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1} \prod_{\mathfrak{p} \in \Delta_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}}.$$

Soit alors $w \in W^S_T$ représenté par α_0 pris étranger à $(S_0 - S_p) \cup (P\ell_p - T_p) = S^*$; par le théorème d'approximation, il existe $\xi \in K^\times$, étranger à S^*, tel que l'on ait :

$$\alpha = \alpha_0 \xi^{-p} \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}^*. \tag{7}$$

Comme par ailleurs $\sigma_\mathfrak{p}(\alpha) > 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in S_\infty$ (si $p = 2$) et $(\alpha) = \mathfrak{a}^p \mathfrak{a}_T$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0(\xi^{-1}) \in I_{S^*}$, $\mathfrak{a}_T \in \langle T \rangle$, on constate que l'on a :

$$\mathfrak{a}^p \in P^{S_\infty}_{S^*,\mathfrak{m}^*} \langle T \rangle \tag{7'}$$

(cf. définition 5.1, (ii)) ce qui nous dit (cf. définition 5.1, (iii)) que la classe de $\mathfrak{a}^p$ dans $C\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}$ est triviale.

Si β est un autre représentant analogue à α, on a $\beta = \alpha x^p$, $x \in K^\times_{S^*}$, avec $x^p \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}^*$; si l'on pose $(\beta) = \mathfrak{b}^p \mathfrak{b}_T$, $\mathfrak{b} \in I_{S^*}$, $\mathfrak{b}_T \in \langle T \rangle$, il vient $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(x)\mathfrak{c}_T$, avec $\mathfrak{c}_T \in \langle T \rangle$.

Introduisons alors :

$$\Lambda_{\mathfrak{m}^*} = \{x \in K^\times_{S^*},\ x^p \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}^*\}, \tag{8}$$

et

$$\dot{C\ell}^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} = \{c\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}(x),\ x \in \Lambda_{\mathfrak{m}^*}\} \subseteq C\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}, \tag{9}$$

où l'on rappelle que $C\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} = I_{S^*}/P^{P\ell^r_\infty - T^*_\infty}_{S^*,\mathfrak{m}^*}\langle T^*_0 \rangle = I_{S_0 \cup \Delta_p}/P^{S_\infty}_{S_0 \cup \Delta_p,\mathfrak{m}^*}\langle T \rangle$ (cf. définition 5.1, (iii), (4), (4')) et où $c\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}$ est l'application canonique $I_{S^*} \longrightarrow C\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}$. Alors en associant à $w \in W^S_T$ la classe, dans $C\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}/\dot{C\ell}^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}$, de l'idéal $\mathfrak{a}$, on définit un homomorphisme de $\mathbb{F}_p[G]$-modules de la forme :

$$W^S_T \longrightarrow C\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}[p]/\dot{C\ell}^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} \quad \text{(cf. (7'))}.$$

On obtient alors facilement le résultat partiel suivant [19] :

---

[19] On peut trouver dans [J1, chap. 2, §2.2] une approche, utilisant les "infinitésimaux" du corps K, destinée simplement à montrer la dualité qui existe entre les extensions H^S_T et $H^{T^*}_{S^*}$, au moins lorsque $\Delta_p = \emptyset$; ici le problème est compliqué par le fait que l'on calcule les rangs correspondants.

Proposition 5.9. *Sous les hypothèses et les notations 5.8, on obtient la suite exacte de $\mathbb{F}_p[G]$-modules :*

$$1 \longrightarrow E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} K^{\times p}/K^{\times p} \longrightarrow W^S_T \longrightarrow C\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}[p]/\dot{C\ell}^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} \longrightarrow 1,$$

où :

$$\dot{C\ell}^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} = \{c\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}(x),\ x \in \Lambda_{\mathfrak{m}^*}\},\ \textit{avec}\ \Lambda_{\mathfrak{m}^*} = \{x \in K^\times_{S^*},\ x^p \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}^*\}.$$

Considérons le quotient $\Lambda_{\mathfrak{m}^*}/K^{\times S_\infty}_{S^*,\mathfrak{m}^*}$; si à $x \in \Lambda_{\mathfrak{m}^*}$ on associe $c\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}(x)$, on obtient la suite exacte :

$$1 \longrightarrow E^{T\mathrm{ord}} \cap \Lambda_{\mathfrak{m}^*}/E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} \longrightarrow \Lambda_{\mathfrak{m}^*}/K^{\times S_\infty}_{S^*,\mathfrak{m}^*} \longrightarrow \dot{C\ell}^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} \longrightarrow 1,$$

qui peut s'écrire encore :

$$(10) \qquad 1 \longrightarrow (E^{T\mathrm{ord}}/E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*})[p] \longrightarrow (K^\times_{S^*}/K^{\times S_\infty}_{S^*,\mathfrak{m}^*})[p] \longrightarrow \dot{C\ell}^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} \longrightarrow 1\ ;$$

ensuite, le groupe $K^\times_{S^*}/K^{\times S_\infty}_{S^*,\mathfrak{m}^*}$ peut être identifié, grâce au théorème d'approximation, et par plongement diagonal, à :

$$(11) \qquad U_{S^*} \times U_{S_\infty}/U_{S^*,\mathfrak{m}^*} \times U^{(1)}_{S_\infty} \simeq U_{S^*}/U_{S^*,\mathfrak{m}^*} \times U_{S_\infty}/U^{(1)}_{S_\infty},$$

où :

$$(12) \qquad \begin{aligned} U_{S^*} &= \prod_{\mathfrak{p} \in S^*} U_{\mathfrak{p}},\ U_{S_\infty} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} \mathbb{R}^\times, \\ U_{S^*,\mathfrak{m}^*} &= \prod_{\mathfrak{p} \in S^*} U_{\mathfrak{p}}^{(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}^*))},\ U^{(1)}_{S_\infty} = \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} \mathbb{R}^{\times +}. \end{aligned}$$

Les applications précédentes sont des homomorphismes canoniques de G-modules dès lors que la loi de G-module sur $U_{S^*} \times U_{S_\infty}$ est définie par continuité à partir de celle de $K^\times_{S^*}$.

On obtient alors (à partir de la proposition 5.9, de (10), de (11), et des résultats du § 3.5 de la section 3 :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_\chi(W^S_T) &= \mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} K^{\times p}/K^{\times p}) + \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}) - \mathrm{rg}_\chi(\dot{C\ell}^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}) \\ &= \mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} K^{\times p}/K^{\times p}) + \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}) \\ &\qquad -\mathrm{rg}_\chi(U_{S^*} \times U_{S_\infty}/U_{S^*,\mathfrak{m}^*} \times U^{(1)}_{S_\infty}) + \mathrm{rg}_\chi(E^{T\mathrm{ord}}/E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*})\ ; \end{aligned}$$

or on a :

$$E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} K^{\times p}/K^{\times p} \simeq E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}/E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} \cap K^{\times p} = E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}/(E^{T\mathrm{ord}})^p \cap E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*},$$

et la suite exacte :

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*}/(E^{T\mathrm{ord}})^p \cap E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} &\longrightarrow E^{T\mathrm{ord}}/(E^{T\mathrm{ord}})^p \\ &\longrightarrow E^{T\mathrm{ord}}/(E^{T\mathrm{ord}})^p E^{T^*}_{\mathfrak{m}^*} \longrightarrow 1, \end{aligned}$$

conduit au résultat suivant :

Proposition 5.10. *Sous les hypothèses 5.5 et notations 5.8, on obtient, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:*

$$\mathrm{rg}_\chi(W_T^S) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) + \mathrm{rg}_\chi(E^{T\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_\chi(U_{S^*}/U_{S^*,\mathfrak{m}^*} \times U_{S_\infty}/U_{S_\infty}^{(1)}).$$

Il nous reste donc à calculer $\mathrm{rg}_\chi(E^{T\mathrm{ord}})$ et $\mathrm{rg}_\chi(U_{S^*}/U_{S^*,\mathfrak{m}^*} \times U_{S_\infty}/U_{S_\infty}^{(1)})$ pour parvenir à l'énoncé principal.

Définitions 5.11. (i) On pose, pour $T \subset P\ell_{K,0}$, $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell_{K,\infty}^r$, $T \cap S = \emptyset$, T et S stables par G, et pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:

$$\rho_\chi(T,S) = \mathrm{rg}_\chi(E_K^{T\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_\chi(U_{S^*}/U_{S^*,\mathfrak{m}^*} \times U_{S_\infty}/U_{S_\infty}^{(1)}).$$

(ii) Pour chaque ensemble Σ de places de K, stable par G, on désigne par Σ_k l'ensemble des places de $k = K^G$ en-dessous des éléments de Σ, et, pour éviter les confusions, on notera de préférence v les places de k et $\mathfrak{p}$ celles de K.

(iii) Pour $v \in P\ell_k$ et $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, on désigne par H_v^χ le groupe de décomposition dans K^χ/k d'une place quelconque $\mathfrak{p}_0$ de K^χ au-dessus de v, et on pose :

$$\rho_{v,\chi} = \frac{1}{|H_v^\chi|} \sum_{t \in H_v^\chi} \psi(t),\ \psi|\chi \quad \text{(cf. 3.9 et 3.10, (i))}$$

(iv) On désigne, de manière générale, par $\delta_{u,v}$ le symbole de Kronecker de u et v.

Proposition 5.12. *Sous l'hypothèse $\mu_p \subset K$, on a les expressions suivantes, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:*

$$\mathrm{rg}_\chi(E^{T\mathrm{ord}}) = \sum_{v \in P\ell_{k,\infty} \cup T_k} \rho_{v,\chi} + \delta_{\omega,\chi} - \delta_{1,\chi}\ ;$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_\chi(U_{S^*}/U_{S^*,\mathfrak{m}^*} \times U_{S_\infty}/U_{S_\infty}^{(1)}) &= \sum_{v \in S_{0,k} - S_{p,k}} \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}|v} U_\mathfrak{p}/U_\mathfrak{p}^{(1)}\Big) \\ &+ \sum_{v \in S_{p,k}} \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}|v} U_\mathfrak{p}^{(1)}/U_\mathfrak{p}^{(pe_\mathfrak{p}+1)}\Big) + \sum_{v \in \Delta_{p,k}} \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}|v} U_\mathfrak{p}^{(1)}/U_\mathfrak{p}^{(pe_\mathfrak{p})}\Big) \\ &+ \sum_{v \in S_{\infty,k}} \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}|v} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times +}\Big),\end{aligned}$$

avec :

(α) $\mathrm{rg}_\chi\big(\prod_{\mathfrak{p}|v} U_\mathfrak{p}/U_\mathfrak{p}^{(1)}\big) = \rho_{v,\chi^*}$, *pour* $v \in P\ell_{k,0} - P\ell_{k,p}$,

(β) $\mathrm{rg}_\chi\big(\prod_{\mathfrak{p}|v} U_\mathfrak{p}^{(1)}/U_\mathfrak{p}^{(pe_\mathfrak{p}+1)}\big) = \rho_{v,\chi^*} + \psi(1)[k_v : \mathbb{Q}_p]$, *pour* $v \in P\ell_{k,p}$,

(γ) $\mathrm{rg}_\chi(\prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})}) = \psi(1)[k_v : \mathbb{Q}_p]$, *pour* $v \in P\ell_{k,p}$,

(δ) $\mathrm{rg}_\chi(\prod_{\mathfrak{p}|v} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times +}) = \delta_{2,p}\psi(1)$, *pour* $v \in P\ell_{k,\infty}^r$.

Démonstration. Le premier point résulte du théorème de Dirichlet "galoisien", dont nous donnons une démonstration à la section 6, par commodité pour le lecteur (cf. théorème 6.2 avec $F = E^{T\mathrm{ord}}$ et $\delta_p(F) = 1$).

Avant de démontrer le second point, établissons le lemme suivant que nous utiliserons à plusieurs reprises :

Lemme 5.13. *Soient* $v \in P\ell_k$ *et* H_v *le groupe de décomposition d'une place* $\mathfrak{p}_0$ *de* K *au-dessus de* v, *et soit* V'_{H_v} *la représentation* $\prod_{\mathfrak{p}|v} \mu_p = \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}[p]$ *pour laquelle* G *opère via le plongement diagonal (partout dense) :*

$$\{x \in K^\times,\ v_{\mathfrak{p}}(x) = 0\ \forall \mathfrak{p}|v\} \to \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}.$$

Alors $V'_{H_v} \simeq \mu_p \otimes V_{H_v}$, *où* V_{H_v} *est la représentation de permutation de* G *modulo* H_v [20] *; par conséquent, pour tout* $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, *on a* $\mathrm{rg}_\chi(V'_{H_v}) = \rho_{v,\omega^{-1}\chi} = \rho_{v,\chi^*}$ *(cf. définitions 5.11,* (iii)*)* [21].

Démonstration. Soit ζ un générateur fixé de μ_p ; on vérifie alors facilement que l'application de $\mu_p \otimes \sum_{\mathfrak{p}|v} \mathbb{F}_p\ \mathfrak{p}$ dans $\prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}[p]$ qui à $\zeta \otimes (\sum_{\mathfrak{p}|v} a_{\mathfrak{p}}\ \mathfrak{p})$ associe $(\zeta^{a_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p}|v}$ est un isomorphisme de G-modules.

On a $U_{S^*}/U_{S^*,\mathfrak{m}^*} \simeq \prod_{v\in S_k^*} \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}^*))}$, et on est ramené à calculer le χ-rang des représentations $V_v = \mathbb{F}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}^*))}$, $v \in S_k^*$. De même, $U_{S_\infty}/U_{S_\infty}^{(1)} \simeq \prod_{v\in S_{\infty,k}} \prod_{\mathfrak{p}|v} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times+}$ conduit à considérer $V_v = \mathbb{F}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times+}$ lorsque $p = 2$.

Soit $v \in S_k^* \cup S_{\infty,k} = (S_{0,k} - S_{p,k}) \cup S_{p,k} \cup \Delta_{p,k} \cup S_{\infty,k}$, et soit H_v le groupe de décomposition d'une place $\mathfrak{p}_0$ de K au-dessus de v ; on constate que les représentations V_v (de semi-localisation) sont induites par la représentation de H_v correspondant au facteur d'indice $\mathfrak{p}_0$, mais nous allons voir qu'elles s'expriment essentiellement à l'aide des représentations V_{H_v} et V'_{H_v} du lemme 5.13. Nous allons distinguer 4 cas :

---

[20] On remarque que V'_{H_v} est induite par la $\mathbb{F}_p$-représentation μ_p de H_v, ce qui permet aussi le calcul de son χ-rang (cf. [S1, §§ 3.3, 7.2]).

[21] Les caractères φ' et φ, de V'_{H_v} et V_{H_v}, sont liés par la relation $\varphi' = \omega\varphi$ et non par l'involution du miroir ; mais comme $\omega^{-1}\chi = (\chi^*)^{-1}$, on a l'égalité indiquée.

(α) $v \in S_{0,k} - S_{p,k}$. Dans ce cas $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}^*) = 1$ et $V_v = \mathbb{F}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(1)} \simeq \prod_{\mathfrak{p}|v} \overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}/\overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times p}$ a même caractère que $V' = \prod_{\mathfrak{p}|v} \overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}[p] \simeq \prod_{\mathfrak{p}|v} \langle \overline{\zeta} \rangle$, où ζ engendre μ_p ; donc, d'après le lemme 5.13, on a :

$$\mathrm{rg}_{\chi}(\prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(1)}) = \rho_{v,\chi^*} \; ; \tag{13}$$

(β) $v \in S_{p,k}$. Dans ce cas, $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}^*) = pe_{\mathfrak{p}} + 1$ et d'après la remarque 2.5, (iii), on a $U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}}+1)} \subseteq U_{\mathfrak{p}}^{(1)p}$; donc on a :

$$V_v = \mathbb{F}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}}+1)} \simeq \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/U_{\mathfrak{p}}^{(1)p}.$$

Si $\mu_{\mathfrak{p}}$ désigne le p-groupe de torsion de $U_{\mathfrak{p}}^{(1)}$ (qui est non trivial car $\mu_p \subset K$) , on a :

$$V_v \simeq (\mathbb{F}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} \mu_{\mathfrak{p}}) \oplus (\mathbb{F}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/\mu_{\mathfrak{p}}) = V' \oplus V''.$$

La représentation $V' = \mathbb{F}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} \mu_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à V'_{H_v}. Comme $U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/\mu_{\mathfrak{p}}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre, le caractère de V'' s'obtient par celui de $\mathbb{Q}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/\mu_{\mathfrak{p}}$ (cf. [S1, § 15.5] ou les rappels du § 3.2) ; or on sait que, via le logarithme p-adique, on peut identifier $\mathbb{Q}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/\mu_{\mathfrak{p}}$ à $\mathbb{Q}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} O_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}|v} K_{\mathfrak{p}} \simeq k_v \otimes K \simeq k_v \otimes k[G]$ (théorème de la base normale) ; on obtient pour V'' la représentation régulière de G sur k_v ; comme on a $k_v[G] \simeq k_v \otimes \mathbb{Q}_p[G]$, on obtient finalement :

$$\mathrm{rg}_{\chi}(\prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}}+1)}) = \rho_{v,\chi^*} + \psi(1)[k_v : \mathbb{Q}_p], \; \psi|\chi. \tag{14}$$

(γ) $v \in \Delta_{p,k}$. On a

$$v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}^*) = pe_{\mathfrak{p}} \; , \; V_v = \mathbb{F}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})} \simeq \prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/U_{\mathfrak{p}}^{(1)p}U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})}$$

et la suite exacte :

$$1 \longrightarrow U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})}/U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})} \cap U_{\mathfrak{p}}^{(1)p} \longrightarrow U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/U_{\mathfrak{p}}^{(1)p} \longrightarrow U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/U_{\mathfrak{p}}^{(1)p}U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})} \longrightarrow 1.$$

D'après la proposition 2.7, on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})} \cap U_{\mathfrak{p}}^{(1)p} \longrightarrow U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})} \xrightarrow{\tau} \mu_p \longrightarrow 1 ;$$

$$\alpha = 1 + p(1-\zeta)\eta \longmapsto \zeta^{\mathrm{tr}_{\overline{K}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_p}(\overline{\eta})}$$

si $t \in H_v$, on a :

$$t(\alpha) = 1 + p(1-\zeta^{\omega(t)})t(\eta) = 1 + p(1-\zeta)\frac{1-\zeta^{\omega(t)}}{1-\zeta}t(\eta) \equiv$$

$$1 + p(1-\zeta)\omega(t)t(\eta) \bmod p(1-\zeta)\mathfrak{p},$$

et $\tau(t(\alpha)) = \zeta^{\mathrm{tr}_{\overline{K}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_p}\left(\overline{\omega(t)}\ \overline{t(\eta)}\right)}$;
or $\overline{\omega(t)} \in \mathbb{F}_p$, d'où $\tau(t(\alpha)) = \zeta^{\overline{\omega(t)}\,\mathrm{tr}_{\overline{K}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_p}(\overline{\eta})} = (\tau(\alpha))^t$; donc τ est un homomorphisme de H_v-modules.

Le caractère de la représentation

$$\prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})}/U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})} \cap U_{\mathfrak{p}}^{(1)p} \simeq \prod_{\mathfrak{p}|v} \mu_p$$

est donc l'induit de ω, et on a (en utilisant à nouveau (β)) :

$$\mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/U_{\mathfrak{p}}^{(1)p}U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})}\Big) = \psi(1)[k_v : \mathbb{Q}_p]. \tag{15}$$

(δ) $v \in S_{\infty,k}$. Comme $S_\infty \subseteq P\ell^r_{K,\infty}$ (i.e. $H_v = 1$), pour $p = 2$ la représentation $\prod_{\mathfrak{p}|v} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times +}$ est la représentation régulière.

D'où la proposition.

Le lemme suivant donne une relation utile en pratique :

Lemme 5.14. *On a*

$$\sum_{v \in P\ell_{k,\infty}} (\rho_{v,\chi} + \rho_{v,\chi^*}) = \psi(1)[k : \mathbb{Q}] + \delta_{2,p}\psi(1)r_1(k).$$

Démonstration. En effet, on a $\rho_{v,\chi} + \rho_{v,\chi^*} = \frac{1}{2}(\psi(1) + \psi(c_v) + \psi(1) + \psi(c_v)\omega(c_v))$, où c_v engendre H_v ; si $c_v = 1$, cette somme vaut $2\psi(1)$, sinon, si $c_v \neq 1$ (ce qui suppose $p \neq 2$), on a $\omega(c_v) = -1$, et la somme ci-dessus vaut $\psi(1)$; on a donc, en posant $r_1^c(k) = |P\ell^{rc}_{k,\infty}|$, $\sum_{v\in P\ell_{k,\infty}}(\rho_{v,\chi}+\rho_{v,\chi^*}) - \psi(1)[k:\mathbb{Q}] = \psi(1)(2(r_2(k)+r_1(k)-r_1^c(k))+r_1^c(k)) - \psi(1)(r_1(k)+2r_2(k)) = \psi(1)(r_1(k) - r_1^c(k)) = \delta_{2,p}\psi(1)r_1(k)$, comme on le vérifie immédiatement ; d'où le lemme.

Corollaire 5.15. *On a (cf. définitions 5.11) pour tout* $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:

$$\rho_\chi(T,S) = \sum_{v \in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi} + \sum_{v \in T_k} \rho_{v,\chi} + \delta_{\omega,\chi} - \delta_{1,\chi} - \sum_{v \in S_{0,k}} \rho_{v,\chi^*} -$$

$$\psi(1) \sum_{v \in S_{p,k} \cup \Delta_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p] - \delta_{2,p}\psi(1)|S_{\infty,k}| =$$

$$\sum_{v \in T_k} \rho_{v,\chi} + \psi(1) \sum_{v \in T_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p] - \sum_{v \in S_{0,k}} \rho_{v,\chi^*} + \delta_{\omega,\chi} - \delta_{1,\chi} -$$

$$\sum_{v \in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi^*} + \delta_{2,p}\psi(1)|\Delta_{\infty,k}|, \ \psi|\chi,$$

où :

$$\rho_{v,\chi} \ (\textit{resp. } \rho_{v,\chi^*}) = \frac{1}{|H_v^\chi|} \sum_{t \in H_v^\chi} \psi(t) \ (\textit{resp. } \frac{1}{|H_v^{\chi^*}|} \sum_{t \in H_v^{\chi^*}} \omega\psi^{-1}(t)), \ \psi|\chi.$$

Démonstration. La première expression résulte directement de la proposition 5.12, et la seconde s'obtient en utilisant le lemme 5.14 et la relation $\sum_{v \in P\ell_{k,p}} [k_v : \mathbb{Q}_p] = [k : \mathbb{Q}]$.

Remarques 5.16. (i) Pour $p \neq 2$, on a $\sum_{v \in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi} = \psi(1) r_2(k) + \sum_{v \in P\ell^r_{k,\infty}} \rho_{v,\chi}$, avec $\rho_{v,\chi} = \psi(1)$ si $H_v^\chi = 1$ (i.e. si $\sigma_v(K^\chi)$ est réel), $\rho_{v,\chi} = \frac{1}{2}(\psi(1) + \psi(c_v^\chi))$ si $H_v^\chi = \langle c_v^\chi \rangle \neq 1$ (i.e. si $\sigma_v(K^\chi)$ est imaginaire) ; pour $p = 2$, on a $\sum_{v \in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi} = \psi(1)(r_2(k) + r_1(k))$.
(ii) Lorsque l'on fait $G = 1$, ceci définit l'unique quantité :

$$\rho_p(T,S) = r_2(K) + r_1(K) + |T| - |S_0| - \sum_{\mathfrak{p} \in S_p \cup \Delta_p} [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p] - \delta_{2,p}|S_\infty| =$$

$$|T| + \sum_{\mathfrak{p} \in T_p} [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p] - |S_0| - r_2(K) - \delta_{2,p}|S_\infty|$$

($k = K$, $\rho_{v,\chi} = \rho_{v,\chi^*} = 1$ pour tout v, $\delta_{\omega,\chi} = \delta_{1,\chi} = 1$) qui permet des énoncés généraux sur les p-rangs des groupes de classes considérés, valables quel que soit K contenant μ_p.
(iii) On obtient les 9 cas particuliers intéressants suivants, correspondant au cas $G = 1$ (cf. (ii)), avec $T_1, \ S_1 \subset P\ell_{K,0} - P\ell_{K,p}$:
cas $p \neq 2$:
$\rho_p(T_1, S_1) = |T_1| - |S_1| - \frac{1}{2}[K : \mathbb{Q}]$,
$\rho_p(T_1 \cup P\ell_p, S_1) = |T_1| - |S_1| + |P\ell_p| + \frac{1}{2}[K : \mathbb{Q}]$,
$\rho_p(T_1, S_1 \cup P\ell_p) = |T_1| - |S_1| - |P\ell_p| - \frac{1}{2}[K : \mathbb{Q}]$;
cas $p = 2$:
$\rho_2(T_1, S_1) = |T_1| - |S_1| - r_2$,
$\rho_2(T_1, S_1 \cup P\ell^r_\infty) = |T_1| - |S_1| - r_1 - r_2$,

$\rho_2(T_1 \cup P\ell_2, S_1) = |T_1| - |S_1| + |P\ell_2| + r_1 + r_2,$
$\rho_2(T_1 \cup P\ell_2, S_1 \cup P\ell^r_\infty) = |T_1| - |S_1| + |P\ell_2| + r_2,$
$\rho_2(T_1, S_1 \cup P\ell_2) = |T_1| - |S_1| - |P\ell_2| - r_2,$
$\rho_2(T_1, S_1 \cup P\ell_2 \cup P\ell^r_\infty) = |T_1| - |S_1| - |P\ell_2| - r_1 - r_2.$

Les situations décrites ci-après nous seront utiles dans les chapitres II et III consacrés aux applications [22] :

Définitions 5.17. Soit $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$. Lorsque le groupe de décomposition H_v^χ de $v \in P\ell_k$, dans K^χ/k, est normal dans $G^\chi = \mathrm{Gal}(K^\chi/k)$, on a :

$$\rho_{v,\chi} = \psi(1) d_{v,\chi},$$

où $d_{v,\chi} = 1$ (resp.0) si $H_v^\chi = 1$ (resp. sinon) (i.e. on a $d_{v,\chi} = 1$ (resp.0) si v est totalement décomposée dans K^χ (resp. sinon)) (cf. 3.10, (i)).

D'où le vocabulaire que nous adopterons :
(i) Lorsque ce qui précède a lieu pour toute place $v \in P\ell^{rc}_{k,\infty} \cup T_k \cup S_{0,k}$, nous dirons que l'on est dans le cas **normal**, relativement à la donnée de K, G, $k = K^G$, T, S et χ.
(ii) On parlera de cas **absolu normal** lorsque $k = \mathbb{Q}$ (i.e. $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne de degré étranger à p, $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et les groupes de décomposition dans $K^\chi/\mathbb{Q}$ des éléments de $\{\infty\} \cup \{p\} \cup T_\mathbb{Q} \cup S_\mathbb{Q}$ sont normaux dans G^χ).
(iii) Remarquons que les cas (i), (ii), contiennent le cas où G est abélien, situation pour laquelle il suffit de faire en plus $\psi(1) = 1$ dans les formules.

Le théorème de réflexion général résulte de la proposition 5.6 et de ce qui précède (notamment la proposition 5.10) :

Théorème 5.18 (Théorème de T-S-réflexion). *Soit p un nombre premier. Soit K un corps de nombres contenant μ_p et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p. Soient $T \subset P\ell_{K,0}$, $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell^r_{K,\infty}$, deux ensembles finis, disjoints, G-invariants, de places de K. On pose :*
$T_p = T \cap P\ell_{K,p}$, $S_p = S \cap P\ell_{K,p}$, $\Delta_p = P\ell_{K,p} - T_p - S_p$, $\Delta_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty$, $T^* = T \cup \Delta_\infty$, $S^* = S_0 \cup \Delta_p$, $\mathfrak{m}^* = \prod_{\mathfrak{p} \in S_0 - S_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1} \prod_{\mathfrak{p} \in \Delta_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}}$,
où, pour $\mathfrak{p}|p$, $e_\mathfrak{p}$ désigne l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ dans $K/\mathbb{Q}(\mu_p)$. Alors :
(i) *On a, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^S_{K,T}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{T^*}_{K,\mathfrak{m}^*}) = \rho_\chi(T,S) \quad (cf.\ 5.15)\ ;$$

[22] Nous donnons en 7.4, 7.5 (cas $p \neq 2$) et en 8.5, 8.6 (cas $p = 2$), les tableaux de constantes notées B_χ, B'_χ, explicitées en fonction de la situation galoisienne envisagée. On peut déjà s'y référer, notamment pour l'utilisation du théorème 5.18 ci-après, en notant que $\rho_\chi(T,S) = B'_\chi(T,S) - \psi(1) \sum_{v \in \Delta_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p]$.

(ii) *si en outre* $\Delta_p = \emptyset$, *alors* $C\ell_{K,\mathfrak{m}^*}^{T^*} = C\ell_{K,S^*}^{T^*}$ *et on a, pour tout* $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$ *:*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,T}^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S^*}^{T^*}) = \rho_\chi(T,S).$$

Corollaire 5.19 ($G = 1$). (i) *On a :*

$$\mathrm{rg}_p(C\ell_{K,T}^S) - \mathrm{rg}_p(C\ell_{K,\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = \rho_p(T,S) \quad (\textit{cf. remarque 5.16, } \text{(ii)}) \ ;$$

(ii) *si en outre* $\Delta_p = \emptyset$, *on a :*

$$\mathrm{rg}_p(C\ell_{K,T}^S) - \mathrm{rg}_p(C\ell_{K,S^*}^{T^*}) = \rho_p(T,S).$$

Remarques 5.20. (i) Lorsque $\Delta_p \neq \emptyset$, on a seulement l'inégalité $\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) \leq \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S^*}^{T^*})$ car $\mathfrak{m}^*$ n'est pas nécessairement le conducteur de $L_{S^*}^{T^*}$.
Or on vérifie facilement que l'on a, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, l'identité [23] :

$$\rho_\chi(T,S) + \rho_{\chi^*}(S^*,T^*) = \sum_{v \in \Delta_{p,k}} \rho_{v,\chi^*},$$

qui conduit, par application de 5.18, (i), aux couples (T,S), (S^*,T^*), à la relation :

$$[\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^{S\cup\Delta_p})] + [\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S^*}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*})] = \sum_{v \in \Delta_{p,k}} \rho_{v,\chi^*} \ ;$$

les deux termes entre crochets étant ≥ 0, une condition suffisante simple de nullité de chacun d'eux est que $\rho_{v,\chi^*} = 0$ pour tout $v \in \Delta_{p,k}$ (c'est le cas (cf. 5.17) lorsque les sous-groupes de décomposition $H_v^{\chi^*}$, $v \in \Delta_{p,k}$, sont normaux dans G^{χ^*} et non triviaux) (voir aussi 5.24).
(ii) Si $\Delta_p = \emptyset$, on a $(T^*)^* = T$ et $(S^*)^* = S$, soit $\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{S^*}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_T^S) = \rho_\chi(S^*,T^*)$, qui n'apportent rien d'après (i).
(iii) Lorsque l'on prend $G = 1$, on n'a plus à proprement parler un théorème de réflexion, mais les égalités des points (i) et (ii) de 5.19, valables alors sans aucune hypothèse autre que $\mu_p \subset K$ (puisque $p \nmid |G|$ est toujours vrai), comparent néammoins théorie de Kummer et corps de classes, donnant ainsi des relations non triviales.

Nous allons terminer cette partie en donnant, en dehors de toute hypothèse kummérienne, d'autres formules de χ-rangs, qui ne proviennent pas des précédentes, qui auront un intérêt crucial pour l'interprétation, au chapitre II, des "inégalités" des théorèmes de réflexion et également pour le cas $p = 2$, et qui, dans le cas kummérien, contiennent le théorème de T-S-reflexion.

Les calculs ci-après sont dans le même esprit que ceux donnés dans [M, § 1.1.1] pour le cas modéré :

---

[23] Qui découle facilement de 5.14 et 5.15

Théorème 5.21. *Soit K un corps de nombres. Soit p un nombre premier et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p. Soient $T \subset P\ell_{K,0}$ et $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell^r_{K,\infty}$ deux ensembles finis, disjoints, G-invariants, de places de K ; soient $T' \subseteq T$, $S'_\infty \supseteq S_\infty$, également G-invariants, et soit $S' = S_0 \cup S'_\infty$; soient enfin $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}'$ divisant $\mathfrak{f}$, deux modules G-invariants de K construits sur T et T'.*

Alors on a, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_\chi(C\ell^S_{K,\mathfrak{f}}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{S'}_{K,\mathfrak{f}'}) = \mathrm{rg}_\chi(&\prod_{\mathfrak{p}\in T} U^p_\mathfrak{p} U^{(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}'))}_\mathfrak{p} / U^p_\mathfrak{p} U^{(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}))}_\mathfrak{p}) \\ &+ \delta_{2,p}\mathrm{rg}_\chi(\prod_{\mathfrak{p}\in S'_\infty - S_\infty} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times +}) - \mathrm{rg}_\chi(\theta^{S_\infty, S'_\infty}_{\mathfrak{f},\mathfrak{f}'}(Y^{S'}_{K,T,\mathfrak{f}'})),\end{aligned}$$

où $\theta^{S_\infty, S'_\infty}_{\mathfrak{f},\mathfrak{f}'}$ est l'application diagonale :

$$K^{\times p}_T K^{\times P\ell^r_\infty - S'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in T} U^p_\mathfrak{p} U^{(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}'))}_\mathfrak{p} / U^p_\mathfrak{p} U^{(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}))}_\mathfrak{p} \times \prod_{\mathfrak{p}\in S'_\infty - S_\infty} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times +},$$

et où :

$$Y^{S'}_{K,T,\mathfrak{f}'} = \{\alpha \in K^{\times p}_T K^{\times P\ell^r_\infty - S'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'},\ (\alpha) = \mathfrak{a}^p \mathfrak{a}_{S_0},\ \mathfrak{a} \in I_{K,T},\ \mathfrak{a}_{S_0} \in \langle S_0\rangle\}.$$

Démonstration. On a donc, en posant $\Delta_\infty = P\ell^r_\infty - S_\infty$, $\Delta'_\infty = P\ell^r_\infty - S'_\infty$, et en remarquant que $I_{T'}/P^{\Delta'_\infty}_{T',\mathfrak{f}'}\langle S_0\rangle \simeq I_T/P^{\Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'}\langle S_0\rangle$:

$$C\ell^S_\mathfrak{f} = \mathbb{Z}_p \otimes (I_T/P^{\Delta_\infty}_{T,\mathfrak{f}}\langle S_0\rangle),\ C\ell^{S'}_{\mathfrak{f}'} = \mathbb{Z}_p \otimes (I_T/P^{\Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'}\langle S_0\rangle)$$

(cf. 5.1, (iii), (4), (4′)). On a la suite exacte :

$$\begin{aligned}1 \longrightarrow I^p_T P^{\Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'}\langle S_0\rangle / I^p_T P^{\Delta_\infty}_{T,\mathfrak{f}}\langle S_0\rangle \longrightarrow I_T/I^p_T P^{\Delta_\infty}_{T,\mathfrak{f}}\langle S_0\rangle \\ \longrightarrow I_T/I^p_T P^{\Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'}\langle S_0\rangle \longrightarrow 1,\end{aligned}$$

qui donne la relation :

$$\mathrm{rg}_\chi(C\ell^S_\mathfrak{f}) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{S'}_{\mathfrak{f}'}) + \mathrm{rg}_\chi(P^{\Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'}/P^{\Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'} \cap (I^p_T\ P^{\Delta_\infty}_{T,\mathfrak{f}}\langle S_0\rangle)). \tag{16}$$

Considérons maintenant le quotient :

$$\begin{aligned}K^{\times p}_T\ K^{\times \Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'}/K^{\times p}_T\ K^{\times \Delta_\infty}_{T,\mathfrak{f}} \simeq K^{\times p}_T\ K^\times_{T,\mathfrak{f}'}/K^{\times p}_T\ K^{\times S'_\infty - S_\infty}_{T,\mathfrak{f}} \simeq \\ \prod_{\mathfrak{p}\in T} U^p_\mathfrak{p} U^{(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}'))}_\mathfrak{p} / U^p_\mathfrak{p}\ U^{(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}))}_\mathfrak{p} \times \prod_{\mathfrak{p}\in S'_\infty - S_\infty} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times +}\ ;\end{aligned}$$

il conduit à écrire la suite exacte :

$$\begin{aligned}1 \longrightarrow Y^{S'}_{T,\mathfrak{f}'} K^{\times p}_T K^{\times \Delta_\infty}_{T,\mathfrak{f}}/K^{\times p}_T K^{\times \Delta_\infty}_{T,\mathfrak{f}} \longrightarrow K^{\times p}_T K^{\times \Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'}/K^{\times p}_T K^{\times \Delta_\infty}_{T,\mathfrak{f}} \\ \longrightarrow P^{\Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'}/P^{\Delta'_\infty}_{T,\mathfrak{f}'} \cap (I^p_T P^{\Delta_\infty}_{T,\mathfrak{f}}\langle S_0\rangle) \longrightarrow 1.\end{aligned} \tag{17}$$

On peut ensuite interpréter le noyau comme étant isomorphe à l'image, par $\theta_{\mathfrak{f},\mathfrak{f}'}^{S_\infty,S'_\infty}$, de $Y_{T,\mathfrak{f}'}^{S'}$ dans $\prod_{\mathfrak{p}\in T} U_\mathfrak{p}^p U_\mathfrak{p}^{(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}'))}/U_\mathfrak{p}^p U_\mathfrak{p}^{(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{f}))} \times \prod_{\mathfrak{p}\in S'_\infty - S_\infty} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times +}$. D'où le théorème en rapprochant (16) et (17).

Corollaire 5.22. *On considère, comme dans 5.21, $T' \subseteq T$, $\mathfrak{f}' \in \langle T' \rangle$, $\mathfrak{f} \in \langle T \rangle$, $\mathfrak{f}'|\mathfrak{f}$, et $S' = S_0 \cup S'_\infty \supseteq S = S_0 \cup S_\infty$, stables par G. Alors pour $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$, S_∞, S'_∞ fixés, l'expression :*

$$\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,\mathfrak{f}}^{S_0\cup S_\infty}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,\mathfrak{f}'}^{S_0\cup S'_\infty})$$

est, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, une fonction décroissante par rapport à $S_0 \subset P\ell_{K,0}$, $S_0 \cap T = \emptyset$, S_0 stable par G.

Démonstration. En effet, si $S_0 \subseteq \widetilde{S}_0$, on a, pour $\widetilde{S} = \widetilde{S}_0 \cup S_\infty$, $\widetilde{S}' = \widetilde{S}_0 \cup S'_\infty$:

$$\mathrm{rg}_\chi(C\ell_\mathfrak{f}^{\widetilde{S}}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{f}'}^{\widetilde{S}'}) - (\mathrm{rg}_\chi(C\ell_\mathfrak{f}^{S}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{f}'}^{S'})) =$$

$$-\mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{f},\mathfrak{f}'}^{S_\infty,S'_\infty}(Y_{T,\mathfrak{f}'}^{\widetilde{S}'})) + \mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{f},\mathfrak{f}'}^{S_\infty,S'_\infty}(Y_{T,\mathfrak{f}'}^{S'})) ;$$

or, par définition, on a $Y_{T,\mathfrak{f}'}^{S'} \subseteq Y_{T,\mathfrak{f}'}^{\widetilde{S}'}$; d'où le résultat.

Les résultats précédents sont valables sans l'hypothèse $\mu_p \subset K$, mais non les corollaires 5.23 et 5.24 suivants :

Corollaire 5.23. *On suppose $\mu_p \subset K$. On considère, comme dans 5.21, $T' \subseteq T$ et $S' = S_0 \cup S'_\infty \supseteq S = S_0 \cup S_\infty$, stables par G.*
Soient $\mathfrak{f} = \mathfrak{n} = \prod_{\mathfrak{p}\in T-T_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p}\in T_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1}$ et $\mathfrak{f}' = \mathfrak{n}' = \prod_{\mathfrak{p}\in T'-T'_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p}\in T'_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1}$;
alors, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, on a l'égalité suivante (cf. 5.3, 5.12) :

$$\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,T}^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,T'}^{S'}) = \psi(1) \sum_{v\in T_{p,k}-T'_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p] + \sum_{v\in T_k - T'_k} \rho_{v,\chi^*} +$$

$$\delta_{2,p}\psi(1)|S'_{\infty,k} - S_{\infty,k}| - \mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{n},\mathfrak{n}'}^{S_\infty,S'_\infty}(Y_{K,T,\mathfrak{n}'}^{S'})),\ \psi|\chi ;$$

en particulier, si l'on fait $G = 1$, on obtient :

$$\mathrm{rg}_p(C\ell_{K,T}^S) - \mathrm{rg}_p(C\ell_{K,T'}^{S'}) = \sum_{\mathfrak{p}\in T_p - T'_p} [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p] + |T - T'| +$$

$$\delta_{2,p}|S'_\infty - S_\infty| - \mathrm{rg}_p(\theta_{\mathfrak{n},\mathfrak{n}'}^{S_\infty,S'_\infty}(Y_{K,T,\mathfrak{n}'}^{S'})).$$

Corollaire 5.24. *On suppose $\mu_p \subset K$. Les données T, S, Δ_p, Δ_∞, T^*, S^* ayant le sens habituel, on a, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:*

$$0 \leq \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S^*}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = \sum_{v\in\Delta_{p,k}} \rho_{v,\chi^*} - \mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(Y_{K,S^*,\mathfrak{m}}^{T^*})),$$

où $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}\in S_0 - S_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p}\in S_p} \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1}$ *et* $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m} \prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_p} \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}}$.
Par conséquent, une condition suffisante pour que l'on ait $\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S^*}^{T^*})$*, est que* $\rho_{v,\chi^*} = 0$ *pour tout* $v \in \Delta_{p,k}$ *(c'est le cas (cf. 5.17) lorsque les sous-groupes de décomposition* $H_v^{\chi^*}$, $v \in \Delta_{p,k}$*, sont normaux dans* G^{χ^*} *et non triviaux).*

Démonstration. En effet, c'est immédiat à partir des calculs du point (γ) de la démonstration de la proposition 5.12, sur le caractère de la représentation $\prod_{\mathfrak{p}|v} U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})}/U_{\mathfrak{p}}^{(pe_{\mathfrak{p}})} \cap U_{\mathfrak{p}}^{(1)p}$ (on retrouve et précise ainsi le point (i) de la remarque 5.20).

Remarque 5.25. (i) On utilisera notamment le fait que le groupe $Y_{T,\mathfrak{f}}^S$ contient le groupe $E_{\mathfrak{f}}^S$ des S-unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$ (cf. 5.1, (iv)).
(ii) On a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow Y_{T,\mathfrak{f}}^S/K_T^{\times p} \longrightarrow Y_{T,\mathfrak{f}'}^{S'}/K_T^{\times p} \xrightarrow{\theta_{\mathfrak{f},\mathfrak{f}'}^{S_\infty,S'_\infty}} \theta_{\mathfrak{f},\mathfrak{f}'}^{S_\infty,S'_\infty}(Y_{T,\mathfrak{f}'}^{S'}) \longrightarrow 1$$

($\mathfrak{f}'|\mathfrak{f}$, $S = S_0 \cup S_\infty$, $S' = S_0 \cup S'_\infty$, $S_\infty \subseteq S'_\infty$), qui permet éventuellement de remplacer $\mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{f},\mathfrak{f}'}^{S_\infty,S'_\infty}(Y_{T,\mathfrak{f}'}^{S'}))$ par $\mathrm{rg}_\chi(Y_{T,\mathfrak{f}'}^{S'}/K_T^{\times p}) - \mathrm{rg}_\chi(Y_{T,\mathfrak{f}}^S/K_T^{\times p})$.
(iii) On vérifie sans difficultés que, dans le cadre du point (ii) précédent appliqué au corollaire 5.24, on a par définition :

$$Y_{S^*,\mathfrak{m}^*}^{T^*} = Y_{S^*,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}^{T^*}.$$

Nous allons enfin utiliser le théorème 5.21 pour relier le χ-rang de $C\ell_T^S$ au χ-rang de $V_T^S/K_T^{\times p}$, où V_T^S est le groupe de nombres :

$$V_T^S = \{\alpha \in K_T^\times,\ v_{\mathfrak{p}}(\alpha) \equiv 0 \bmod p \ \ \forall \mathfrak{p} \notin S,\ \alpha \in K_{\mathfrak{p}}^{\times p} \ \ \forall \mathfrak{p} \in T\},$$

qui joue un rôle capital dans l'étude du groupe de Galois de la p-extension galoisienne T-ramifiée, S-décomposée, maximale de K (cf. [Ko, chap. III, § 2] et [M, chap. IV]), et qui va nous permettre d'expliquer en quoi ce type de calculs conduit à une seconde approche du théorème de reflexion.

Reprenons les données de 5.21 avec $\mathfrak{f}' = (1)$, $S'_\infty = P\ell_{K,\infty}^r$, et $\mathfrak{f}$ multiple convenable du conducteur de L_T (en l'absence d'hypothèse kummérienne, le module $\mathfrak{n}$ utilisé dans le corollaire 5.23 n'est pas défini, mais on aura encore $U_{\mathfrak{p}}^{(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f}))} \subseteq U_{\mathfrak{p}}^p$, pour tout $\mathfrak{p} \in T$). On a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow E^{S_0\mathrm{ord}}/(E^{S_0\mathrm{ord}})^p \longrightarrow Y_T^{S_0\mathrm{ord}}/K_T^{\times p} \longrightarrow C\ell^{S_0\mathrm{ord}}[p] \longrightarrow 1,$$

qui donne la relation :

$$\mathrm{rg}_\chi(Y_T^{S_0\mathrm{ord}}/K_T^{\times p}) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{S_0\mathrm{ord}}) + \mathrm{rg}_\chi(E^{S_0\mathrm{ord}})\ ;$$

par application du théorème 5.21 et du point (ii) de la remarque 5.25, on obtient, en remarquant que $Y_{T,\mathrm{f}}^S = V_T^S$:

$$(18)\quad \mathrm{rg}_\chi(C\ell_T^S) = \mathrm{rg}_\chi(V_T^S/K_T^{\times p}) - \mathrm{rg}_\chi(E^{S_0\mathrm{ord}}) + \mathrm{rg}_\chi(\prod_{\mathfrak{p}\in T} U_\mathfrak{p}/U_\mathfrak{p}^p) + \delta_{p,2}\,\mathrm{rg}_\chi(\prod_{\mathfrak{p}\in P\ell_\infty^r - S_\infty} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times +}).$$

Les calculs effectués pour la démonstration de la proposition 5.12 s'adaptent facilement pour tenir compte du fait que K ne contient pas nécessairement μ_p ; en particulier, si le p-groupe de torsion $\mu_\mathfrak{p}$ de $K_\mathfrak{p}^\times$ $(\mathfrak{p}|v)$ est non trivial, le groupe H_v opère sur $\mu_\mathfrak{p}$ via la restriction du caractère de Teichmüller local ω_v (qui, ici, dépend de v), et le χ- rang de $\mathbb{F}_p \otimes \prod_{\mathfrak{p}|v} \mu_\mathfrak{p}$ est $\rho_{v,\omega_v\chi^{-1}}$ (cf. lemme 5.13).

On a donc obtenu le résultat suivant qui est la généralisation d'une formule de Šafarevič ([Š, th. 1]) :

Théorème 5.26. *Soit K un corps de nombres. Soient p un nombre premier et G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p, et soit $k = K^G$. Soient $T \subset P\ell_{K,0}$ et $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell_{K,\infty}^r$ deux ensembles finis, disjoints, G-invariants, de places de K. Alors on a, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:*

$$\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,T}^S) = \mathrm{rg}_\chi(V_{K,T}^S/K_T^{\times p}) + \sum_{v\in T_k} \delta_v \rho_{v,\omega_v\chi^{-1}} + \psi(1) \sum_{v\in T_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p] - \sum_{v\in P\ell_{k,\infty}\cup S_{0,k}} \rho_{v,\chi} - \delta_{\omega,\chi}\delta + \delta_{1,\chi} + \delta_{2,p}\psi(1)|\Delta_{\infty,k}|,$$

où $V_{K,T}^S = \{\alpha \in K_T^\times,\ v_\mathfrak{p}(\alpha) \equiv 0 \bmod p\ \ \forall \mathfrak{p} \notin S,\ \alpha \in K_\mathfrak{p}^{\times p}\ \ \forall \mathfrak{p} \in T\}$, $\delta_v = 1$ (resp. 0) si les complétés de K au-dessus de v contiennent μ_p (resp. sinon), $\delta = 1$ (resp. 0) si K contient μ_p (resp. sinon), $\Delta_{\infty,k} = P\ell_{k,\infty}^r - S_{\infty,k}$, et où $\delta_{\omega,\chi}$, $\delta_{1,\chi}$, $\delta_{2,p}$ sont des symboles de Kronecker.

Remarque 5.27. Sous l'hypothèse $\mu_p \subset K$, on constate que $V_{K,T}^S/K_T^{\times p}$ est le radical de l'extension p-élémentaire maximale de K, $T \cup \Delta_\infty$-décomposée, $S_0 \cup \Delta_p$-ramifiée, et dont la ramification pour les $\mathfrak{p} \in \Delta_p$ est "limitée" par la condition $v_\mathfrak{p}(\alpha) \equiv 0\ (p)$; on vérifie facilement, à partir du 2.5, (iv), que le conducteur de cette extension est le module $\mathfrak{m}^*$, auquel cas on retrouve le théorème de T-S-réflexion 5.18 tout en précisant la correspondance entre radicaux, conducteurs et groupes de classes, lorsque $\Delta_p \neq \emptyset$. On notera que cette seconde démonstration (qui utilise également les calculs de représentations 5.12 et la dualité kummérienne 5.6) peut être vue comme une approche duale de la première (la relation (18) ci-dessus étant à mettre en parallèle avec celle de la proposition 5.10).

6. Théorème de Dirichlet galoisien. Calculs de rangs.

On rappelle ici un résultat "classique" mais, semble-t-il, peu accessible dans la littérature [24].

Soit K un corps de nombres (donné sans aucune hypothèse kummérienne) et soit G un groupe d'automorphismes de K ; on désigne toujours par :

$$(1) \qquad P\ell_{K,\infty} = P\ell^r_{K,\infty} \cup P\ell^c_{K,\infty} \text{ (resp. } P\ell_{k,\infty} = P\ell^r_{k,\infty} \cup P\ell^c_{k,\infty})$$

l'ensemble des places à l'infini de K (resp. de $k = K^G$), réunion des sous-ensembles de places réelles et complexes. Comme dans la section 5, on note de préférence v les éléments de $P\ell_k$ et $\mathfrak{p}$ ceux de $P\ell_K$, et on désigne par σ_v (resp. $\sigma_{\mathfrak{p}}$) le plongement de k (resp. K) associé à $v \in P\ell_{k,\infty}$ (resp. $\mathfrak{p} \in P\ell_{K,\infty}$). On pose :

$$(2) \qquad P\ell_{k,\infty} = P\ell^{rc}_{k,\infty} \cup P\ell^d_{k,\infty},$$

où $P\ell^{rc}_{k,\infty}$ (resp. $P\ell^d_{k,\infty}$) est le sous-ensemble des places à l'infini réelles de k complexifiées dans K (resp. des places à l'infini de k totalement décomposées dans K) ; on a donc :

$$(2') \qquad P\ell^d_{k,\infty} = P\ell^{rd}_{k,\infty} \cup P\ell^c_{k,\infty}, \text{ où } P\ell^{rd}_{k,\infty} = P\ell^r_{k,\infty} \cap P\ell^d_{k,\infty}.$$

Pour $v \in P\ell_{k,\infty}$, on désigne, par abus, par c_v le Frobenius, dans K/k, d'une place arbitraire $\mathfrak{p}_0$ de K au-dessus de v (pour $v \in P\ell^{rc}_{k,\infty}$, c_v est donc l'élément d'ordre 2 de G tel que $\sigma_{\mathfrak{p}_0} c_v \sigma_{\mathfrak{p}_0}^{-1}$ est la conjugaison complexe dans $\mathrm{Gal}(\sigma_{\mathfrak{p}_0}(K)/\sigma_v(k)))$; c'est aussi le générateur du groupe de décomposition, noté par abus H_v, de $\mathfrak{p}_0$ dans K/k.

Théorème 6.1. *Soient K un corps de nombres, G un groupe d'automorphismes de K, et $k = K^G$. Soit E un sous-G-module d'indice fini du groupe E_K^{ord} des unités au sens ordinaire de K. On a les isomorphismes de G-modules suivants (cf. (2)) :*

(i) $\mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E) \simeq \bigoplus_{v \in P\ell^{rc}_{k,\infty}} \mathbb{Q}[G](1 + c_v) \bigoplus_{v \in P\ell^d_{k,\infty}} \mathbb{Q}[G]$;

(ii) $\mathbb{F}_p \oplus (\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E) \simeq (\mathbb{F}_p \otimes \mathrm{tor}(E)) \bigoplus_{v \in P\ell^{rc}_{k,\infty}} \mathbb{F}_p[G](1 + c_v) \bigoplus_{v \in P\ell^d_{k,\infty}} \mathbb{F}_p[G]$,

pour tout p premier ne divisant pas $|G|$, où $\mathrm{tor}(E)$ désigne le sous-groupe de torsion de E.

Démonstration. Posons $|G| = g$, et soit :

$$(3) \qquad \mathcal{L} : E \longrightarrow \prod_{v \in P\ell^{rc}_{k,\infty}} \mathbb{R}_v^{g/2} \prod_{v \in P\ell^d_{k,\infty}} \mathbb{R}_v^g, \ \mathbb{R}_v = \mathbb{R},$$

[24] Excepté [AT, chap. 5, § 3] et [L, chap. IX, § 4], pour le calcul du quotient de Herbrand des groupes de Σ-unités (mais qui n'utilisent pas le point de vue des représentations), ainsi que [We].

le plongement logarithmique de E, ainsi défini pour tout $\varepsilon \in E$: pour $v \in P\ell^{rc}_{k,\infty}$ (resp. $P\ell^{d}_{k,\infty}$), la composante de $\mathcal{L}(\varepsilon)$ sur le facteur $\mathbb{R}_v^{g/2}$ (resp. $\mathbb{R}_v^{g}$) est donnée par :

$$(3') \qquad (\log|\sigma_{\mathfrak{p}_0} s^{-1}\varepsilon|)_{s\in G \bmod \langle c_v\rangle} \text{ (resp. } (\log|\sigma_{\mathfrak{p}_0} s^{-1}\varepsilon|)_{s\in G}).$$

On munit chaque $\mathbb{R}_v^{g/2}$ (resp. $\mathbb{R}_v^{g}$) de la loi de G- module définie par :

$$(3'') \qquad t((x_{v,s})_s) = (x_{v,t^{-1}s})_s, \text{ pour tout } t \in G,$$

$s \in G \bmod \langle c_v\rangle$ (resp. $s \in G$). [25]

On constate que $\mathcal{L}$ est alors un homomorphisme de G-modules.

Désignons par $(r_1(k), r_2(k)) = \left(|P\ell^{r}_{k,\infty}|, |P\ell^{c}_{k,\infty}|\right)$ la signature de k et posons (cf. (2), (2')) :

$$(4) \qquad r_1^c(k) = |P\ell^{rc}_{k,\infty}|,\ r_1^d(k) = |P\ell^{rd}_{k,\infty}|\ ;$$

alors :

$$(4') \qquad r_1(K) = r_1^d(k)g,\ r_2(K) = r_1^c(k)\frac{g}{2} + r_2(k)g.$$

Posons enfin :

$$(5) \qquad r = r_1(K) + r_2(K) = r_1^c(k)\frac{g}{2} + (r_1^d(k) + r_2(k))g$$

et identifions $\prod_{v\in P\ell^{rc}_{k,\infty}} \mathbb{R}_v^{g/2} \prod_{v\in P\ell^{d}_{k,\infty}} \mathbb{R}_v^{g}$ à $\mathbb{R}^r$; alors le théorème de Dirichlet classique affirme que $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $r-1$ contenu dans l'hyperplan de $\mathbb{R}^r$ défini par :

$$\sum_{\substack{v\in P\ell^{rd}_{k,\infty}\\ s\in G}} x_{v,s} + 2 \sum_{\substack{v\in P\ell^{rc}_{k,\infty}\\ s\in G \bmod \langle c_v\rangle}} x_{v,s} + 2 \sum_{\substack{v\in P\ell^{c}_{k,\infty}\\ s\in G}} x_{v,s} = 0.$$

Soit D l'image diagonale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^r$; le $\mathbb{Z}[G]$-module $D \oplus \mathcal{L}(E)$, qui est un $\mathbb{Z}$-réseau de $\mathbb{R}^r$, conduit, pour tout corps Q de caractéristique 0, à des représentations $V_Q = Q \otimes (D \oplus \mathcal{L}(E))$ de même caractère ; on peut donc travailler avec $V_{\mathbb{R}}$ qui est égale à la représentation $\mathbb{R}^r$ définie par les relations (3'').

Considérons alors les applications $\mathbb{R}$-linéaires :

$$\mathbb{R}_v^{g/2} \longrightarrow \mathbb{R}[G](1+c_v),\ v \in P\ell^{rc}_{k,\infty},$$

où à $(x_{v,s})_{s \bmod \langle c_v\rangle}$ on associe $\sum_{s \bmod \langle c_v\rangle} x_{v,s}\, s(1+c_v)$,

$$\mathbb{R}_v^{g} \longrightarrow \mathbb{R}[G],\ v \in P\ell^{d}_{k,\infty},$$

où à $(x_{v,s})_s$ on associe $\sum_s x_{v,s}\, s$.

---

[25] Autrement dit, si $(e_s)_s$ est la base canonique de $\mathbb{R}_v^{g/2}$ (resp. $\mathbb{R}_v^{g}$), on a posé $t(e_s) = e_{ts}$.

On vérifie immédiatement que ce sont des isomorphismes de G-modules, d'où :

$$\mathbb{R}_v^{g/2} \simeq \mathbb{R}[G](1+c_v) \text{ (resp. } \mathbb{R}_v^g \simeq \mathbb{R}[G]).$$

Par conséquent, V_Q est la somme, pour $v \in P\ell_{k,\infty}$, des représentations de permutation (sur Q) de G modulo H_v (cf. § 3.4 de la section 3). D'où le point (i) du théorème.

Pour le point (ii), on remarque que la suite exacte de G-modules :

$$1 \longrightarrow \mathrm{tor}(E) \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(E) \longrightarrow 0$$

conduit à la suite exacte de G-modules (car $\mathrm{tor}(E) \cap E^p = (\mathrm{tor}(E))^p$) :

$$1 \longrightarrow \mathbb{F}_p \otimes \mathrm{tor}(E) \longrightarrow \mathbb{F}_p \otimes E \longrightarrow \mathbb{F}_p \otimes \mathcal{L}(E) \longrightarrow 0.$$

L'isomorphisme de G-modules :

$$\mathbb{F}_p \oplus \big(\mathbb{F}_p \otimes E\big)/\big(\mathbb{F}_p \otimes \mathrm{tor}(E)\big) \simeq \bigoplus_{v \in P\ell_{k,\infty}^{rc}} \mathbb{F}_p[G](1+c_v) \bigoplus_{v \in P\ell_{k,\infty}^{d}} \mathbb{F}_p[G],$$

provient alors de la théorie des représentations en caractéristique p lorsque p ne divise pas l'ordre de G (cf. [S1, § 15.5] dont les grandes lignes ont été rappelées au § 3.2 de la section 3).

Nous allons traiter maintenant le cas des ensembles de Σ-unités, lorsque Σ est un ensemble fini de places de K, stable par G. Considérons un tel ensemble, et soit Σ_k l'ensemble des places de k en-dessous de Σ. On désigne par F un sous-groupe du groupe E_K^{Σ} des Σ-unités de K, d'indice fini dans E_K^{Σ} ; soit $\langle \Sigma_0 \rangle$ le groupe d'idéaux de K engendré par Σ_0, et soit $P(\Sigma) = \{(x),\ x \in E_K^{\Sigma}\}$.

On a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{i} P(\Sigma), \tag{6}$$

où E est un sous-groupe du groupe E_K^{ord} des unités de K, d'indice fini dans E_K^{ord}.

Comme $\langle \Sigma_0 \rangle$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de dimension finie, $P(\Sigma)$ en est un sous-module d'indice fini (le groupe des classes de K est fini !) et donc il en est de même pour l'image $i(F)$ de F dans $P(\Sigma)$, qui est donc libre de même rang que $\langle \Sigma_0 \rangle$; si p ne divise pas l'ordre de G, l'isomorphisme des représentations correspondantes en caractéristique 0 conduit à un isomorphisme de représentations sur $\mathbb{F}_p$ de la forme :

$$\mathbb{F}_p \otimes i(F) \simeq \mathbb{F}_p \otimes \langle \Sigma_0 \rangle. \tag{7}$$

Posons $\Sigma_0 = \bigcup_v \Sigma_v,\ \Sigma_v = \{\mathfrak{p} \in P\ell_K,\ \mathfrak{p}|v\}$, où v parcourt $\Sigma_{0,k}$; alors on a :

$$\mathbb{F}_p \otimes \langle \Sigma_0 \rangle \simeq \bigoplus_v (\mathbb{F}_p \otimes \langle \Sigma_v \rangle), \tag{8}$$

où chaque représentation $\mathbb{F}_p \otimes \langle \Sigma_v \rangle$ est la représentation de permutation associée au sous-groupe de décomposition d'une place de K au-dessus de v (cf. § 3.4 de la section 3) On a, à partir de (6), la suite exacte (car $E \cap F^p = E^p$) :

$$1 \longrightarrow \mathbb{F}_p \otimes E \longrightarrow \mathbb{F}_p \otimes F \longrightarrow \mathbb{F}_p \otimes i(F) \longrightarrow 1$$

qui conduit (via (7) et (8)) au résultat suivant :

Théorème 6.2. *Soit K un corps de nombres ; soit p un nombre premier et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p. Soit Σ un ensemble fini, stable par G, de places de K, et soit Σ_k l'ensemble des places de $k = K^G$ en-dessous de Σ. Pour tout $v \in P\ell_k$, on désigne par H_v (resp. H_v^χ) le groupe de décomposition, dans K/k (resp. K^χ/k), d'une place quelconque de K (resp. K^χ) au-dessus de v.*

Alors, pour tout sous-G-module F, d'indice fini dans le groupe E_K^Σ des Σ-unités de K, le caractère de $\mathbb{F}_p \otimes F$ est donné par :

$$\sum_{v \in P\ell_{k,\infty}} \mathrm{Ind}_{H_v}^G(1_{H_v}) + \sum_{v \in \Sigma_{0,k}} \mathrm{Ind}_{H_v}^G(1_{H_v}) + \delta_p(F)\omega - 1_G,$$

et on a donc, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:

$$\mathrm{rg}_\chi(F) = \psi(1) r_2(k) + \sum_{v \in P\ell_{k,\infty}^r} \rho_{v,\chi} + \sum_{v \in \Sigma_{0,k}} \rho_{v,\chi} + \delta_{\omega,\chi}\delta_p(F) - \delta_{1,\chi},$$

où $\rho_{v,\chi} = \frac{1}{|H_v^\chi|} \sum_{t \in H_v^\chi} \psi(t)$, $\psi | \chi$, où $\delta_{\omega,\chi}$, $\delta_{1,\chi}$ sont des symboles de Kronecker, et où $\delta_p(F) = 1$ (resp. 0) si $\mu_p \subset F$ (resp. $\mu_p \not\subset F$).

Remarques 6.3. (i) On rappelle que, pour $v \in P\ell_{k,\infty}^r$, on a $\rho_{v,\chi} = \frac{1}{2}(\psi(1) + \psi(c_v^\chi))$ (resp. $\psi(1)$) si v se complexifie dans K^χ (resp. v se décompose dans K^χ).

(ii) Si pour tout $v \in P\ell_{k,\infty}^r \cup \Sigma_{0,k}$, H_v^χ est normal dans G^χ, on obtient (cf. définitions 5.17) :

$$\mathrm{rg}_\chi(F) = \psi(1) r_2(k) + \psi(1) |\{v \in P\ell_{k,\infty}^r \cup \Sigma_{0,k},\ H_v^\chi = 1\}| + \delta_{\omega,\chi}\delta_p(F) - \delta_{1,\chi}.$$

(iii) Au niveau du p-rang, on obtient (en faisant $G = 1$) la formule classique :

$$\mathrm{rg}_p(F) = r_2(K) + r_1(K) + |\Sigma_0| + \delta_p(F) - 1.$$

(iv) Si l'on ne s'intéresse qu'au caractère de la représentation $\mathbb{Q} \otimes F$, il suffit de supprimer le caractère de la p-torsion de F, ce qui donne le caractère :

$$\sum_{v \in P\ell_{k,\infty}} \mathrm{Ind}_{H_v}^G(1_{H_v}) + \sum_{v \in \Sigma_{0,k}} \mathrm{Ind}_{H_v}^G(1_{H_v}) - 1_G,$$

le groupe G pouvant alors être un groupe d'automorphismes quelconque de K.

(v) Le cas d'un sous-G-module E, d'indice fini dans E_K^{ord}, s'obtient en faisant $\Sigma_0 = \emptyset$.

Chapitre II. Inégalités du "Spiegelungssatz"

INTRODUCTION.

Ce chapitre est consacré, pour l'essentiel, à la particularisation des énoncés du chapitre I (principalement les théorèmes 5.18 et 5.21) ; ce travail est nécessaire car, d'une part, les cas $p = 2$ et $p \neq 2$ sont très dissemblables à cause du rôle des places à l'infini pour $p = 2$, et, d'autre part, dans les situations classiques d'importantes simplifications apparaissent que le lecteur n'aura pas à effectuer. On y trouvera également des applications et exemples généralisant et unifiant nombre de résultats épars.

(a) Rappel des principales notations.

(i) On fixe un nombre premier p, un corps de nombres K contenant μ_p, un groupe d'automorphismes G de K, d'ordre étranger à p, dont on note k le sous-corps fixe.

(ii) (cf. définitions 5.1) On désigne ensuite par T et S deux ensembles finis, disjoints, G-invariants, de places de K, avec $T \subset P\ell_{K,0}$, $S \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell^r_{K,\infty}$, et on pose :

$$\begin{aligned} &T_p = T \cap P\ell_{K,p},\ S_p = S \cap P\ell_{K,p},\ \Delta_p = P\ell_{K,p} - T_p - S_p,\\ &S_0 = S \cap P\ell_{K,0},\ S_\infty = S \cap P\ell^r_{K,\infty},\ \Delta_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty,\\ &T^* = T \cup \Delta_\infty,\ S^* = S_0 \cup \Delta_p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \prod_{\mathfrak{p} \in S_0 - S_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1}, \quad \mathfrak{m}^* = \mathfrak{m} \prod_{\mathfrak{p} \in \Delta_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}},\\ \mathfrak{n} &= \prod_{\mathfrak{p} \in T - T_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p} \in T_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1}, \end{aligned}$$

où $e_\mathfrak{p}$ est l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ dans $K/\mathbb{Q}(\mu_p)$.

(iii) Pour tout $v \in P\ell_k$, on désigne par $H_v^K = H_v$ un groupe de décomposition de v dans K/k ; pour tout $\varphi \in \mathfrak{X}_p(G)$ on désigne par H_v^φ un groupe de décomposition analogue dans K^φ/k et on pose :

$$\rho_{v,\varphi} = \frac{1}{|H_v^\varphi|} \sum_{t \in H_v^\varphi} \psi(t),\ \psi|\varphi\ ;$$

on rappelle (cf. définitions 5.17) que si le groupe de décomposition H_v^φ est normal dans $G^\varphi = \mathrm{Gal}(K^\varphi/k)$, $\rho_{v,\varphi} = \psi(1) d_{v,\varphi}$, où $d_{v,\varphi}$ est égal à 1 (resp. 0) si $H_v^\varphi = 1$ (resp. sinon).

(iv) Pour tout ensemble Σ de places de K, stable par G, on désigne par Σ_k l'ensemble des places de k en-dessous de celles de Σ ; pour tout objet (défini dans le cadre d'une $\mathcal{G}$-famille, au sens du § 3.3 de la section 3) de la forme $M_K(T,S)$, T, $S \subset P\ell_K$, $M_k(T,S)$ est à lire $M_k(T_k, S_k)$.

(v) D'une manière générale, $\delta_{u,v}$ désigne le symbole de Kronecker de u et v.

(b) Principe général des inégalités du "Spiegelungssatz".

Le théorème de réflexion général 5.18 compare de façon "exacte" des χ-rangs de groupes de Galois, sur K, de p-extensions abéliennes maximales à ramification restreinte (avec décomposition), si et seulement si $\Delta_p = \emptyset$; sinon, la relation correspondante :

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = \rho_\chi(T,S),$$

fait intervenir $C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}$, qui est seulement le groupe de Galois d'un p-corps de rayon (T^*-décomposé) pour lequel on a les inégalités :

$$\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T^*}) \leq \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) \leq \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S^*}^{T^*})$$

(voir cependant au corollaire 5.24 une condition suffisante simple pour avoir $\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S^*}^{T^*})$) ; en particulier, dans le cas le plus classique ($T = S = \emptyset$), $\Delta_p = P\ell_p$ n'est jamais vide et $\mathfrak{m}^*$ est le module de p-primarité (cf. définitions 2.6).

Si l'on veut comparer des rangs de groupes de la forme $C\ell_{T'}^{S'}$, on doit donc consentir à écrire des inégalités plus ou moins précises en utilisant le théorème 5.21 qui permet d'exprimer, par exemple, le défaut de rangs $\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T^*})$ au moyen de $Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*}$ et du sous-groupe $Y_{S^*,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}^{T^*}$ de $Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*}$ formé des éléments "Δ_p-primaires" (cf. 5.25, (ii) et (iii)). On notera que d'un point de vue logique, la détermination de ce sous-groupe suppose une connaissance numérique de $C\ell_{\mathfrak{m}}^{T^*}[p]$ qui n'a pas lieu en principe ; mais son existence permet de faire des heuristiques évidentes sur le comportement de ce défaut (nous y reviendrons dans le cas des groupes de classes usuelles). L'usage est alors de remplacer $Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*}$ par $E_{\mathfrak{m}}^{T^*}$ dont le rang est connu (théorème 6.2).

(c) Présentation des résultats.

En vue d'une utilisation pratique, nous détaillerons différentes situations, relativement à un caractère $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, en distinguant le cas $\chi \notin \{1,\omega\}$ du cas $\chi \in \{1,\omega\}$ qui est spécifique en raison du fait que μ_p est de caractère ω, et en adoptant la disposition suivante :

(α) $\chi \notin \{1,\omega\}$:

(i) cas relatif général (G est un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p, $k = K^G$) ;

(i′) cas relatif normal (on suppose en plus que pour tout $v \in P\ell_{k,\infty}^{rc} \cup T_k \cup S_{0,k}$ le groupe de décomposition H_v^χ de v dans K^χ/k est normal dans $\mathrm{Gal}(K^\chi/k)$) (cf. 5.17) ;

(ii) cas absolu général ($K/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne de degré étranger à p, $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, $k = \mathbb{Q}$) ;

(ii′) cas absolu normal ($G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et pour tout $v \in \{\infty\} \cup T_\mathbb{Q} \cup S_{0,\mathbb{Q}}$, H_v^χ est normal dans $\mathrm{Gal}(K^\chi/\mathbb{Q})$; pour $v = \infty$, $p \neq 2$, cela signifie que K^χ est réel ou extension quadratique imaginaire d'un corps réel galoisien sur $\mathbb{Q}$; pour $v = \infty$, $p = 2$, la condition est vide puisque K^χ est de degré impair sur $\mathbb{Q}$, donc réel).

(β) $\chi \in \{1, \omega\}$ [26] :

(i) cas relatif ;

(ii) cas absolu ;

(iii) cas $G = 1$ (c'est un cas particulier du cas (i) (avec $\chi = \omega = 1$) qui conduit à des formules de p-rangs dans K ne nécessitant plus aucune hypothèse sur K (hormis $\mu_p \subset K$)).

On notera que, lorsque G est abélien, on est dans le cas normal (relatif ou non) et les caractères absolument irréductibles sont de degré 1 (i.e. $\psi(1) = 1$).

Remarque. Enfin il y a, pour $p \neq 2$, le cas des corps K à conjugaison complexe (extensions quadratiques totalement imaginaires d'un corps totalement réel k) ; on peut alors prendre $G = \mathrm{Gal}(K/k) = \{1, c\}$, où c est la conjugaison complexe sur K ; il s'agit du cas particulier du cas (β),(i), pour lequel $\mathfrak{X}_p(G) = \{1, \omega\}$, avec $\omega(c) = -1$, que nous énoncerons à part en raison de la tradition, au niveau des notations, qui consiste à écrire tout $\mathbb{Z}_p[G]$-module M_K sous la forme :

$$M_K = M_K^+ \oplus M_K^-,$$

où :

$$M_K^+ = M_K^{\frac{1}{2}(1+c)} \simeq M_k \,^{27}, \ M_K^- = M_K^{\frac{1}{2}(1-c)} \ ;$$

on a alors les différentes notations équivalentes suivantes :

$$\begin{gathered} \mathrm{rg}_+(M_K) = \mathrm{rg}_1(M_K) = \mathrm{rg}_p(M_K^+) = \mathrm{rg}_p(M_k), \\ \mathrm{rg}_-(M_K) = \mathrm{rg}_\omega(M_K) = \mathrm{rg}_p(M_K^-). \end{gathered}$$

7. Enoncés dans le cas $p \neq 2$.

On reprend les notations précédentes en tenant compte du fait que, pour $p \neq 2$, on a :

$$Cl_{\mathfrak{f}}^{\Sigma} = Cl_{\mathfrak{f}}^{\Sigma_0}, \tag{1}$$

pour tout $\Sigma \subset Pl_K$ et tout module $\mathfrak{f}$ étranger à Σ_0.

On a, d'après 5.18, puisque $T^* = T \cup \Delta_\infty$, $S^* = S \cup \Delta_p$:

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(Cl_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(Cl_{\mathfrak{m}^*}^T) = \rho_\chi(T, S), \tag{2}$$

et, comme déjà dit, on a $Cl_{\mathfrak{m}^*}^T = Cl_S^T$ dès que $\Delta_p = \emptyset$.

[26] On est donc ici dans des cas normaux.

[27] Cet isomorphisme n'ayant de sens que dans le cadre des $\mathcal{G}$-familles, ce qui sera toujours le cas.

En utilisant 5.21, on peut notamment rapprocher $C\ell^T_{\mathfrak{m}^*}$ de l'un des deux groupes suivants :

$$C\ell^T_{\mathfrak{m}} = C\ell^T_S,\ C\ell^T_{S^*} = C\ell^T_{S\cup\Delta_p}\ ^{28}\ ;$$

l'énoncé classique de Leopoldt ($T = S = \emptyset$) correspondra au premier cas pour lequel il vient :

$$\text{(3)}\quad \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^S_T) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^T_S) = \rho_\chi(T,S) + \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_p} U^{(1)}_{\mathfrak{p}}/U^{(pe_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{p}}\Big) - \mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(Y^T_{S^*,\mathfrak{m}}))\ ;$$

or $Y^T_{S^*,\mathfrak{m}}$ contient $E^T_{\mathfrak{m}}$, d'où :

$$\text{(4)}\quad \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^S_T) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^T_S) \leq \rho_\chi(T,S) + \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_p} U^{(1)}_{\mathfrak{p}}/U^{(pe_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{p}}\Big) - \mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(E^T_{\mathfrak{m}})).$$

La suite exacte :

$$1 \longrightarrow E^T_{\mathfrak{m}} \cap (K^{\times p}_{S^*}\ K^{\times}_{S^*,\mathfrak{m}^*})/E^{Tp}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow E^T_{\mathfrak{m}}/E^{Tp}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(E^T_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow 1,$$

s'écrit encore :

$$\text{(5)}\qquad 1 \longrightarrow E^T_{\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow E^T_{\mathfrak{m}}/E^{Tp}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(E^T_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow 1,$$

où $E^T_{\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}$ est le sous-groupe de $E^T_{\mathfrak{m}}$ formé des T-unités (congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}$) Δ_p-primaires (cf. 2.6, (ii),(iii)) [29].

Il vient alors, à partir de (4) et (5), puis de 5.15, 5.12, (γ) et 6.2

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^S_T) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^T_S) &\leq \rho_\chi(T,S) + \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_p} U^{(1)}_{\mathfrak{p}}/U^{(pe_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{p}}\Big) \\ &\qquad - \mathrm{rg}_\chi(E^T_{\mathfrak{m}}) + \mathrm{rg}_\chi(E^T_{\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{\mathfrak{m}}) \\ &\leq \sum_{v\in P\ell_{k,\infty}\cup T_k} \rho_{v,\chi} + \delta_{\omega,\chi} - \delta_{1,\chi} - \sum_{v\in S_k}\rho_{v,\chi^*} - \psi(1)\sum_{v\in S_{p,k}\cup\Delta_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p] \\ &\qquad + \psi(1)\sum_{v\in\Delta_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p] - \Big(\sum_{v\in P\ell_{k,\infty}\cup T_k}\rho_{v,\chi} + \delta_{\omega,\chi}\delta_p(E^T_{\mathfrak{m}}) - \delta_{1,\chi}\Big) \\ &\qquad + \mathrm{rg}_\chi(E^T_{\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{\mathfrak{m}})\ ;\end{aligned}$$

---

[28] Pour cette seconde possibilité, on peut conduire les calculs, comme nous allons le faire pour la première, à partir de l'égalité du corollaire 5.24.

[29] On prendra garde au fait que, par opposition à l'égalité $Y^T_{S^*,\mathfrak{m}^*} = Y^T_{S^*,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}$ (cf. 5.25, (iii)), $E^T_{\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}$ est distinct en général de $E^T_{\mathfrak{m}^*}$.

d'où :

$$\text{(6)}\quad \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_S^T) \le \delta_{\omega,\chi}(1-\delta_p(E_{\mathfrak{m}}^T)) - \sum_{v\in S_k}\rho_{v,\chi^*} - \psi(1)\sum_{v\in S_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p] + \mathrm{rg}_\chi(E^T_{\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E_{\mathfrak{m}}^{Tp}).$$

On vérifie alors assez facilement que $\delta_p(E_{\mathfrak{m}}^T)$ est égal à 1 si et seulement si $S=\emptyset$.

Si l'on majore $\mathrm{rg}_\chi(E^T_{\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E_{\mathfrak{m}}^{Tp})$ par $\mathrm{rg}_\chi(E_{\mathfrak{m}}^T/E_{\mathfrak{m}}^{Tp})$, ce qui revient à minorer $\mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(E_{\mathfrak{m}}^T))$ par 0 dans (4), on obtient une majoration plus grossière, souvent utile en pratique, si, au plan numérique, $E^T_{\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}$ n'est pas connu. Nous indiquerons, chaque fois, ces deux types de majorations ; ici cela donne donc :

$$\text{(6')}\quad \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_S^T) \le \sum_{v\in P\ell_{k,\infty}\cup T_k}\rho_{v,\chi} + \delta_{\omega,\chi} - \delta_{1,\chi} - \sum_{v\in S_k}\rho_{v,\chi^*} - \psi(1)\sum_{v\in S_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p].$$

Fixons quelques notations pour exprimer les majorations précédentes (en complément des notations générales (cf. (a) de l'introduction)) :

Notations 7.1 ($p\neq 2$). (i) On désigne par $E^T_{K,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}$ le groupe des T-unités, congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}$, Δ_p-primaires, de K (cf. 2.6, (ii),(iii)).
(ii) Pour tout $\chi\in\mathfrak{X}_p(G)$ on pose :

$$\begin{aligned} B_\chi(T,S) &= \mathrm{rg}_\chi(E^T_{K,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{K,\mathfrak{m}}) + \delta_{\omega,\chi}(1-\delta_{\emptyset,S}) - \\ &\quad \sum_{v\in S_k}\rho_{v,\chi^*} - \psi(1)\sum_{v\in S_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_\chi(T,S) &= \sum_{v\in P\ell_{k,\infty}}\rho_{v,\chi} + \sum_{v\in T_k}\rho_{v,\chi} + \delta_{\omega,\chi} - \delta_{1,\chi} - \\ &\quad \sum_{v\in S_k}\rho_{v,\chi^*} - \psi(1)\sum_{v\in S_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p],\end{aligned}$$

en observant que, puisque $p\neq 2$, on a :

$$\sum_{v\in P\ell_{k,\infty}}\rho_{v,\chi} = \psi(1)r_2(k) + \sum_{v\in P\ell^r_{k,\infty}}\rho_{v,\chi},$$

et que tous les éléments de $P\ell^r_{k,\infty}$ sont complexifiés dans K/k (cf. 5.16, (i)).

Remarques 7.2. (i) Lorsque $\Delta_p = \emptyset$, on a $E^T_{\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{\mathfrak{m}} = E^T_{\mathfrak{m}}/E^{Tp}_{\mathfrak{m}}$, auquel cas, $B_\chi(T,S) = B'_\chi(T,S) = \rho_\chi(T,S)$ donné par 5.15. Ainsi dans le cas $\Delta_p = \emptyset$ on a en fait, dans (6) et (6′), conservé l'égalité donnée par 5.18, (ii). Pour rappeler ce fait, nous utiliserons le symbole $\overline{\overline{\leq}}$ (inégalité si $\Delta_p \neq \emptyset$, égalité si $\Delta_p = \emptyset$).
(ii) On a la la suite exacte (cf. 5.25, (ii)) :

$$1 \longrightarrow Y^T_{S^*,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/K^{\times p}_{S^*} \longrightarrow Y^T_{S^*,\mathfrak{m}}/K^{\times p}_{S^*} \longrightarrow \theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(Y^T_{S^*,\mathfrak{m}}) \longrightarrow 1,$$

puisque $Y^T_{S^*,\mathfrak{m}^*} = Y^T_{S^*,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}$, ce qui conduit à la formule suivante (cf. (3)) qui permet d'interpréter les "inégalités du Spiegelungssatz" pour $p \neq 2$:

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^S_T) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^T_S) = \sum_{v \in P\ell_{k,\infty} \cup T_k} \rho_{v,\chi} + \delta_{\omega,\chi} - \delta_{1,\chi} - \sum_{v \in S_k} \rho_{v,\chi^*} -$$
$$\psi(1) \sum_{v \in S_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p] - \mathrm{rg}_\chi(Y^T_{S^*,\mathfrak{m}}/K^{\times p}_{S^*}) + \mathrm{rg}_\chi(Y^T_{S^*,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/K^{\times p}_{S^*})$$

(nous en donnerons des exemples en 7.8).

Par échange de S et T et de χ et χ^*, la quantité $\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^S_T) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^T_S)$ est changée en son opposé, ce qui, à partir de (6) et (6′), donne des minorations de cette même quantité ; on obtient ainsi ce que l'on peut appeler la généralisation des inégalités classiques du "Spiegelungssatz" dans le cas $p \neq 2$:

Théorème 7.3 (inégalités générales du "Spiegelungssatz" pour $p \neq 2$). *Soit K un corps de nombres contenant μ_p pour $p \neq 2$, et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p. Soient T et S deux ensembles finis, disjoints, G-invariants, de places finies de K. Alors pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, on a (cf. 7.1, tableaux 7.4 et 7.5) :*

$$- B'_{\chi^*}(S,T) \;\overline{\overline{\leq}}\; - B_{\chi^*}(S,T) \;\overline{\overline{\leq}}\; \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^S_T) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^T_S)$$
$$\overline{\overline{\leq}}\; B_\chi(T,S) \;\overline{\overline{\leq}}\; B'_\chi(T,S).$$

Par commodité, dressons les tableaux des valeurs des constantes $B_\chi(T,S)$, $B'_\chi(T,S)$ dans les différents cas mentionnés au point (c) de l'introduction. Lorsque $k = \mathbb{Q}$ (cas absolu) nous abandonnons provisoirement la notation v pour les places de k en désignant par ∞ l'unique place à l'infini de $\mathbb{Q}$ et par q (resp. l) les places de $T_\mathbb{Q}$ (resp. $S_\mathbb{Q}$) (on a alors $\rho_{\infty,\chi} = \frac{1}{2}(\psi(1) + \psi(c^\chi_v))$, où $\langle c^\chi_v \rangle = H^\chi_v$, et (dans le cas normal) $\rho_{\infty,\chi} = \psi(1) d_{\infty,\chi}$, où $d_{\infty,\chi} = 1$ (resp. 0) si K^χ est réel (resp. imaginaire)). Lorsque G est abélien, il suffit de faire $\psi(1) = 1$ dans toutes les expressions. Enfin, lorsque $G = 1$, les constantes B_χ, B'_χ sont notées B_p, B'_p (formules de p-rangs dans K) :

Tableau 7.4 (Tableau des B_χ, B'_χ, $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$ $(p \neq 2)$, $\chi \notin \{1, \omega\}$).

(i) cas relatif général :

$$B_\chi(T,S) = \mathrm{rg}_\chi(E^T_{K,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{K,\mathfrak{m}}) - \sum_{v\in S_k} \rho_{v,\chi^*} - \psi(1) \sum_{v\in S_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p],$$

$$B'_\chi(T,S) = \psi(1)r_2(k) + \sum_{v\in P\ell^r_{k,\infty}} \rho_{v,\chi} + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi} - \sum_{v\in S_k} \rho_{v,\chi^*} - \psi(1) \sum_{v\in S_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p] \ ;$$

(i′) cas relatif normal :

$$B_\chi(T,S) = \mathrm{rg}_\chi(E^T_{K,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{K,\mathfrak{m}}) - \psi(1)|\{v \in S_k,\ H_v^{\chi^*} = 1\}| - \psi(1) \sum_{v\in S_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p],$$

$$B'_\chi(T,S) = \psi(1)r_2(k) + \psi(1)|\{v \in P\ell^r_{k,\infty},\ H_v^{\chi} = 1\}| + \psi(1)|\{v \in T_k,\ H_v^{\chi} = 1\}| - \psi(1)|\{v \in S_k,\ H_v^{\chi^*} = 1\}| - \psi(1) \sum_{v\in S_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p] \ ;$$

(ii) cas absolu général :

$$B_\chi(T,S) = \mathrm{rg}_\chi(E^T_{K,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{K,\mathfrak{m}}) - \sum_{l\in S_\mathbb{Q}} \rho_{l,\chi^*} - \psi(1)|S_{p,\mathbb{Q}}|,$$

$$B'_\chi(T,S) = \rho_{\infty,\chi} + \sum_{q\in T_\mathbb{Q}} \rho_{q,\chi} - \sum_{l\in S_\mathbb{Q}} \rho_{l,\chi^*} - \psi(1)|S_{p,\mathbb{Q}}| \ ;$$

(ii′) cas absolu normal :

$$B_\chi(T,S) = \mathrm{rg}_\chi(E^T_{K,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{K,\mathfrak{m}}) - \psi(1)|\{l \in S_\mathbb{Q},\ H_l^{\chi^*} = 1\}| - \psi(1)|S_{p,\mathbb{Q}}|,$$

$$B'_\chi(T,S) = \psi(1)d_{\infty,\chi} + \psi(1)|\{q \in T_\mathbb{Q},\ H_q^{\chi} = 1\}| - \psi(1)|\{l \in S_\mathbb{Q},\ H_l^{\chi^*} = 1\}| - \psi(1)|S_{p,\mathbb{Q}}|.$$

On rappelle, pour le tableau ci-dessous, que les χ-composantes des invariants de K sont, pour $\chi = 1$, les invariants correspondants de k (on est alors amené à utiliser le point (a), (iv) de l'introduction :

Tableau 7.5 (Tableau des B_1, B'_1, B_ω, B'_ω $(p \neq 2)$).

(i) cas relatif :

$$\begin{aligned} B_1(T,S) &= \mathrm{rg}_p(E^T_{k,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{k,\mathfrak{m}}) + \delta_{1,\omega}(1 - \delta_{\emptyset,S}) - \\ &\quad |\{v \in S_k,\ H_v^{\omega} = 1\}| - \sum_{v\in S_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p], \\ B'_1(T,S) &= r_2(k) + r_1(k) + |T_k| + \delta_{1,\omega} - 1 - \\ &\quad |\{v \in S_k,\ H_v^{\omega} = 1\}| - \sum_{v\in S_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_\omega(T,S) &= \mathrm{rg}_\omega(E^T_{K,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{K,\mathfrak{m}}) + \\
&\quad 1-\delta_{\emptyset,S}-|S_k|-\sum_{v\in S_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p],\\
B'_\omega(T,S) &= r_2(k)+|\{v\in T_k,\ H^\omega_v=1\}|+\\
&\quad 1-\delta_{1,\omega}-|S_k|-\sum_{v\in S_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p]\ ;
\end{aligned}$$

(ii) cas absolu :

$$B_1(T,S)=\mathrm{rg}_p(E^T_{\mathbb{Q},\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{\mathbb{Q},\mathfrak{m}})-|\{l\in S_{\mathbb{Q}},\ l\equiv 1(p)\}|-|S_{p,\mathbb{Q}}|,$$

$$B'_1(T,S)=|T_{\mathbb{Q}}|-|\{l\in S_{\mathbb{Q}},\ l\equiv 1(p)\}|-|S_{p,\mathbb{Q}}|,$$

$$B_\omega(T,S)=\mathrm{rg}_\omega(E^T_{K,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{K,\mathfrak{m}})+1-\delta_{\emptyset,S}-|S_{\mathbb{Q}}|-|S_{p,\mathbb{Q}}|,$$

$$B'_\omega(T,S)=|\{q\in T_{\mathbb{Q}},\ q\equiv 1(p)\}|+1-|S_{\mathbb{Q}}|-|S_{p,\mathbb{Q}}|\ ;$$

(iii) cas $G=1$:

$$B_p(T,S)=\mathrm{rg}_p(E^T_{K,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{K,\mathfrak{m}})+1-\delta_{\emptyset,S}-|S|-\sum_{\mathfrak{p}\in S_p}[K_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_p],$$

$$B'_p(T,S)=\tfrac{1}{2}[K:\mathbb{Q}]+|T|-|S|-\sum_{\mathfrak{p}\in S_p}[K_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_p].$$

Remarques 7.6. (i) Les minorants $-B_{\chi^*}(S,T)$, $-B'_{\chi^*}(S,T)$, sont donc parfaitement définis par les tableaux 7.4 et 7.5 précédents, à partir des expressions générales suivantes (cf. point (a) de l'introduction et 7.1) :

$$\begin{aligned}
B_{\chi^*}(S,T) &= \mathrm{rg}_{\chi^*}(E^S_{\mathfrak{n},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Sp}_{\mathfrak{n}})+\delta_{1,\chi}(1-\delta_{\emptyset,T})-\\
&\quad \sum_{v\in T_k}\rho_{v,\chi}-\psi(1)\sum_{v\in T_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p],\\
B'_{\chi^*}(S,T) &= \psi(1)r_2(k)+\sum_{v\in P\ell^r_{k,\infty}}\rho_{v,\chi^*}+\sum_{v\in S_k}\rho_{v,\chi^*}+\delta_{1,\chi}-\delta_{\omega,\chi}-\\
&\quad \sum_{v\in T_k}\rho_{v,\chi}-\psi(1)\sum_{v\in T_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p].
\end{aligned}$$

(ii) C'est bien l'involution * qui permet de parler de “Spiegelungssatz”, y compris en termes d'inégalités, et qui permet de ne donner, par exemple, que les majorations.

(iii) On vérifie facilement (en utilisant 5.14) que l'on a :

$$B'_\chi(T,S)+B'_{\chi^*}(S,T)=\psi(1)\sum_{v\in\Delta_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p],$$

ce qui indique la précision de l'encadrement standard, précision qui va de 0 (pour $\Delta_p=\emptyset$) à $\psi(1)[k:\mathbb{Q}]$ (pour $\Delta_p=P\ell_{K,p}$) et qui, dans le cas absolu ($k=\mathbb{Q}$), vaut 0 ou $\psi(1)$ selon que $p\in T\cup S$ ou non.

Théorème 7.7 ("Spiegelungssatz" général de Leopoldt pour $p \neq 2$).
($T = S = \emptyset$) *Soit K un corps de nombres contenant μ_p pour $p \neq 2$, et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p, fixant le corps k ; soit $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$. Alors on a :*

(α) $\chi \notin \{1, \omega\}$ *(cf. 7.4) :*

(i) *cas relatif général :*

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_K) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K) &\leq \mathrm{rg}_{\chi}(E_{K,p\text{-prim}}/E_K^p) \\ &\leq \psi(1) r_2(k) + \sum_{v \in P\ell^r_{k,\infty}} \rho_{v,\chi} \ ;\end{aligned}$$

(i') *cas relatif normal :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_K) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K) \leq \mathrm{rg}_{\chi}(E_{K,p\text{-prim}}/E_K^p) \leq$$
$$\psi(1) r_2(k) + \psi(1) |\{v \in P\ell^r_{k,\infty},\ H_v^{\chi} = 1\}| \ ;$$

(ii) *cas absolu général :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_K) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K) \leq \mathrm{rg}_{\chi}(E_{K,p\text{-prim}}/E_K^p) \leq \rho_{\infty,\chi} \ ;$$

(ii') *cas absolu normal :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_K) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K) \leq \mathrm{rg}_{\chi}(E_{K,p\text{-prim}}/E_K^p) \leq \psi(1) d_{\infty,\chi} \text{ [30]}.$$

(β) $\chi \in \{1, \omega\}$ *(cf. 7.5)* [31] *:*

(i) *cas relatif :*

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_{\omega}(C\ell_K) - \mathrm{rg}_p(C\ell_k) &\leq \mathrm{rg}_p(E_{k,p\text{-prim}}/E_k^p) \\ &\leq r_2(k) + r_1(k) + \delta_{1,\omega} - 1, \\ \mathrm{rg}_p(C\ell_k) - \mathrm{rg}_{\omega}(C\ell_K) &\leq \mathrm{rg}_{\omega}(E_{K,p\text{-prim}}/E_K^p) \\ &\leq r_2(k) + 1 - \delta_{1,\omega} \ ;\end{aligned}$$

(ii) *cas absolu :*

$$\mathrm{rg}_p(C\ell_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{rg}_{\omega}(C\ell_K) = 0 \text{ [32]}.$$

Exemples classiques 7.8. Nous allons en détailler deux :
(i) Analyse du théorème de Scholz [Sc].

Le cas le plus simple (pour $p \neq 2$) est, pour $p = 3$, celui où K est le composé de $\mathbb{Q}(\mu_3)$ et d'un corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ($d \in \mathbb{Z}$, $d \notin (\mathbb{Z})^2$, $d \notin -3(\mathbb{Z})^2$). Pour $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, on a 4 caractères $\mathbb{Q}_3$-irréductibles, 1, ω, χ, $\chi^* = \omega\chi$, qui sont de degré 1, et correspondent respectivement aux corps

[30] On rappelle que $d_{\infty,\chi} = 1$ (resp. 0) si K^{χ} est réel (resp. sinon) ; lorsque $K/\mathbb{Q}$ est abélienne, on dit plutôt que $d_{\infty,\chi} = 1$ (resp. 0) si χ est pair (resp. impair).

[31] On notera que pour $T = S = \emptyset$, le cas $G = 1$ donne une information vide.

[32] Résulte immédiatement du fait que ζ_p n'est pas p-primaire.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\mu_3)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$. On a (cf. 3.7, (14) et 3.8), compte tenu du fait que $C\ell_{K,1} = C\ell_{\mathbb{Q}} = 1$:

$$C\ell_{K,\chi} = C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})},\ C\ell_{K,\omega\chi} = C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}\ ;$$

enfin, $E_K = \langle \varepsilon, \zeta_3 \rangle E_K^3$, où ε est l'unité fondamentale du corps quadratique réel ; on peut toujours supposer que c'est $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, auquel cas on a :

$$(E_K/E_K^3)_\chi = \langle \varepsilon E_K^3 \rangle,\ (E_K/E_K^3)_{\omega\chi} = \{E_K^3\},$$

$$(E_K/E_K^3)_\omega = \langle \zeta_3 E_K^3 \rangle,\ (E_K/E_K^3)_1 = \{E_K^3\}\ ;$$

d'où, par la seule utilisation de 7.7, (α), (ii$'$) :

$$0 \leq \mathrm{rg}_{\omega\chi}(C\ell_K) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K) \leq \mathrm{rg}_\chi(E_{K,3\text{-prim}}/E_K^3) \leq 1,$$

qui se traduit donc ici (pour $d > 0$) par :

$$0 \leq \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}) - \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}) \leq 1$$

si ε est 3-primaire,

$$\mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}) = \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})$$

si ε n'est pas 3-primaire.

De façon plus précise, la relation 7.2, (ii), s'écrit ici (puisque $\rho_{\infty,\chi} = d_{\infty,\chi} = 1$) :

$$\text{(7)}\quad \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}) - \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}) = - r + \mathrm{rg}_3(Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),P\ell_3,3\text{-prim}}/(\mathbb{Q}(\sqrt{d}))^{\times}_{P\ell_3}$$

où $Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),Pl_3} = \{y \in (\mathbb{Q}(\sqrt{d}))^{\times}_{P\ell_3},\ (y) = \mathfrak{a}^3,\ \mathfrak{a} \in I_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),P\ell_3}\}$,
où r est le 3-rang de $C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ et où l'on a utilisé la suite exacte évidente :

$$1 \longrightarrow \langle \varepsilon \rangle / \langle \varepsilon^3 \rangle \longrightarrow Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),Pl_3}/(\mathbb{Q}(\sqrt{d}))^{\times 3}_{P\ell_3} \longrightarrow C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}[3] \longrightarrow 1.$$

Ecrivons :

$$Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),Pl_3} = \langle y_1, \dots, y_r, \varepsilon \rangle (\mathbb{Q}(\sqrt{d}))^{\times 3}_{P\ell_3}\ ;$$

on a $\mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}) - \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}) = 1$ si et seulement si tous les y_i ainsi que ε sont 3-primaires (sinon $Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),Pl_3,3\text{-prim}}$ est d'indice 3 dans $Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),Pl_3}$ et on obtient l'égalité des 3-rangs) ; on voit donc que la 3-primarité ou non de ε n'est qu'un cas particulier.

Par symétrie, on peut partir de la formule analogue utilisant le caractère $\chi^* = \omega\chi$:

$$\text{(8)}\quad \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}) - \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}) = - r' + \mathrm{rg}_3(Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),Pl_3,3\text{-prim}}/(\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}))^{\times 3}_{P\ell_3}),$$

avec, de façon analogue :

$$Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),Pl_3} = \langle y'_1, \dots , y'_{r'}\rangle(\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}))^{\times 3}_{P\ell_3},$$

où r' est le 3-rang de $C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}$ et où l'on a utilisé l'isomorphisme :

$$Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),Pl_3}/(\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}))^{\times 3}_{P\ell_3} \simeq C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}[3],$$

ce qui conduit au raisonnement suivant :
on a $\mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}) = \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})})$ si et seulement si tous les y'_j sont 3-primaires (sinon $Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),Pl_3,3\text{-prim}}$ est d'indice 3 dans $Y_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),Pl_3}$ et on obtient $\mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}) - \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}) = -1$). On voit ainsi que ces deux interprétations sont fondamentalement différentes au plan numérique mais similaires.

(ii) Analyse du résultat de Hecke [He1].

Il s'agit du cas $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$, $p \neq 2$, où l'on prend $G = \mathrm{Gal}\ (K/\mathbb{Q})$. D'après 7.7, ($\alpha$), (ii′), il vient, pour un caractère pair $\chi \neq 1$ (de la forme $\chi = \omega^k$, k pair, $0 < k < p-1$, avec $\chi^* = \omega\chi^{-1} = \omega^{1-k}$) :

$$0 \leq \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell) \leq \mathrm{rg}_{\chi}(E_{p\text{-prim}}/E^p) \leq 1.$$

Posons $(E/E^p)_\chi = \langle \varepsilon_\chi E^p\rangle$; on a alors :

$$0 \leq \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell) \leq 1$$

si ε_χ est p-primaire ,

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell) = \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell)$$

si ε_χ n'est pas p-primaire.

Considérons maintenant la formule donnée en 7.2, (ii) ; elle s'écrit ici (χ pair, $\chi \neq 1$) :

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell) = -r_\chi + \mathrm{rg}_{\chi}(Y_{P\ell_p,p\text{-prim}}/K^{\times p}_{P\ell_p}), \tag{9}$$

où $Y_{P\ell_p} = \{y \in K^{\times}_{P\ell_p},\ (y) = \mathfrak{a}^p,\ \mathfrak{a} \in I_{P\ell_p}\}$, où r_χ est le p-rang de $C\ell_\chi$ et où l'on a également utilisé la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \langle \varepsilon_\chi\rangle/\langle \varepsilon_\chi^p\rangle \longrightarrow (Y_{Pl_p}/K^{\times p}_{P\ell_p})_\chi \longrightarrow C\ell_\chi[p] \longrightarrow 1.$$

Posons :

$$(Y_{P\ell_p}/K^{\times p}_{P\ell_p})_\chi = \langle y_1, \dots , y_{r_\chi}, \varepsilon_\chi\rangle K^{\times p}_{P\ell_p}/K^{\times p}_{P\ell_p}\ ;$$

comme dans le cas du théorème de Scholz, on constate le cas particulier que constitue la p-primarité ou non de ε_χ.

On a alors $\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell) = 1$ si et seulement si tous les éléments de $(Y_{P\ell_p}/K^{\times p}_{P\ell_p})_\chi$ (i.e. $y_1, \dots , y_{r_\chi}, \varepsilon_\chi$) sont p-primaires (sinon $Y_{P\ell_p,p\text{-prim},\chi}$ est d'indice p dans $Y_{P\ell_p,\chi}$, et on a l'égalité des p-rangs).

Enfin on peut aussi utiliser la formule correspondant au caractère impair $\chi^* \neq \omega$:

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{rg}_\chi(C\ell) - \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell) = -r_{\chi^*} + \mathrm{rg}_{\chi^*}(Y_{P\ell_p, p\text{-prim}}/K^{\times p}_{P\ell_p}),$$

qui, en posant :

$$(Y_{P\ell_p}/K^{\times p}_{P\ell_p})_{\chi^*} = \langle y'_1, \dots, y'_{r_{\chi^*}} \rangle K^{\times p}_{P\ell_p}/K^{\times p}_{P\ell_p},$$

conduit à un raisonnement analogue, mais avec des valeurs numériques provenant de sous-corps imaginaires de K.

Rappelons quand même que l'on n'a pas d'exemple avec $r_\chi > 0$ (cf. [W]).

Revenons à la situation générale du théorème 7.3, particularisée au cas des corps à conjugaison complexe (cf. remarque du (c) de l'introduction) :

Théorème 7.9 (corps à conjugaison complexe). *Soit K un corps de nombres contenant μ_p, $p \neq 2$, et extension quadratique d'un corps totalement réel k. Soient T et S deux ensembles finis, disjoints, stables par la conjugaison complexe, de places finies de K. Alors on a :*

$$-B'_-(S,T) \overline{\overline{\leq}} - B_-(S,T) \overline{\overline{\leq}} \mathrm{rg}_-(C\ell^S_{K,T}) - \mathrm{rg}_p(C\ell^T_{k,S}) \overline{\overline{\leq}} B_+(T,S) \overline{\overline{\leq}} B'_+(T,S),$$

où l'on a posé (à partir des notations générales 7.1 et de 7.5, (i)) :

$$B_+(T,S) = \mathrm{rg}_p(E^T_{k,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Tp}_{k,\mathfrak{m}}) - |\{v \in S_k,\ H^K_v = 1\}| - \sum_{v \in S_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p],$$

$$B'_+(T,S) = [k : \mathbb{Q}] - 1 + |T_k| - |\{v \in S_k,\ H^K_v = 1\}| - \sum_{v \in S_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p],$$

$$B_-(S,T) = \mathrm{rg}_-(E^S_{K,\mathfrak{n},\Delta_p\text{-prim}}/E^{Sp}_{K,\mathfrak{n}}) + 1 - \delta_{\emptyset,S} - |T_k| - \sum_{v \in T_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p],$$

$$B'_-(S,T) = 1 + |\{v \in S_k,\ H^K_v = 1\}| - |T_k| - \sum_{v \in T_{p,k}} [k_v : \mathbb{Q}_p].$$

Remarque 7.10. Pour $T = S = \emptyset$, on retrouve un cas particulier de 7.7, (β), (i), à savoir :

$$\begin{aligned} -1 \ &\leq\ -\mathrm{rg}_p(\mu_{K,p\text{-prim}}/\mu^p_K) \leq \mathrm{rg}_-(C\ell_K) - \mathrm{rg}_p(C\ell_k) \\ &\leq\ \mathrm{rg}_p(E_{k,p\text{-prim}}/E^p_k) \leq [k : \mathbb{Q}] - 1, \end{aligned}$$

où μ_K est le p-groupe de torsion de $K^\times$ [33].

En général, on a $\mathrm{rg}_p(\mu_{K,p\text{-prim}}/\mu^p_K) = 0$; c'est par exemple le cas dès que $[K : \mathbb{Q}(\mu_K)]$ est étranger à p, ce qui donne alors :

$$0 \leq \mathrm{rg}_-(C\ell_K) - \mathrm{rg}_p(C\ell_k) \leq \mathrm{rg}_p(E_{k,p\text{-prim}}/E^p_k) \leq [k : \mathbb{Q}] - 1.$$

[33] On a utilisé le fait que, pour $p \neq 2$, on a $(E_K/E^p_K)_\omega = \mu_K/\mu^p_K$, dans le cas des corps à conjugaison complexe.

Ceci illustre le résultat historique de Hecke pour $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$, $k = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$ (i.e. $\mathrm{rg}_p(C\ell_K^-) \geq \mathrm{rg}_p(C\ell_k)$), pour lequel on a en fait :

$$0 \leq \mathrm{rg}_p(C\ell_K^-) - \mathrm{rg}_p(C\ell_k) \leq \mathrm{rg}_p(E_{k,p\text{-prim}}/E_k^p) \leq (p-3)/2,$$

résultat évidemment bien moins précis que celui de l'exemple 7.8, (ii).

Terminons le cas $p \neq 2$ par un exemple significatif du cas $\Delta_p = \emptyset$, où l'on a des égalités (cf. 7.3), et qui n'est qu'un cas particulier de 5.18 :

Théorème 7.11. ($T = P\ell_p$, $S = \emptyset$). *Soit K un corps de nombres contenant μ_p, $p \neq 2$, et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p, et de corps fixe k. Soit $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$; on a alors les résultats suivants :*

(α) $\chi \notin \{1, \omega\}$ *(cf. 7.4) :*

(i) *cas relatif général :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,P\ell_p}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{P\ell_p}) = \psi(1)r_2(k) + \sum_{v \in P\ell_{k,\infty}^r} \rho_{v,\chi} + \sum_{v \in P\ell_{k,p}} \rho_{v,\chi} \ ;$$

(i′) *cas relatif normal :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,P\ell_p}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{P\ell_p}) =$$
$$\psi(1)r_2(k) + \psi(1)|\{v \in P\ell_{k,\infty}^r,\ H_v^\chi = 1\}| + \psi(1)|\{v \in P\ell_{k,p},\ H_v^\chi = 1\}| \ ;$$

(ii) *cas absolu général :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,P\ell_p}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{P\ell_p}) = \rho_{\infty,\chi} + \rho_{p,\chi} \ ;$$

(ii′) *cas absolu normal :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,P\ell_p}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{P\ell_p}) = \psi(1)(d_{\infty,\chi} + d_{p,\chi}).$$

(β) $\chi \in \{1, \omega\}$ *(cf. 7.5) :*

(i) *cas relatif :*

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_\omega(C\ell_{K,P\ell_p}) - \mathrm{rg}_p(C\ell_k^{P\ell_p}) &= r_2(k) + r_1(k) + |P\ell_{k,p}| + \delta_{1,\omega} - 1,\\ \mathrm{rg}_p(C\ell_{k,P\ell_p}) - \mathrm{rg}_\omega(C\ell_K^{P\ell_p}) &= r_2(k) + |\{v \in P\ell_{k,p},\ H_v^\omega = 1\}| + \\ &\quad 1 - \delta_{1,\omega} \ ;\end{aligned}$$

(ii) *cas absolu :*

$$\mathrm{rg}_p(C\ell_{\mathbb{Q}}^{P\ell_p}) = 0,\ \mathrm{rg}_\omega(C\ell_{K,P\ell_p}) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_\omega(C\ell_K^{P\ell_p}) = 0,\ \mathrm{rg}_p(C\ell_{\mathbb{Q},P\ell_p}) = 1 \ ;$$

(iii) *cas $G = 1$:*

$$\mathrm{rg}_p(C\ell_{K,P\ell_p}) - \mathrm{rg}_p(C\ell_K^{P\ell_p}) = (1/2)[K : \mathbb{Q}] + |P\ell_{K,p}|.$$

Corollaire 7.12 (corps à conjugaison complexe). *Si en outre K est extension quadratique d'un corps totalement réel k, on a les égalités :*

$$\mathrm{rg}_-(C\ell_{K,P\ell_p}) - \mathrm{rg}_p(C\ell_k^{P\ell_p}) = [k:\mathbb{Q}] - 1 + |P\ell_{k,p}|,$$

$$\mathrm{rg}_p(C\ell_{k,P\ell_p}) - \mathrm{rg}_-(C\ell_K^{P\ell_p}) = 1 + |\{v \in P\ell_{k,p},\ H_v^K = 1\}|.$$

Exemples 7.13. Revenons encore une fois à la situation des exemples 7.8, en restant dans le cadre de 7.11 :

(α) ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$, $d > 0$, $p = 3$). Si χ est le caractère pair non trivial (i.e. $K^\chi = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $K^{\chi^*} = \mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$), il vient, par 7.11, ($\alpha$), (ii$'$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,P\ell_3}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{P\ell_3}) &= 1 + d_{3,\chi},\\ \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,P\ell_3}) - \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_K^{P\ell_3}) &= d_{3,\chi^*},\end{aligned}$$

où $d_{3,\chi}$ (resp. d_{3,χ^*}) est égal à 1 si 3 est décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$), et à 0 sinon ; comme $\mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q},P\ell_3}) = 1$, $\mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}}^{P\ell_3}) = 0$ (cf. 7.11, (β), (ii)), on peut, de manière équivalente, écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),P\ell_3}) - \mathrm{rg}_3(C\ell^{P\ell_3}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}) &= 1 + |P\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),3}|,\\ \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),P\ell_3}) - \mathrm{rg}_3(C\ell^{P\ell_3}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})}) &= |P\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),3}|.\end{aligned}$$

(β) ($K = \mathbb{Q}(\mu_p)$, $p \neq 2$). Si χ est pair non trivial, et en remarquant que $P\ell_{K,p}$ est réduit à un unique idéal principal, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,P\ell_p}) &= \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K) + 1,\\ \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,P\ell_p}) &= \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_K).\end{aligned}$$

En appliquant le théorème 5.21 aux premiers membres, on retrouve évidemment les raisonnements de l'exemple 7.8, (ii).

8. Enoncés dans le cas $p = 2$.

Le corps K peut maintenant être pris quelconque puisque l'hypothèse $\mu_2 \subset K$ est toujours vérifiée, et en particulier sa signature $(r_1(K), r_2(K))$ est arbitraire.

On reprend à nouveau les notations générales rappelées dans l'introduction, en tenant compte cette fois des places à l'infini. Le groupe d'automorphismes G de K est donc d'ordre impair, et le cas des corps à conjugaison complexe est ici exclu. Enfin, comme $\omega = 1$, des simplifications notables interviennent que nous résumons dans l'énoncé ci-dessous :

Proposition 8.1. *Dans le cas $p = 2$ on a les faits suivants :*
(i) *Pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$, on a $\chi^* = \chi^{-1}$, et $\rho_{v,\chi^*} = \rho_{v,\chi}$, pour tout $v \in P\ell_k$;*
(ii) *pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$ et tout $v \in P\ell_{k,\infty}$, on a $\rho_{v,\chi} = \psi(1)$, $\psi|\chi$.*

Le théorème 5.18 s'écrit :

$$(1) \qquad \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = \rho_\chi(T,S)\ ;$$

par le théorème 5.21, il vient, puisque

$$T^* = T \cup \Delta_\infty,\ S^* = S_0 \cup \Delta_2,\ C\ell_{\mathfrak{m}} = C\ell_{S_0}\ :$$

$$(2) \quad \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T^*}) = \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_2} U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/U_{\mathfrak{p}}^{(2e_{\mathfrak{p}})}\Big) - \mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*})),$$

d'où, puisque $Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*}$ contient $E_{\mathfrak{m}}^{T^*}$, et en ajoutant (1) et (2) :

$$(3) \quad \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T^*}) \leq \rho_\chi(T,S) + \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_2} U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/U_{\mathfrak{p}}^{(2e_{\mathfrak{p}})}\Big) - \mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(E_{\mathfrak{m}}^{T^*})).$$

On a la suite exacte :

$$(4) \qquad 1 \longrightarrow E_{\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}^{T^*}/E_{\mathfrak{m}}^{T^*2} \longrightarrow E_{\mathfrak{m}}^{T^*}/E_{\mathfrak{m}}^{T^*2} \longrightarrow \theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(E_{\mathfrak{m}}^{T^*}) \longrightarrow 1,$$

et la suite exacte analogue (où l'on a “remplacé”, en dénominateur, $T^* = T \cup \Delta_\infty$ par $T \cup P\ell_\infty^T$) :

$$(4') \qquad 1 \longrightarrow E_{\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}^{T^*}/E_{\mathfrak{m}}^{T\mathrm{ord}2} \longrightarrow E_{\mathfrak{m}}^{T^*}/E_{\mathfrak{m}}^{T\mathrm{ord}2} \longrightarrow \theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(E_{\mathfrak{m}}^{T^*}) \longrightarrow 1\ ;$$

elles permettent, à partir de (3), de majorer, dans un premier temps, $\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T^*})$ en fonction de $E_{\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}^{T\cup\Delta_\infty}$ modulo $(E_{\mathfrak{m}}^{T\cup\Delta_\infty})^2$ ou modulo $(E_{\mathfrak{m}}^{T\mathrm{ord}})^2$, selon les circonstances, sachant que l'on passe d'un point de vue à l'autre au moyen de la relation :

$$(4'') \ \mathrm{rg}_\chi(E_{\mathfrak{m}}^{T^*}/E_{\mathfrak{m}}^{T\mathrm{ord}2}) = \mathrm{rg}_\chi(E_{\mathfrak{m}}^{T^*}) + \delta_{1,\chi}(1-\delta(E_{\mathfrak{m}}^{T^*})) - \mathrm{rg}_\chi(\mathrm{sgn}^{\Delta_\infty}(E_{\mathfrak{m}}^{T\mathrm{ord}})),$$

où $\mathrm{sgn}^{\Delta_\infty}$ est la signature partielle :

$$K^\times \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S_\infty} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times+},$$

et où l'on vérifie que, comme dans le cas $p \neq 2$, on a $\delta(E_{\mathfrak{m}}^{T^*}) = \delta_{\emptyset,S}$ [34]. Ensuite, comme pour $p \neq 2$, on peut toujours minorer $\mathrm{rg}_\chi(\theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*}))$ par 0 dans (2).

Utilisons un système de notations analogue à 7.1 pour définir les majorants du type B_χ, B'_χ correspondant aux deux possibilités ci-dessus (cf. corollaire 5.15, proposition 5.12,(γ) et théorème 6.2) :

[34] En notant qu'ici, $S = \emptyset$ signifie $S_0 = S_\infty = \emptyset$.

Notations 8.2 ($p=2$). (i) On désigne par $E^{T^*}_{K,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}$ le groupe des T^*-unités, congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}$, Δ_2-primaires, de K (cf. 2.6, (ii), (iii)).
(ii) Pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$ on pose (en tenant compte de 8.1) :

$$\begin{aligned} B_\chi(T,S) &= \mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{K,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T^*2}_{K,\mathfrak{m}}) + \delta_{1,\chi}(1-\delta_{\emptyset,S}) - \sum_{v\in S_{0,k}} \rho_{v,\chi} - \\ &\quad \psi(1)\sum_{v\in S_{2,k}}[k_v:\mathbb{Q}_2] - \psi(1)|S_{\infty,k}|, \\ B'_\chi(T,S) &= \psi(1)r_2(k) + \sum_{v\in T_k}\rho_{v,\chi} - \sum_{v\in S_{0,k}}\rho_{v,\chi} - \\ &\quad \psi(1)\sum_{v\in S_{2,k}}[k_v:\mathbb{Q}_2] + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}|. \end{aligned}$$ [35]

Remarques 8.3. (i) Comme dans le cas $p \neq 2$, si $\Delta_2 = \emptyset$, on a $B_\chi(T,S) = B'_\chi(T,S) = \rho_\chi(T,S)$, et les inégalités correspondantes sont des égalités (ce que nous avons convenu de rappeler par le symbole $\overline{\overline{\leq}}$) ; de même, par changement de $(T,S) = (T, S_0 \cup S_\infty)$ en $(S_0, T\cup\Delta_\infty)$ et par échange de χ et χ^{-1}, l'ensemble Δ_2 est inchangé et on obtient la minoration correspondante de $\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^S_T) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{T\cup\Delta_\infty}_{S_0})$ par $-B_{\chi^{-1}}(S_0, T\cup\Delta_\infty)$ et $-B'_{\chi^{-1}}(S_0, T\cup\Delta_\infty)$.
(ii) Si l'on utilise, dans les expressions des B_χ, le terme :

$$\mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T\mathrm{ord}2}_{\mathfrak{m}}),$$

la relation (4″) montre qu'il suffit de remplacer partout la quantité :

$$\mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T^*2}_{\mathfrak{m}}) + \delta_{1,\chi}(1-\delta_{\emptyset,S})$$

par :

$$\mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T\mathrm{ord}2}_{\mathfrak{m}}) + \mathrm{rg}_\chi(\mathrm{sgn}^{\Delta_\infty}(E^{T\mathrm{ord}}_{\mathfrak{m}})).$$

(iii) On a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow Y^{T^*}_{S^*,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/K^{\times 2}_{S^*} \longrightarrow Y^{T^*}_{S^*,\mathfrak{m}}/K^{\times 2}_{S^*} \longrightarrow \theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}(Y^{T^*}_{S^*,\mathfrak{m}}) \longrightarrow 1,$$

car $Y^{T^*}_{S^*,\mathfrak{m}^*} = Y^{T^*}_{S^*,\mathfrak{m},\Delta_p\text{-prim}}$, ce qui conduit à la relation suivante (en rapprochant (1) et (2)) :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^S_T) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{T^*}_{S_0}) &= \psi(1)r_2(k) + \sum_{v\in T_k}\rho_{v,\chi} - \sum_{v\in S_{0,k}}\rho_{v,\chi} - \\ &\quad \psi(1)\sum_{v\in S_{2,k}}[k_v:\mathbb{Q}_2] + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}| - \\ &\quad \mathrm{rg}_\chi(Y^{T^*}_{S^*,\mathfrak{m}}/K^{\times 2}_{S^*}) + \mathrm{rg}_\chi(Y^{T^*}_{S^*,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/K^{\times 2}_{S^*}). \end{aligned}$$

[35] Où l'on a utilisé la relation $r_1(k) - |S_{\infty,k}| = |\Delta_{\infty,k}|$.

On a alors l'énoncé général suivant :

Théorème 8.4 (inégalités générales du "Spiegelungssatz" pour $p = 2$).

Soit K un corps de nombres et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre impair. Soient $T \subset P\ell_{K,0}$, $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell^{r}_{K,\infty}$, deux ensembles finis, disjoints, G-invariants, de places de K.

Alors, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$ on a (cf. 8.2 et tableaux 8.5 et 8.6) :

$$-B'_{\chi^{-1}}(S_0, T\cup\Delta_\infty) \overset{=}{\leq} -B_{\chi^{-1}}(S_0, T\cup\Delta_\infty) \overset{=}{\leq} \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,T}^{S_0\cup S_\infty}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S_0}^{T\cup\Delta_\infty})$$
$$\overset{=}{\leq} B_\chi(T, S_0 \cup S_\infty) \overset{=}{\leq} B'_\chi(T, S_0 \cup S_\infty).$$

Précisons alors, en fonction des différentes situations décrites dans le point (c) de l'introduction, les expressions des majorants précédents :

Tableau 8.5 (Tableau des B_χ, B'_χ, $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$, $\chi \neq 1$).

(i) cas relatif général :

$$\begin{aligned} B_\chi(T,S) &= \mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{K,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T^*2}_{K,\mathfrak{m}}) - \sum_{v\in S_{0,k}} \rho_{v,\chi} \\ &\quad -\psi(1) \sum_{v\in S_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2] - \psi(1)|S_{\infty,k}|, \\ B'_\chi(T,S) &= \psi(1) r_2(k) + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi} - \sum_{v\in S_{0,k}} \rho_{v,\chi} - \\ &\quad \psi(1) \sum_{v\in S_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2] + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}| \ ; \end{aligned}$$

(i′) cas relatif normal :

$$\begin{aligned} B_\chi(T,S) &= \mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{K,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T^*2}_{K,\mathfrak{m}}) - \psi(1)|\{v \in S_{0,k},\ H_v^\chi = 1\}| - \\ &\quad \psi(1) \sum_{v\in S_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2] - \psi(1)|S_{\infty,k}|, \\ B'_\chi(T,S) &= \psi(1) r_2(k) + \psi(1)|\{v \in T_k,\ H_v^\chi = 1\}| - \\ &\quad \psi(1)|\{v \in S_{0,k},\ H_v^\chi = 1\}| - \\ &\quad \psi(1) \sum_{v\in S_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2] + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}| \ ; \end{aligned}$$

(ii) cas absolu général :

$$\begin{aligned} B_\chi(T,S) &= \mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{K,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T^*2}_{K,\mathfrak{m}}) - \\ &\quad \sum_{l\in S_{0,\mathbb{Q}}} \rho_{l,\chi} - \psi(1)|S_{2,\mathbb{Q}}| - \psi(1)|S_{\infty,\mathbb{Q}}|, \\ B'_\chi(T,S) &= \sum_{q\in T_{\mathbb{Q}}} \rho_{q,\chi} - \sum_{l\in S_{0,\mathbb{Q}}} \rho_{l,\chi} - \psi(1)|S_{2,\mathbb{Q}}| + \psi(1)|\Delta_{\infty,\mathbb{Q}}| \ ; \end{aligned}$$

(ii′) cas absolu normal :

$$\begin{aligned}B_\chi(T,S) &= \mathrm{rg}_\chi(E^{T^*}_{K,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T^*2}_{K,\mathfrak{m}}) - \psi(1)|\{l \in S_{0,\mathbb{Q}}, H^\chi_l = 1\}|\\ &\quad -\psi(1)|S_{2,\mathbb{Q}}| - \psi(1)|S_{\infty,\mathbb{Q}}|,\\ B'_\chi(T,S) &= \psi(1)|\{q \in T_\mathbb{Q},\ H^\chi_q = 1\}| - \psi(1)|\{l \in S_{0,\mathbb{Q}}, H^\chi_l = 1\}|\\ &\quad -\psi(1)|S_{2,\mathbb{Q}}| + \psi(1)|\Delta_{\infty,\mathbb{Q}}|.\end{aligned}$$

Tableau 8.6 (Tableau des $B_1,\ B'_1$ $(p=2)$).

(i) cas relatif :

$$\begin{aligned}B_1(T,S) &= \mathrm{rg}_2(E^{T^*}_{k,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T^*2}_{k,\mathfrak{m}}) + 1 - \delta_{\emptyset,S} - |S_{0,k}| -\\ &\quad \sum_{v\in S_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2] - |S_{\infty,k}|,\\ B'_1(T,S) &= r_2(k) + |T_k| - |S_{0,k}| - \sum_{v\in S_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2] + |\Delta_{\infty,k}|\ ;\end{aligned}$$

(ii) cas absolu :

$$\begin{aligned}B_1(T,S) &= \mathrm{rg}_2(E^{T^*}_{\mathbb{Q},\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T^*2}_{\mathbb{Q},\mathfrak{m}}) +\\ &\quad 1 - \delta_{\emptyset,S} - |S_{0,\mathbb{Q}}| - |S_{2,\mathbb{Q}}| - |S_{\infty,\mathbb{Q}}|,\\ B'_1(T,S) &= |T_\mathbb{Q}| - |S_{0,\mathbb{Q}}| - |S_{2,\mathbb{Q}}| + |\Delta_{\infty,\mathbb{Q}}|\ ;\end{aligned}$$

(iii) cas $G=1$:

$$\begin{aligned}B_2(T,S) &= \mathrm{rg}_2(E^{T^*}_{K,\mathfrak{m},\Delta_2\text{-prim}}/E^{T^*2}_{K,\mathfrak{m}}) + 1 - \delta_{\emptyset,S} - |S_0| -\\ &\quad \sum_{\mathfrak{p}\in S_2}[K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_2] - |S_\infty|,\\ B'_2(T,S) &= r_2(K) + |T| - |S_0| - \sum_{\mathfrak{p}\in S_2}[K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_2] + |\Delta_\infty|.\end{aligned}$$

Remarques 8.7. (i) Pour obtenir les inégalités du théorème 8.4, on a seulement agi sur l'ensemble Δ_2 (passage de $C\ell^{T\cup\Delta_\infty}_{\mathfrak{m}^*}$ à $C\ell^{T\cup\Delta_\infty}_{S_0}$), ce qui fait que, contrairement au cas $p \neq 2$, la symétrie entre $C\ell^{S_0\cup S_\infty}_T$ et $C\ell^{T\cup\Delta_\infty}_{S_0}$ est différente au niveau des places à l'infini ; par exemple, dans le cas limite où $S_\infty = \emptyset$, on compare $C\ell^{S_0\mathrm{res}}_T$ et $C\ell^{T\mathrm{ord}}_{S_0}$. Nous reviendrons sur ce fait pour obtenir des égalités spécifiques pour le cas particulier des groupes de classes usuels $C\ell^{\mathrm{res}}$ et $C\ell^{\mathrm{ord}}$ (cf. 8.12).

Enfin, dans les cas absolus ($k = \mathbb{Q}$), la seule alternative au niveau des ensembles de places à l'infini est $S_\infty = \emptyset$ ou $P\ell^r_{K,\infty}$, ce qui fait que l'on compare nécessairement sens restreint et sens ordinaire.

(ii) Comme pour $p \neq 2$, les minorants $-B_{\chi^{-1}}(S_0, T \cup \Delta_\infty)$, $-B'_{\chi^{-1}}(S_0, T \cup \Delta_\infty)$ sont précisés par les tableaux 8.5 et 8.6, à partir des expressions générales suivantes :

$$\begin{aligned} B_{\chi^{-1}}(S_0, T \cup \Delta_\infty) &= \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(E^S_{\mathfrak{n},\Delta_2\text{-prim}}/E^{S2}_{\mathfrak{n}}) + \delta_{1,\chi}(1 - \delta_{\emptyset, T\cup\Delta_\infty}) - \\ &\quad \sum_{v \in T_k} \rho_{v,\chi} - \psi(1) \sum_{v \in T_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2] - \psi(1)|\Delta_{\infty,k}|, \\ B'_{\chi^{-1}}(S_0, T \cup \Delta_\infty) &= \psi(1) r_2(k) + \sum_{v \in S_{0,k}} \rho_{v,\chi} - \sum_{v \in T_k} \rho_{v,\chi} - \\ &\quad \psi(1) \sum_{v \in T_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2] + \psi(1)|S_{\infty,k}|. \end{aligned}$$

On vérifie que l'on a toujours :

$$B'_\chi(T, S_0 \cup S_\infty) + B'_{\chi^{-1}}(S_0, T \cup \Delta_\infty) = \psi(1) \sum_{v \in \Delta_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2].$$

Citons maintenant l'analogue du théorème de réflexion de Leopoldt dans le cas $p = 2$:

Théorème 8.8 ("Spiegelungssatz" de Leopoldt pour $p = 2$, $T = S_0 = \emptyset$). *Soit K un corps de nombres et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre impair, de corps fixe k. Soit $S_\infty \subseteq P\ell^r_{K,\infty}$, stable par G, et soit $\Delta_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty$. Soit $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$; alors on a* [36] *:*

(α) $\chi \neq 1$ *:*

(i) *cas relatif :*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{S_\infty}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{\Delta_\infty}) &\leq \mathrm{rg}_\chi(E^{\Delta_\infty}_{K,2\text{-prim}}/E_K^{\Delta_\infty 2}) - \psi(1)|S_{\infty,k}| \\ &\leq \psi(1)(r_2(k) + |\Delta_{\infty,k}|) \ ; \end{aligned}$$

(ii) *cas absolu :*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) &\leq \mathrm{rg}_\chi(E^{\mathrm{ord}}_{K,2\text{-prim}}/E_K^{\mathrm{ord}2}) \leq \psi(1), \\ \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{\mathrm{res}}) &\leq \mathrm{rg}_\chi(E^{\mathrm{pos}}_{K,2\text{-prim}}/E_K^{\mathrm{pos}2}) - \psi(1) \leq 0. \end{aligned}$$

(β) $\chi = 1$, $G = 1$ [37] *:*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{S_\infty}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\Delta_\infty}) &\leq \mathrm{rg}_2(E^{\Delta_\infty}_{K,2\text{-prim}}/E_K^{\Delta_\infty 2}) + 1 - \delta_{\emptyset,S_\infty} - |S_\infty| \\ &\leq r_2(K) + |\Delta_\infty|. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier $\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^{S_0\cup S_\infty}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T\cup\Delta_\infty})$, comme fonction de S_∞ (c'est la différence qui fait l'objet du "Spiegelungssatz" proprement dit pour $p = 2$ (cf. théorèmes 8.4 et 8.8)) ; nous allons montrer

[36] Dans les majorations suivantes, on peut utiliser la remarque 8.3, (ii).

[37] Supposer $G = 1$ n'est pas restrictif puisque cette formule de 2-rangs vaut en fait pour tout corps de nombres K.

que cette fonction est décroissante et que l'on contrôle son "module de continuité", ce qui conduit à des inégalités très fortes [38].

On considère les sous-ensembles de places T et S_0 de $P\ell_{K,0}$, T et S_0 disjoints et stables par G, et pour $S_\infty \subseteq S'_\infty \subseteq P\ell^r_{K,\infty}$, S_∞, S'_∞ stables par G, on pose :

$$S = S_0 \cup S_\infty,\ S' = S_0 \cup S'_\infty,\ \Delta_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty,\ \Delta'_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S'_\infty,$$

$$T^* = T \cup \Delta_\infty,\ S^* = S_0 \cup \Delta_2,\ T'^* = T \cup \Delta'_\infty.$$

D'après 5.18, il vient, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$:

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = \rho_\chi(T,S),$$

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^{S'}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T'^*}) = \rho_\chi(T,S'),$$

et on s'intéresse au calcul de la différence :

$$(5)\quad \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^{S'}) - (\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T'^*})) = \rho_\chi(T,S) - \rho_\chi(T,S').$$

Pour cela on utilise encore l'énoncé 5.21 qui conduit (cf. (2)) à :

$$(5')\qquad \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T^*}) - (\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T'^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T'^*})) = -\mathrm{rg}_\chi(\theta(Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*})) + \mathrm{rg}_\chi(\theta(Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T'^*})),$$

où $\theta = \theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}^{\Delta_\infty,\Delta_\infty} = \theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}^{\Delta'_\infty,\Delta'_\infty} = \theta_{\mathfrak{m}^*,\mathfrak{m}}$ est l'application :

$$\theta : K_{S^*}^{\times 2} K_{S^*,\mathfrak{m}}^{\times} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_2} U_\mathfrak{p}^{(1)}/U_\mathfrak{p}^{(1)2}U_\mathfrak{p}^{(2e_\mathfrak{p})}\ ;$$

on a finalement, en réordonnant les termes de (5′) :

$$(6)\quad (\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T'^*})) - (\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T'^*})) = -\,\mathrm{rg}_\chi(\theta(Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*})/\theta(Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T'^*})),$$

puisque l'on a $Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T'^*} \subseteq Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*}$. On a donc obtenu (en additionnant (5) et (6)) :

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_T^{S'}) - (\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T^*}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{S_0}^{T'^*})) =$$

$$\rho_\chi(T,S) - \rho_\chi(T,S') - \mathrm{rg}_\chi(\theta(Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T^*})/\theta(Y_{S^*,\mathfrak{m}}^{T'^*})) \overline{\overline{\leq}}$$

$$\rho_\chi(T,S) - \rho_\chi(T,S') \overline{\overline{\leq}} \psi(1)\ |S'_{\infty,k} - S_{\infty,k}|\ \text{(cf. corollaire 5.15)}.$$

D'où le résultat suivant :

[38]Etude qui n'a de sens que si K n'est pas totalement imaginaire.

Théorème 8.9. *Soit K un corps de nombres et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre impair, de corps fixe k. Soient T, $S = S_0 \cup S_\infty$, $S' = S_0 \cup S'_\infty$, avec T, $S_0 \subseteq P\ell_{K,0}$, $T \cap S_0 = \emptyset$, $S_\infty \subseteq S'_\infty \subseteq P\ell^r_{K,\infty}$, T, S, S' stables par G ; on pose $\Delta_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty$, $\Delta'_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S'_\infty$. Soit $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$; on a alors (chaque terme entre crochets étant ≥ 0) :*

(i) *cas relatif :*

$$[\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,T}^{S_0 \cup S_\infty}) - \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,T}^{S_0 \cup S'_\infty})] + [\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S_0}^{T \cup \Delta'_\infty}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S_0}^{T \cup \Delta_\infty})] \ \overset{=}{\leq}\ \psi(1)|S'_{\infty,k} - S_{\infty,k}| \ ;$$

(ii) *cas absolu :*

$$[\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,T}^{S_0 \mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,T}^{S_0 \mathrm{ord}})] + [\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S_0}^{T \mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S_0}^{T \mathrm{ord}})] \overset{=}{\leq} \psi(1) \ ;$$

(iii) *cas $G = 1$:*

$$[\mathrm{rg}_2(C\ell_{K,T}^{S_0 \cup S_\infty}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_{K,T}^{S_0 \cup S'_\infty})] + [\mathrm{rg}_2(C\ell_{K,S_0}^{T \cup \Delta'_\infty}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_{K,S_0}^{T \cup \Delta_\infty})] \ \overset{=}{\leq}\ |S'_\infty - S_\infty|.$$

Corollaire 8.10. *($S_\infty = \emptyset$, $S'_\infty = P\ell^r_{K,\infty}$, $S = S_0$). On a dans tous les cas :*

$$[\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,T}^{S \mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,T}^{S \mathrm{ord}})] + [\mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S}^{T \mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S}^{T \mathrm{ord}})] \overset{=}{\leq} \psi(1) r_1(k).$$

Remarque 8.11. (i) L'inégalité générale du théorème 8.9 peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,T}^{S_0 \cup S_\infty}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S_0}^{T \cup \Delta_\infty}) - (\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,T}^{S_0 \cup S'_\infty}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,S_0}^{T \cup \Delta'_\infty})) \ \overset{=}{\leq}\ \psi(1)|S'_{\infty,k} - S_{\infty,k}|,$$

ce qui exprime bien le module de continuité évoqué plus haut.
(ii) On peut aussi minorer la différence ci-dessus par

$$\psi(1)|S'_{\infty,k} - S_{\infty,k}| - \psi(1) \sum_{v \in \Delta_{2,k}} [k_v : \mathbb{Q}_2],$$

ce qui a un intérêt dès que cette quantité est positive.

Le cas $T = S_0 = \emptyset$ du corollaire ci-dessus conduit, pour les groupes de classes, à des inégalités connues qui ont été obtenues par différents auteurs et par des procédés particuliers (cf. [AF], [Ta]), et c'est dans [O2] qu'une preuve de type “théorème de réflexion” en a ensuite été donnée :

Théorème 8.12. *Soit K un corps de nombres et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre impair, de corps fixe k. Soit $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$. On a alors :*

(i) *cas relatif général :*

$$\begin{aligned} 0 &\le [\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{ord}})] + [\mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{ord}})] \\ &\le \psi(1) r_1(k) \qquad \textit{si } \chi \neq \chi^{-1}, \end{aligned}$$

$$0 \le \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \le (1/2)\psi(1) r_1(k) \qquad \textit{sinon ;}$$

(ii) *cas absolu :*

$$\begin{aligned} 0 &\le [\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{ord}})] + [\mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{ord}})] \\ &\le \psi(1) \qquad \textit{si } \chi \neq \chi^{-1}, \end{aligned}$$

$$0 \le \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \le (1/2)\psi(1) \qquad \textit{sinon ;}$$

(iii) *cas $G = 1$:*

$$0 \le \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \le (1/2) r_1(K).$$

Exemples 8.13. (i) Si K est un corps quadratique réel, on a :

$$0 \le \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \le 1.$$

(ii) Si K est un corps cubique totalement réel (non cyclique), alors on a :

$$0 \le \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \le 1,$$

et si K est non totalement réel, on a :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{res}}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}).$$

(iii) Si $K/\mathbb{Q}$ est une extension abélienne de degré impair, on a (relativement à $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$) :

$$0 \le [\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{ord}})] + [\mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{ord}})] \le 1.$$

Ainsi, si $\chi \neq \chi^{-1}$, on a l'alternative :

$$\mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) = \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \ \text{ ou } \ \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \ ;$$

si $\chi = \chi^{-1}$, on a :

$$\mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{res}}) = \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \text{ [39] ;}$$

en particulier, c'est le cas des corps cubiques cycliques, pour $\chi = 1$ et pour l'unique $\chi \neq 1$, ce qui s'écrit aussi dans ce cas :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{res}}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}).$$

L'exemple du corps cubique K (totalement réel, non cyclique), défini par le polynôme $X^3 - 4X - 1$, montre que la relation $\mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{res}}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) + 1$ peut avoir lieu (cf. (ii)) : en effet, on a $E_K^{\mathrm{ord}} = \langle -1, \varepsilon, \eta \rangle$, où $\mathrm{Irr}(\varepsilon, \mathbb{Q}) =$

[39] On rappelle que, dans le cas abélien, $\chi = \chi^{-1}$ si et seulement si -1 est une puissance de 2 modulo l'ordre de $\psi|\chi$.

$X^3 - 4X - 1$ et $\eta = \varepsilon + 2$, et on vérifie que ε (resp. η) est de signature $(+1, -1, -1)$ (resp. $(+1, +1, +1)$) ; comme $C\ell_K^{\text{ord}} = 1$, on a bien la relation annoncée.

Remarque 8.14 (cf. [O2]). Posons $\varphi = \chi$ ou χ^{-1} ; les suites exactes :

$$1 \longrightarrow P_K/P_K^{\text{pos}} \longrightarrow C\ell_K^{\text{res}}[2] \longrightarrow C\ell_K^{\text{ord}}[2],$$

$$1 \longrightarrow E_K^{\text{ord}}/E_K^{\text{pos}} \longrightarrow K^\times/K^{\times\text{pos}} \longrightarrow P_K/P_K^{\text{pos}} \longrightarrow 1,$$

conduisent à :

$$\text{rg}_\varphi(C\ell_K^{\text{res}}) - \text{rg}_\varphi(C\ell_K^{\text{ord}}) \leq \psi(1)r_1(k) - \text{rg}_\varphi(E_K^{\text{ord}}/E_K^{\text{pos}}),$$

et on a :

$$\text{rg}_\varphi(E_{K,\text{2-prim}}^{\text{ord}}/E_K^{\text{ord}2}) \leq \text{rg}_\varphi(W_K/K^{\times 2}) = \text{rg}_{\varphi^*}(C\ell_K^{\text{res}})$$

(cf. proposition 5.6).

On déduit alors facilement du théorème 8.12 et des relations précédentes les inégalités suivantes :

(i) cas général et $\chi \neq \chi^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\text{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\text{ord}}) + \text{rg}_\chi(C\ell_K^{\text{ord}}) &\geq \psi(1)r_1(k) - \text{rg}_{\chi^{-1}}(E_K^{\text{ord}}/E_K^{\text{pos}}) \\
&\quad -\text{rg}_\chi(E_K^{\text{ord}}/E_K^{\text{pos}}) \\
&= \text{rg}_{\chi^{-1}}(E_K^{\text{pos}}/E_K^{\text{ord}2}) + \text{rg}_\chi(E_K^{\text{pos}}/E_K^{\text{ord}2}) \\
&\quad -\psi(1)[k:\mathbb{Q}] \;;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{\text{ord}}) + \text{rg}_\chi(C\ell_K^{\text{ord}}) &\geq \text{rg}_{\chi^{-1}}(E_{K,\text{2-prim}}^{\text{ord}}/E_K^{\text{ord}2}) \\
&\quad +\text{rg}_\chi(E_{K,\text{2-prim}}^{\text{ord}}/E_K^{\text{ord}2}) - \psi(1)r_1(k) \\
&= \psi(1)r_2(k) - \text{rg}_{\chi^{-1}}(E_K^{\text{ord}}/E_{K,\text{2-prim}}^{\text{ord}}) \\
&\quad -\text{rg}_\chi(E_K^{\text{ord}}/E_{K,\text{2-prim}}^{\text{ord}}) \;;
\end{aligned}$$

(ii) cas général et $\chi = \chi^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\text{rg}_\chi(C\ell_K^{\text{ord}}) &\geq \frac{1}{2}\psi(1)r_1(k) - \text{rg}_\chi(E_K^{\text{ord}}/E_K^{\text{pos}}) \\
&= \text{rg}_\chi(E_K^{\text{pos}}/E_K^{\text{ord}2}) - \frac{1}{2}\psi(1)[k:\mathbb{Q}] \;; \\
\text{rg}_\chi(C\ell_K^{\text{ord}}) &\geq \text{rg}_\chi(E_{K,\text{2-prim}}^{\text{ord}}/E_K^{\text{ord}2}) - \frac{1}{2}\psi(1)r_1(k) \\
&= \frac{1}{2}\psi(1)r_2(k) - \text{rg}_\chi(E_K^{\text{ord}}/E_{K,\text{2-prim}}^{\text{ord}}) \;;
\end{aligned}$$

(iii) cas $G = 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) &\geq \frac{1}{2}r_1(K) - \mathrm{rg}_2(E_K^{\mathrm{ord}}/E_K^{\mathrm{pos}}) \\ &= \mathrm{rg}_2(E_K^{\mathrm{pos}}/E_K^{\mathrm{ord2}}) - \frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}] \ ; \\ \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) &\geq \mathrm{rg}_2(E_{K,2\text{-prim}}^{\mathrm{ord}}/E_K^{\mathrm{ord2}}) - \frac{1}{2}r_1(K) \\ &= \frac{1}{2}r_2(K) - \mathrm{rg}_2(E_K^{\mathrm{ord}}/E_{K,2\text{-prim}}^{\mathrm{ord}}). \end{aligned}$$

Exemples 8.15. (i) Si K est un corps cubique totalement réel (non cyclique), alors on a $\mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \geq \mathrm{rg}_2(E_K^{\mathrm{pos}}/E_K^{\mathrm{ord2}}) - \frac{3}{2}$; donc dès que $E_K^{\mathrm{ord}} = \langle -1, \varepsilon, \eta \rangle$, avec ε, η totalement positives, on a $\mathrm{rg}_2(C\ell_K^{\mathrm{ord}}) \geq 1$.
(ii) Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne de degré impair (donc totalement réelle) et soit $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$, $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$; si $\chi \neq \chi^{-1}$, alors dès que $\mathrm{rg}_\chi(E_K^{\mathrm{pos}}/E_K^{\mathrm{ord2}}) + \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(E_K^{\mathrm{pos}}/E_K^{\mathrm{ord2}}) \geq 2$, l'un des groupes $C\ell_{K,\chi}^{\mathrm{ord}}$ ou $C\ell_{K,\chi^{-1}}^{\mathrm{ord}}$ est non trivial ; si $\chi = \chi^{-1}$, alors $C\ell_{K,\chi}^{\mathrm{ord}}$ est non trivial dès que $(E_K^{\mathrm{pos}}/E_K^{\mathrm{ord2}})_\chi$ est non triviale. Par exemple, si K est un corps cubique cyclique, on a $C\ell_K^{\mathrm{ord}} \neq 1$ dès que l'unité fondamentale de K est totalement positive (cf. [G5]) ; bien entendu ce n'est pas nécessaire (cf. exemple 8.17).

Généralisation de résultats de Lagarias et de Haggenmüller ([La], [Hag]).

Soit K un corps de nombres totalement réel et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre impair et de corps fixe k ; on pose pour simplifier $[k:\mathbb{Q}] = d$. Soit $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$, soit φ le caractère $\chi + \chi^{-1}$ (resp. χ) si $\chi^{-1} \neq \chi$ (resp. $\chi^{-1} = \chi$) et soit $\rho = 2\psi(1)$ (resp. $\psi(1)$), $\psi | \chi$; pour un $\mathbb{Z}[G]$-module M, on pose alors :

$$\mathrm{rg}_\varphi(M) = \mathrm{rg}_\chi(M) + \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(M) \text{ (resp. } \mathrm{rg}_\chi(M)).$$

On applique les théorèmes 5.18 et 5.21 aux données suivantes :
(i) (5.18, (i), $T = \emptyset$, $S = P\ell_\infty^r$) :

$$\mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell_{(4)}^{\mathrm{res}}) = -\rho d \ ;$$

(ii) (5.18, (i), $T = \emptyset$, $S = \emptyset$) :

$$\mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell_{(4)}^{\mathrm{ord}}) = 0 \ ;$$

(iii) (5.21, $T = P\ell_2$, $T' = \emptyset$, $\mathfrak{f} = (4)$, $\mathfrak{f}' = (1)$, $S = S' = P\ell_\infty^r$) :

$$\mathrm{rg}_\varphi(C\ell_{(4)}^{\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}) = \rho d - \mathrm{rg}_\varphi(\theta_{(4)}(Y_{P\ell_2}^{\mathrm{ord}})),$$

avec :

$$\theta_{(4)} : K_{P\ell_2}^\times \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}|2} U_\mathfrak{p}^{(1)}/U_\mathfrak{p}^{(1)2} U_\mathfrak{p}^{(2e_\mathfrak{p})},$$

$$Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2} = \{\alpha \in K^{\times}_{P\ell_2},\ (\alpha) = \mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a} \in I_{P\ell_2}\}\ ;$$

(iv) (5.21, $T = P\ell_2$, $T' = \emptyset$, $\mathfrak{f} = (4)$, $\mathfrak{f}' = (1)$, $S = S' = \emptyset$) :

$$\mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{res}}_{(4)}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{res}}) = \rho d - \mathrm{rg}_\varphi(\theta_{(4)}(Y^{\mathrm{pos}}_{P\ell_2})),$$

où :

$$Y^{\mathrm{pos}}_{P\ell_2} = \{\alpha \in K^{\times\mathrm{pos}}_{P\ell_2},\ (\alpha) = \mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a} \in I_{P\ell_2}\}\ ;$$

(v) (5.21, $T = T' = \emptyset$, $S = \emptyset$, $S' = P\ell^r_\infty$) :

$$\mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}) = \rho d - \mathrm{rg}_\varphi(\mathrm{sgn}(Y^{\mathrm{ord}})),$$

où sgn est la fonction signature usuelle sur $K^\times$, et où :

$$Y^{\mathrm{ord}} = \{\alpha \in K^{\times},\ (\alpha) = \mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a} \in I\}\ ^{40}\ ;$$

(vi) (5.21, $T = T' = P\ell_2$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}' = (4)$, $S = \emptyset$, $S' = P\ell^r_\infty$) :

$$\mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{res}}_{(4)}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}_{(4)}) = \rho d - \mathrm{rg}_\varphi(\mathrm{sgn}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2,2\text{-prim}})),$$

où (cf. 5.25, (iii))) :

$$Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2,2\text{-prim}} = \{\alpha \in K^{\times 2}_{P\ell_2} K^{\times}_{P\ell_2,(4)},\ (\alpha) = \mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a} \in I_{P\ell_2}\}.$$

(vii) (5.21, $T = P\ell_2$, $T' = \emptyset$, $\mathfrak{f} = (4)$, $\mathfrak{f}' = (1)$, $S = \emptyset$, $S' = P\ell^r_\infty$) :

$$\mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{res}}_{(4)}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}) = 2\rho d - \mathrm{rg}_\varphi(\theta^+_{(4)}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2})),$$

où $\theta^+_{(4)}$ est l'application produit $(\theta_{(4)}, \mathrm{sgn})$.

Si l'on “élimine” les différents rangs de groupes de classes, on obtient les relations suivantes :

$$\mathrm{rg}_\varphi(\theta^+_{(4)}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2})) = \rho d\ ; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_\varphi(\theta_{(4)}(Y^{\mathrm{pos}}_{P\ell_2})) = \mathrm{rg}_\varphi(\mathrm{sgn}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2,2\text{-prim}})) &= \rho d - \mathrm{rg}_\varphi(\theta_{(4)}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2})) \\ &= \rho d - \mathrm{rg}_\varphi(\mathrm{sgn}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2})).^{41} \end{aligned} \tag{8}$$

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_\varphi(\mathrm{sgn}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2})) = \rho d &\iff \mathrm{rg}_\varphi(\theta_{(4)}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2})) = \rho d \\ &\iff \mathrm{rg}_\varphi(\mathrm{sgn}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2,2\text{-prim}})) = 0 \\ &\iff \mathrm{rg}_\varphi(\theta_{(4)}(Y^{\mathrm{pos}}_{P\ell_2})) = 0\ ; \end{aligned} \tag{9}$$

si ces conditions sont réalisées, on a en particulier :

$$Y^{\mathrm{pos}}_{P\ell_2,\varphi} = Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2,2\text{-prim},\varphi} = Y^{\mathrm{pos}}_{P\ell_2,2\text{-prim},\varphi}. \tag{9'}$$

On a ainsi obtenu une généralisation de résultats de Lagarias [La] :

---

[40] Comme $Y^{\mathrm{ord}}/K^{\times 2} \simeq Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2}/K^{\times 2}_{P\ell_2}$, on a toujours $\mathrm{sgn}(Y^{\mathrm{ord}}) = \mathrm{sgn}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2})$.

[41] Cette valeur commune n'étant autre que $\mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}})$.

Théorème 8.16. *Soit K un corps de nombres totalement réel et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre impair et de corps fixe k. On pose $Y^{\rm ord}_{K,P\ell_2} = \{\alpha \in K^{\times}_{P\ell_2},\ (\alpha) = \mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a} \in I_{K,P\ell_2}\}$. Soit $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$; alors les conditions suivantes sont équivalentes* [42]*:*

(i) $\mathrm{rg}_\chi(C\ell^{\rm res}_K) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{\rm ord}_K) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^{\rm res}_K) - \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^{\rm ord}_K) = 0$;

(ii) $\mathrm{rg}_\chi(\mathrm{sgn}(Y^{\rm ord}_{K,P\ell_2})) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(\mathrm{sgn}(Y^{\rm ord}_{K,P\ell_2})) = \psi(1)[k:\mathbb{Q}]$;

(iii) *pour tout $\alpha \in Y^{\rm ord}_{K,P\ell_2,\chi}\,Y^{\rm ord}_{K,P\ell_2,\chi^{-1}}$, la classe de congruence de α modulo $K^{\times 2}_{P\ell_2}K^{\times}_{P\ell_2,(4)}$ caractérise sa signature.*

Exemple 8.17. Si K est un corps cubique cyclique et $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, alors là condition (i) est vérifiée pour tout élément de $\mathfrak{X}_2(G)$ (cf. 8.13, (iii)). Ainsi, tout $\alpha \in K^{\times}_{P\ell_2}$, 2-primaire et engendrant le carré d'un idéal, est totalement positif (et réciproquement, tout générateur totalement positif du carré d'un idéal, est 2-primaire).

Par exemple, pour le corps cubique de conducteur 163, l'unité fondamentale ε n'est pas totalement positive ($\mathrm{Irr}(\varepsilon,\mathbb{Q}) = X^3 - 11X^2 - 14X - 1$) ; elle est donc non 2-primaire, et, puisque $\mathrm{rg}_\chi(C\ell^{\rm ord}_K) = 1$, il existe α, engendrant le carré d'un idéal non principal, à la fois totalement positif et 2-primaire.

Le premier cas où ε est totalement positive est celui du corps cubique de conducteur 1009 (cf. [GMN]) pour lequel $\mathrm{Irr}(\varepsilon,\mathbb{Q}) = X^3 - 893X^2 + 9194X - 1$, la 2-primarité de ε ayant bien lieu (on a $\varepsilon^3 \equiv (\varepsilon+1)^2 \bmod 4$), et tout α de type “classes” est donc non totalement positif et non 2-primaire.

Supposons maintenant que $\mathrm{rg}_\varphi(E^{\rm ord}_{2\text{-prim}}/E^{\rm ord2}) = 0$.

La suite exacte :

(10)
$$1 \longrightarrow (E^{\rm ord}_{2\text{-prim}}/E^{\rm ord2})_\varphi \longrightarrow (E^{\rm ord}/E^{\rm ord2})_\varphi \xrightarrow{\theta_4} \Big(\prod_{\mathfrak{p}|2} U^{(1)}_{\mathfrak{p}}/U^{(1)2}_{\mathfrak{p}}U^{(2e_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{p}}\Big)_\varphi,$$

dans laquelle le terme de droite est de rang ρd (cf. 5.12, (γ)), et le fait que K soit totalement réel (i.e. $\mathrm{rg}_\varphi(E^{\rm ord}) = \rho d$), impliquent la surjectivité de $\theta_{(4)}$ puisque, a fortiori, $\mathrm{rg}_\varphi(\theta_{(4)}(Y^{\rm ord}_{P\ell_2})) = \rho d$, et donc on peut écrire :

$$(10') \qquad Y^{\rm ord}_{P\ell_2,\varphi} = Y^{\rm ord}_{P\ell_2,2\text{-prim},\varphi}E^{\rm ord}_\varphi\ ;$$

les relations (9), (9′) et (10′) conduisent alors à :

$$(11) \qquad \mathrm{rg}_\varphi(\mathrm{sgn}(Y^{\rm ord}_{P\ell_2})) = \mathrm{rg}_\varphi(\mathrm{sgn}(E^{\rm ord})) = \rho d,$$

équivalente à $\mathrm{rg}_\varphi(E^{\rm pos}/E^{\rm ord2}) = 0$, en vertu de la suite exacte :

$$(12) \qquad 1 \longrightarrow (E^{\rm pos}/E^{\rm ord2})_\varphi \longrightarrow (E^{\rm ord}/E^{\rm ord2})_\varphi \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \Big(\prod_{\mathfrak{p}\in P\ell^r_\infty} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times +}\Big)_\varphi.$$

[42] Parmi d'autres s'écrivant sans peine à partir des relations (i) à (vii).

Réciproquement, si $\mathrm{rg}_\varphi(E^{\mathrm{pos}}/E^{\mathrm{ord2}}) = 0$, l'application sgn est surjective, et on peut écrire :

$$Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2,\varphi} = Y^{\mathrm{pos}}_{P\ell_2,\varphi}\ E^{\mathrm{ord}}_{\varphi}\ ;$$

puisque, a fortiori, $\mathrm{rg}_\varphi(\mathrm{sgn}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2})) = \rho d$, les relations (9) et (9′) conduisent à :

$$\mathrm{rg}_\varphi(\theta_{(4)}(Y^{\mathrm{ord}}_{P\ell_2})) = \mathrm{rg}_\varphi(\theta_{(4)}(E^{\mathrm{ord}})) = \rho d,$$

soit (cf. (10)) $\mathrm{rg}_\varphi(E^{\mathrm{ord}}_{2\text{-prim}}/E^{\mathrm{ord2}}) = 0$.

On a donc obtenu la généralisation d'un résultat de Haggenmüller [Hag] :

Théorème 8.18. *Soit K un corps de nombres totalement réel ; soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre impair. Alors pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$ les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathrm{rg}_\chi(E^{\mathrm{ord}}_{K,2\text{-prim}}/E^{\mathrm{ord2}}_K) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(E^{\mathrm{ord}}_{K,2\text{-prim}}/E^{\mathrm{ord2}}_K) = 0$,
(ii) $\mathrm{rg}_\chi(E^{\mathrm{pos}}_K/E^{\mathrm{ord2}}_K) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(E^{\mathrm{pos}}_K/E^{\mathrm{ord2}}_K) = 0$.

Remarques 8.19. (i) Le résultat de Haggenmüller correspond au cas habituel $G = 1$ pour lequel on obtient :

$$\mathrm{rg}_2(E^{\mathrm{ord}}_{K,2\text{-prim}}/E^{\mathrm{ord2}}_K) = 0 \iff \mathrm{rg}_2(E^{\mathrm{pos}}_K/E^{\mathrm{ord2}}_K) = 0.$$

(ii) Lorsque les conditions équivalentes du théorème sont satisfaites, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{res}}_K) &= \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}_K), \quad \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}_{K,(4)}) = \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}_K),\\ \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{res}}_{K,(4)}) &= \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}_K) + \rho d.\end{aligned}$$

Donnons maintenant l'analogue, pour $p = 2$, de l'énoncé 7.11 :

Théorème 8.20 ($T = P\ell_2$, $S_0 = \emptyset$). *Soit K un corps de nombres, et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre impair et de corps fixe k. Soit $S_\infty \subseteq P\ell^r_\infty$, stable par G, et soit $\Delta_\infty = P\ell^r_\infty - S_\infty$. Soit $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$; on a alors les résultats suivants :*

(α) $\chi \neq 1$ *(cf. 8.5) :*

(i) *cas relatif général :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^{S_\infty}_{K,P\ell_2}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{P\ell_2\cup\Delta_\infty}_K) = \psi(1)r_2(k) + \sum_{v\in P\ell_{k,2}} \rho_{v,\chi} + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}|\ ;$$

(i′) *cas relatif normal :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^{S_\infty}_{K,P\ell_2}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{P\ell_2\cup\Delta_\infty}_K) = \psi(1)r_2(k) + \psi(1)|\{v \in P\ell_{k,2},\ H^\chi_v = 1\}| + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}|\ ;$$

(ii) *cas absolu général :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^{\mathrm{res}}_{K,P\ell_2}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell^{P\ell_2\mathrm{ord}}_K) = \rho_{2,\chi} + \psi(1),$$

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,P\ell_2}^{\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{P\ell_2 \mathrm{res}}) = \rho_{2,\chi} \ ;$$

(ii′) *cas absolu normal :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,P\ell_2}^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{P\ell_2 \mathrm{ord}}) = \psi(1)d_{2,\chi} + \psi(1),$$

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,P\ell_2}^{\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{P\ell_2 \mathrm{res}}) = \psi(1)d_{2,\chi}.$$

(β) $\chi = 1$ *(cf. 8.6) :*

(i) *cas relatif :*

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{k,P\ell_2}^{S_\infty}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_k^{P\ell_2 \cup \Delta_\infty}) = r_2(k) + |P\ell_{k,2}| + |\Delta_{\infty,k}| \ ;$$

(ii) *cas absolu :*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathbb{Q}}^{P\ell_2 \mathrm{res}}) &= \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathbb{Q}}^{P\ell_2 \mathrm{ord}}) = 0, \\ \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathbb{Q},P\ell_2}^{\mathrm{res}}) &= 2, \ \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathbb{Q},P\ell_2}^{\mathrm{ord}}) = 1 \ ; \end{aligned}$$

(iii) *cas $G = 1$:*

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{K,P\ell_2}^{S_\infty}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{P\ell_2 \cup \Delta_\infty}) = r_2(K) + |P\ell_{K,2}| + |\Delta_\infty|.$$

Corollaire 8.21. *Pour $\chi \in \mathfrak{X}_2(G)$, $\chi \neq 1$, on a dans tous les cas :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,P\ell_2}^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{P\ell_2 \mathrm{ord}}) = \psi(1)(r_2(k) + r_1(k)) + \sum_{v \in P\ell_{k,2}} \rho_{v,\chi},$$

$$\mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,P\ell_2}^{\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_{\chi}(C\ell_K^{P\ell_2 \mathrm{res}}) = \psi(1)r_2(k) + \sum_{v \in P\ell_{k,2}} \rho_{v,\chi}.$$

Exemple 8.22. Donnons, pour en terminer avec le cas $p = 2$, une étude exhaustive du cas des corps quadratiques, lorsque $T = T_2$, $S = S_2$, en commençant par le cas $\Delta_2 = \emptyset$ qui illustre le théorème 5.18, (ii) :

Dans ce cas on a la formule générale (cf. remarque 5.16, (ii)) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{T_2}^{S_2 \cup S_\infty}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_{S_2}^{T_2 \cup \Delta_\infty}) = r_2(K) + |T_2| - |S_2| - \sum_{\mathfrak{p} \in S_2} [K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_2] + |\Delta_\infty|,$$

ce qui conduit à la liste ci-après (où l'on a écrit $\mathrm{rg}_2(C\ell_{\Sigma_2})$ sous la forme $\mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathfrak{n}})$, $\mathfrak{n} = \prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma_2} \mathfrak{p}^{2e_{\mathfrak{p}}+1}$ (cf. lemme 5.3), et en remarquant que pour 2 inerte, $\mathfrak{p} = (2)$ est principal) :

(α) K imaginaire :

(i) 2 inerte ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}\}$, $(2) = \mathfrak{p}$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(8)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell) = 2 \ ;$$

(ii) 2 ramifié ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}\}$, $(2) = \mathfrak{p}^2$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{4\mathfrak{p}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}\}}) = 2 \ ;$$

(iii) 2 décomposé ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'\}$, $(2) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(8)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{P\ell_2}) = 3,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathfrak{p}^3}^{\{\mathfrak{p}'\}}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathfrak{p}'^3}^{\{\mathfrak{p}\}}).$$

(β) K réel ($P\ell_\infty = \{\infty, \infty'\}$) :

(i) 2 inerte ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}\}$, $(2) = \mathfrak{p}$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(8)}^{\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{res}}) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(8)}^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{ord}}) = 3,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(8)}^{\{\infty\}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\infty'\}}) = 2 \ ;$$

(ii) 2 ramifié ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}\}$, $(2) = \mathfrak{p}^2$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{4\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}\}\mathrm{res}}) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{4\mathfrak{p}}^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}\}\mathrm{ord}}) = 3,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{4\mathfrak{p}}^{\{\infty\}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p},\infty'\}}) = 2 \ ;$$

(iii) 2 décomposé ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'\}$, $(2) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(8)}^{\mathrm{ord}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{P\ell_2\mathrm{res}}) = 2,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(8)}^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{P\ell_2\mathrm{ord}}) = 4,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathfrak{p}^3}^{\{\mathfrak{p}'\}\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathfrak{p}'^3}^{\{\mathfrak{p}\}\mathrm{ord}}) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(8)}^{\{\infty\}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{P\ell_2\cup\{\infty'\}}) = 3,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathfrak{p}^3}^{\{\mathfrak{p}',\infty\}}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathfrak{p}'^3}^{\{\mathfrak{p},\infty'\}}).$$

Poursuivons dans le même contexte, mais sans l'hypothèse $\Delta_2 = \emptyset$; c'est alors une illustration de 5.18, (i) :

On a alors la formule générale :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{T_2}^{S_2\cup S_\infty}) - \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T_2\cup\Delta_\infty}) = r_2(K) + |T_2| - |S_2| - \sum_{\mathfrak{p}\in S_2\cup\Delta_2} [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_2] + |\Delta_\infty|,$$

où $\mathfrak{m}^* = \prod_{\mathfrak{p}\in S_2} \mathfrak{p}^{2e_\mathfrak{p}+1} \prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_2} \mathfrak{p}^{2e_\mathfrak{p}}$; d'où la liste suivante :

(α) K imaginaire :

(i) 2 inerte ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}\}$, $(2) = \mathfrak{p}$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(4)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell) = 1 \;;$$

(ii) 2 ramifié ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}\}$, $(2) = \mathfrak{p}^2$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(4)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell) = 1 \;;$$

(iii) 2 décomposé ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'\}$, $(2) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{(4)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{4\mathfrak{p}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}\}}) = 2,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathfrak{p}^3}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}\}}_{\mathfrak{p}'^2}) = 1.$$

(β) K réel ($P\ell_\infty = \{\infty, \infty'\}$) :

(i) 2 inerte ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}\}$, $(2) = \mathfrak{p}$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{ord}}_{(4)}) = \mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{res}}),$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\infty\}}_{(4)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\infty'\}}) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{res}}_{(4)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{ord}}) = 2 \;;$$

(ii) 2 ramifié ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}\}$, $(2) = \mathfrak{p}^2$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{ord}}_{(4)}) = \mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{res}}),$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\infty\}}_{(4)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\infty'\}}) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{res}}_{(4)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{ord}}) = 2 \;;$$

(iii) 2 décomposé ($P\ell_2 = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'\}$, $(2) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{ord}}_{(4)}) = \mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{res}}),$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{ord}}_{4\mathfrak{p}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}\}\mathrm{res}}) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{res}}_{\mathfrak{p}^3}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}\}\mathrm{ord}}_{\mathfrak{p}'^2}) = 2,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\infty\}}_{(4)}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\infty'\}}) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\infty\}}_{4\mathfrak{p}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}, \infty'\}}) = 2,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\infty\}}_{\mathfrak{p}^3}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}, \infty'\}}_{\mathfrak{p}'^2}) = 1,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{res}}_{(4)}) = \mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{ord}}) = 2,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{res}}_{4\mathfrak{p}}) - \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}\}\mathrm{ord}}) = 3,$$

$$\mathrm{rg}_2(C\ell^{\mathrm{ord}}_{\mathfrak{p}^3}) = \mathrm{rg}_2(C\ell^{\{\mathfrak{p}\}\mathrm{res}}_{\mathfrak{p}'^2}).$$

9. Cas particulier des ensembles de places "assez gros".

On reprend la situation la plus générale décrite dans l'introduction de ce chapitre.

La relation (théorème 5.18) :

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_T^S) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{\mathfrak{m}^*}^{T^*}) = \rho_\chi(T,S),\ \chi \in \mathfrak{X}_p(G),$$

conduit immédiatement au résultat suivant (on laisse au lecteur le soin de détailler tous les cas habituels (cf. point (c) de l'introduction) :

Théorème 9.1. *Soit K un corps de nombres contenant μ_p et soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p et de corps fixe k. Soient T, $S = S_0 \cup S_\infty$, T, $S_0 \subset P\ell_{K,0}$, $S_\infty \subseteq P\ell^r_{K,\infty}$, deux ensembles finis, disjoints, G-invariants, de places de K. Posons*

$$\Delta_p = P\ell_{K,p} - T_p - S_p,\ \Delta_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty\,,$$

$$\mathfrak{m}^* = \prod_{\mathfrak{p}\in S_0 - S_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p}\in S_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}+1} \prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}}.$$

Soit $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$; alors si T engendre la χ-composante de

$$C\ell_{K,\mathfrak{m}^*}^{\Delta_\infty} = I_{K,S_0\cup\Delta_p}/P_{K,S_0\cup\Delta_p,\mathfrak{m}^*}^{S_\infty}$$

(cf. 5.1, (ii), (iii)*), on a :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,T}^S) = \rho_\chi(T,S)\ \textit{(cf. 5.15)}.$$

Remarque 9.2. Ce résultat indique que si T' contient T fixé assez gros (i.e. vérifiant la condition d'engendrement ci-dessus), le χ^*-rang de $C\ell_{K,T'}^S$ (pour S fixé) est fonction "linéaire" par rapport à l'ensemble $T' - T$; plus précisément, on a alors :

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,T'}^S) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell_{K,T}^S) + \sum_{v\in T'_k - T_k} \rho_{v,\chi}.$$

Corollaire 9.3 ($S = \emptyset$ (resp. $P\ell^r_{K,\infty}$), $\mathfrak{m}^* = \prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_p} \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}}$).

(i) *Si T engendre la χ-composante de $C\ell_{K,\mathfrak{m}^*}^{\mathrm{ord}}$ (resp. $C\ell_{K,\mathfrak{m}^*}^{\mathrm{res}}$), alors :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,T}^{\mathrm{res}}) = \rho_\chi(T,\emptyset)\ \text{(resp. } \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,T}^{\mathrm{ord}}) = \rho_\chi(T, P\ell^r_{K,\infty})).$$

(ii) *Si en outre T contient $P\ell_{K,p}$ et engendre la χ-composante de $C\ell_K^{\mathrm{ord}}$ (resp. $C\ell_K^{\mathrm{res}}$) alors :*

$$\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,T}^{\mathrm{res}}) = \rho_\chi(T,\emptyset)\ \text{(resp. } \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,T}^{\mathrm{ord}}) = \rho_\chi(T, P\ell^r_{K,\infty})).$$

Exemples 9.4. (α) ($p = 2$, K quelconque). Si T contient $P\ell_{K,2}$ et engendre $C\ell_K^{\mathrm{ord}}$ (resp. $C\ell_K^{\mathrm{res}}$), alors on a (cf. 5.16, (iii)) :

$$\mathrm{rg}_2(C\ell_{K,T}^{\mathrm{res}}) = r_2(K) + r_1(K) + |T|\ \text{(resp. } \mathrm{rg}_2(C\ell_{K,T}^{\mathrm{ord}}) = r_2(K) + |T|).$$

(β) ($p = 3$, $S = \emptyset$, K biquadratique). Soit $d \in \mathbb{Z}$, $d \notin (\mathbb{Z})^2$, $d \notin -3(\mathbb{Z})^2$ et soit $K = \mathbb{Q}(\mu_3)(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$. Soit $T_{\mathbb{Q}}$ un ensemble fini de nombres premiers et soit T l'ensemble des places de K au-dessus de celles de $T_{\mathbb{Q}}$; on suppose que ces nombres premiers (autres que 3 si $3 \in T_{\mathbb{Q}}$) sont décomposés dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Pour $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, on considère le caractère χ correspondant à $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; alors χ^* correspond à $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$.

(i) Supposons que $T_{\mathbb{Q}}$ contient 3 et que T engendre $C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$; alors on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),T}) &= \mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q},T}) + |T_{\mathbb{Q}}| - 1 + d_{3,\chi} + d_{\infty,\chi}\\ &= |\{q \in T_{\mathbb{Q}},\ q \equiv 1\ (3)\}| + |T_{\mathbb{Q}}| + d_{3,\chi} + d_{\infty,\chi},\end{aligned}$$

où $d_{3,\chi} = 1$ (resp. 0) si 3 est décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (resp. sinon) et $d_{\infty,\chi} = 1$ (resp. 0) si $d > 0$ (resp. $d < 0$).

(ii) Le cas où $3 \notin T_{\mathbb{Q}}$ est également intéressant, mais la condition d'engendrement a lieu dans un groupe de classes plus gros. Supposons que T engendre $C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),\mathfrak{m}^*}$, où $\mathfrak{m}^* = \prod_{\mathfrak{p}|3} \mathfrak{p}^{3e_{\mathfrak{p}}} = 3\sqrt{-3}Z_K$. On a alors :

$$\mathrm{rg}_3(C\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),T}) = |\{q \in T_{\mathbb{Q}},\ q \equiv 1(3)\}| + |T_{\mathbb{Q}}| + d_{\infty,\chi}.$$

Donnons, pour terminer, un autre exemple d'application qui concerne un invariant important que nous reconsidérons au chapitre suivant en toute généralité :

Proposition 9.5. *Soit K un corps de nombres contenant μ_p et vérifiant la conjecture de Leopoldt pour p. Soit T un ensemble fini de places finies de K contenant $P\ell_{K,p}$. On suppose que T engendre le p-groupe de classes $C\ell_K^{\mathrm{res}}$ (resp. $C\ell_K^{\mathrm{ord}}$) de K. Alors le p-groupe de torsion $\mathcal{T}_{K,T}^{\mathrm{ord}}$ (resp. $\mathcal{T}_{K,T}^{\mathrm{res}}$) du groupe de Galois de la p-extension abélienne T-ramifiée, non complexifiée (resp. complexifiée) maximale, H_T^{ord} (resp. H_T^{res}) de K, a pour p-rang :*

$$\mathrm{rg}_p(\mathcal{T}_{K,T}^{\mathrm{ord}}) = |T| - 1 \text{ (resp. } \mathrm{rg}_p(\mathcal{T}_{K,T}^{\mathrm{res}}) = |T| - 1 + r_1(K))\ ^{43}.$$

Démonstration. En effet, l'extension H_T^{ord} (resp. H_T^{res}) contient le composé des $\mathbb{Z}_p$-extensions de K, dont le groupe de Galois est isomorphe à $\mathbb{Z}_p^{r_2(K)+1}$, sous la conjecture de Leopoldt ; d'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_p(\mathcal{T}_T^{\mathrm{ord}}) &= \mathrm{rg}_p(C\ell_T^{\mathrm{ord}}) - r_2(K) - 1 = \rho_p(T, P\ell_{K,\infty}^r) - r_2(K) - 1\\ &= |T| - 1\\ \text{(resp. } \mathrm{rg}_p(\mathcal{T}_T^{\mathrm{res}}) &= \mathrm{rg}_p(C\ell_T^{\mathrm{res}}) - r_2(K) - 1 = \rho_p(T, \emptyset) - r_2(K) - 1\\ &= |T| - 1 + r_1(K)).\end{aligned}$$

[43] Le théorème 10.10 du chapitre suivant donne l'énoncé général correspondant en termes de χ-rangs, sous la condition que T engendre la χ^*-composante de $C\ell_{K,S_0}^{\Delta_\infty}$.

Remarque 9.6. On rappelle que si K est un corps de nombres (ne contenant pas nécessairement μ_p), vérifiant la conjecture de Leopoldt pour p, alors pour tout ensemble fini T de places finies de K, contenant $P\ell_{K,p}$, les groupes d'inertie, dans H_T^{ord}/K (resp. H_T^{res}/K), des éléments de $T - T_p$ (resp. $(T - T_p) \cup P\ell^r_{K,\infty}$) sont déployés, c'est-à-dire que l'on a (cf. [G6, (2.2)]) :

$$\mathrm{Gal}(H_T^{\mathrm{ord}}/H_{P\ell_p}^{\mathrm{ord}}) \simeq \prod_{\mathfrak{p}\in T-T_p} (\overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times})_p,$$

$$\mathrm{Gal}(H_T^{\mathrm{res}}/H_{P\ell_p}^{\mathrm{ord}}) \simeq \prod_{\mathfrak{p}\in P\ell^r_\infty \cup (T-T_p)} (\overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times})_p,$$

où $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$ est le corps résiduel de K en $\mathfrak{p} \in P\ell_{K,0}$, $\overline{K}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}$, pour $\mathfrak{p} \in P\ell^r_{K,\infty}$, et où $(\overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times})_p$ est le p-Sylow de $\overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ (égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $\mathfrak{p} \in P\ell^r_\infty$ et $p = 2$).

Chapitre III. Autres formules de rangs

Si l'on s'intéresse à d'autres invariants, de type corps de classes, des corps de nombres, on cherche en principe à les exprimer en termes de groupes de classes usuelles et d'unités, considérés comme "connus". Les théorèmes de réflexion réalisent largement cet objectif ; nous allons le voir pour les groupes de Galois attachés à la p-ramification abélienne et pour la K-théorie des anneaux d'entiers.

Les notations sont toujours les mêmes et on peut se référer à l'introduction du chapitre II.

10. Formules de rangs pour les groupes $\mathcal{T}^S_{K,T}$ $(T \supseteq P\ell_{K,p})$.

Soit K un corps de nombres vérifiant la conjecture de Leopoldt pour p, et même la conjecture de Jaulent (cf. [J1], [J5]) qui en est la généralisation naturelle, et que nous allons reformuler dans 10.2 ; pour l'instant il n'est pas nécessaire de supposer $\mu_p \subset K$.

Soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p, et soit $k = K^G$; soient $T \subset P\ell_{K,0}$, $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell^r_{K,\infty}$, des ensembles finis, disjoints, stables par G, de places de K. On suppose dans toute la section 10 que T contient $P\ell_{K,p}$.

Soit $\widetilde{K}$ le composé des $\mathbb{Z}_p$-extensions de K ; l'extension H^S_T (la p-extension abélienne T-ramifiée, S-décomposée, maximale de K) (cf. définition 5.1, (v)) contient le composé, noté $\widetilde{K}(S)$, des $\mathbb{Z}_p$-extensions S-décomposées de K (en fait S_0-décomposées) ; sous la conjecture de Leopoldt on a :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K) \simeq \mathbb{Z}_p^{r_2(K)+1},$$

et nous posons :

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{Gal}(\widetilde{K}(S)/K) \simeq \mathbb{Z}_p^{s(S)}, \;\; s(S) \in [0, r_2(K)+1].$$

Définition 10.1. On désigne par $\mathcal{T}^S_{K,T}$ le groupe de $\mathbb{Z}_p$-torsion (fini) de $\mathcal{A}^S_{K,T} = \mathrm{Gal}(H^S_T/K)$; on a donc :

$$\mathcal{A}^S_{K,T} = \mathcal{T}^S_{K,T} \oplus \Gamma, \;\; \Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^{s(S)},$$

où $s(S) \in [0, r_2(K)+1]$ ne dépend que de S (et même S_0).

Pour $S = \emptyset$ ou $P\ell^r_{K,\infty}$ les groupes $\mathcal{T}$ ont été abondamment étudiés (voir par exemple [G1], [G2], [J1], [J4], [MN], [N1], [N2]).

Les groupes $\mathcal{A}^S_T$ et $\mathcal{T}^S_T$ sont des $\mathbb{Z}_p[G]$-modules constituant des $\mathcal{G}$-familles au sens du § 3.3 de la section 3 (cf. [G2, § 1]) ; comme pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, $\mathcal{T}^S_{T,\chi} = (\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{A}^S_T))_\chi = \mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{A}^S_{T,\chi})$ est facteur direct (comme $\mathbb{Z}_p$-module) de $\mathcal{A}^S_{T,\chi}$, et comme : $(\mathcal{A}^S_T/\mathcal{T}^S_T)_\chi \simeq \mathcal{A}^S_{T,\chi}/\mathcal{T}^S_{T,\chi}$, le calcul du χ-rang de $\mathcal{T}^S_T$ peut s'effectuer en les deux temps suivants :

(α) calcul du χ-rang $s_\chi(S)$ de $\mathcal{A}_T^S/\mathcal{T}_T^S$, ce qui est, sous la conjecture de Jaulent, un simple problème de représentations (cf. [J1, chap. IV]) ; de plus, comme $\mathcal{A}_T^S/\mathcal{T}_T^S$ est $\mathbb{Z}_p$-libre, il suffit de considérer la représentation $\mathbb{Q}_p \otimes (\mathcal{A}_T^S/\mathcal{T}_T^S)$;

(β) calcul du χ-rang de $\mathcal{A}_T^S$, qui est soit donné par $\mathrm{rg}_\chi(C\ell_T^S)$, soit, via le théorème de réflexion, par $\mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{S^*}^{T^*})$, puisque par hypothèse $\Delta_p = \emptyset$; nous privilégierons ce second point de vue qui suppose $\mu_p \subset K$, mais qui, pour $S = \emptyset$, ne nécessite que la connaissance de $C\ell_K$.

Considérons :

$$\text{(3)} \qquad \prod_{\mathfrak{p} \in P\ell_{K,p}} K_\mathfrak{p} \simeq \prod_{v \in P\ell_{k,p}} k_v \otimes K \simeq \prod_{v \in P\ell_{k,p}} k_v \otimes k[G] \simeq \prod_{v \in P\ell_{k,p}} k_v[G],$$

comme représentation de G sur $\mathbb{Q}_p$, et soit alors :

$$\text{(4)} \qquad \log : K_{P\ell_p}^\times \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}|p} K_\mathfrak{p}$$

le logarithme induit par le logarithme p-adique d'Iwasawa.

Nous considérons la conjecture suivante (conjecture de Jaulent), laquelle est un problème de transcendance p-adique (cf. [J1], [J5], [Em], [Ro] qui a donné une généralisation au cas non galoisien de l'énoncé de Jaulent) :

Conjecture 10.2. *Soit K' un corps de nombres, galoisien sur $\mathbb{Q}$, et soit $G' = \mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q})$. Soit F' un sous-G'-module de ${K'}_{P\ell_p}^\times$, de type fini. Alors les représentations $\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} F'$ (de G' sur $\mathbb{Q}$) et $\mathbb{Q}_p\log(F')$ (de G' sur $\mathbb{Q}_p$) ont même caractère si (et seulement si) $\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} F'$ est G'-monogène (i.e. la représentation $\mathbb{Q}\otimes_\mathbb{Z} F'$ est sous-représentation de la représentation régulière $\mathbb{Q}[G']$ [44]).*

On revient maintenant au corps K (muni du groupe d'automorphismes G), et on prend pour K' la clôture galoisienne de K sur $\mathbb{Q}$; on a donc $G' = \mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q})$ et on pose $H = \mathrm{Gal}(K'/K)$. On aura à déterminer la représentation $\mathbb{Q}_p\log(F)$ (de G sur $\mathbb{Q}_p$), pour $F = E_K^{S_0}$ qui est un sous-G-module de type fini de $K_{P\ell_p}^\times$; le problème sera alors de trouver cette représentation en se ramenant au cas galoisien par l'intermédiaire d'un G'-module F' convenable.

Remarque 10.3. On démontre assez facilement que, dans le contexte de la conjecture précédente, la $\mathbb{Q}_p$-représentation $\mathbb{Q}_p\log(F')$ (de G') est donnée par la $\mathbb{Q}$-représentation $\mathbb{Q}\otimes F'_0$, pour tout sous-G'-module monogène maximal F'_0 de F'. Ceci permet d'apporter une réponse générale au problème ci-dessus dans deux cas particuliers intéressants en pratique :

[44] On dira pour simplifier que F' est monogène. Bien sûr, si $\mathbb{Q} \otimes F'$ et $\mathbb{Q}_p\log(F')$ ont même caractère, on a trivialement que F' est monogène (considérer $\mathbb{Q}_p \otimes F'$, de même caractère que $\mathbb{Q} \otimes F'$, puis le logarithme sur $\mathbb{Q}_p \otimes F'$).

- le cas où l'ensemble S_0' des places de K' au-dessus de S_0 est stable par G' (ce qui équivaut au fait que S_0 est l'étendu à K d'un ensemble $S_{0,\mathbb{Q}}$ de places finies de $\mathbb{Q}$), car alors $F' = E_{K'}^{S_0'}$ est un G'-module connu et $F = (E_{K'}^{S_0'})^H$, ce qui conduit au résultat par une descente galoisienne (cf. théorème 10.5) ;

- le cas où S_0' ne vérifie pas nécessairement la condition ci-dessus mais où $E_{K'}^{S_0'}$ est directement monogène, ce qui implique $E_{K'}^{\overline{S_0'}}$ monogène, $\overline{S_0'}$ étant l'ensemble de places stable par G' déduit de S_0' (si $E_{K'}^{S_0'}$ est monogène pour $S_0 \neq \emptyset$, il existe un premier q tel que S_0 est contenu dans l'ensemble des places de K au-dessus de q).

Définition 10.4. Soient V et V' deux représentations de G, de caractères respectifs φ, φ'. On désigne par $\varphi \wedge \varphi'$ le caractère de la sous-représentation maximale commune à V et V' (autrement dit, si $\varphi = \sum_i n_i \chi_i$, $\varphi' = \sum_i n_i' \chi_i$, n_i, $n_i' \geq 0$, χ_i irréductibles distincts, on a $\varphi \wedge \varphi' = \sum_i (n_i \wedge n_i')\chi_i$, où, par abus, $n \wedge n'$ désigne $\min(n, n')$ pour $n, n' \in \mathbb{Z}$).

Le résultat suivant donne alors le caractère de $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}(S)/K)$, où $\widetilde{K}(S)$ est le composé des $\mathbb{Z}_p$-extensions S-décomposées de K (étape (α)), dans le cas où S_0 est l'étendu à K d'un ensemble de places finies de $\mathbb{Q}$:

Théorème 10.5. *Soit K un corps de nombres et soit G un groupe d'automorphismes de K, de corps fixe k. Soit K' la clôture galoisienne de $K/\mathbb{Q}$ et soient $G' = \mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q})$, $H' = \mathrm{Gal}(K'/k)$, $H = \mathrm{Gal}(K'/K)$. On désigne enfin par Ψ, Ψ' les ensembles de caractères absolument irréductibles de G, G'.*[45]

Soient $T \subset P\ell_{K,0}$, T contenant $P\ell_{K,p}$, $S = S_0 \cup S_\infty \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell^r_{K,\infty}$, T et S disjoints et stables par G. On suppose que S_0' est stable par G', c'est-à-dire que S_0 est l'étendu à K d'un ensemble $S_{0,\mathbb{Q}}$ de places finies de $\mathbb{Q}$.

Alors si K' vérifie la conjecture de Jaulent (cf. 10.2), le caractère du G-module $\mathbb{Q}_p \otimes (\mathcal{A}^S_{K,T}/\mathcal{T}^S_{K,T})$ (cf. définition 10.1) ne dépend que de S_0 et est donné par :

$$\chi(\widetilde{K}(S)/K) = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\psi' \in \Psi'} \lambda_\psi^{\psi'} \Big(\psi'(1) - \psi'(1) \wedge \Big(-\delta_{1,\psi'} + \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \rho_{\ell,\psi'}\Big)\Big)\, \psi,$$

avec

$$\lambda_\psi^{\psi'} = \frac{1}{|H'|} \sum_{t' \in H'} \psi(t'^{-1})\psi'(t'), \ \ \rho_{\ell,\psi'} = \frac{1}{|H'_\ell|} \sum_{t' \in H'_\ell} \psi'(t'),$$

où H'_ℓ est un groupe de décomposition de ℓ dans $K'/\mathbb{Q}$.

[45] On ne suppose pas ici les groupes G, G' d'ordres étrangers à p car il s'agit de représentations en caractéristique 0. On choisit aussi d'étendre les scalaires pour conduire les calculs en termes de caractères absolument irréductibles.

Remarques 10.6. (i) Si K n'est pas totalement réel, $\chi(\widetilde{K}(S)/K)$ dépend non trivialement de S_0 ; dans le cas contraire, pour tout $\psi' \neq 1$, on a $\rho_{\ell,\psi'} = \psi'(1)$ pour $\ell = \infty$, d'où facilement $\chi(\widetilde{K}(S)/K) = 1$ (resp. 0) si $S_0 = \emptyset$ (resp. $S_0 \neq \emptyset$) (ce qui est clair puisque $\widetilde{K} = K\widetilde{\mathbb{Q}}$, où $\widetilde{\mathbb{Q}}$ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$, dans laquelle aucune place finie ne peut être totalement décomposée).
(ii) Si l'on fait l'hypothèse $p \nmid |G|$ pour pouvoir revenir à la notion de χ-rang, on obtient que pour tout $\chi \in \mathfrak{X}$, le χ-rang $s_\chi(S)$ de $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}(S)/K)$ est donné par :

$$s_\chi(S) = \sum_{\psi' \in \Psi'} \lambda_\psi^{\psi'} \Big(\psi'(1) - \psi'(1) \wedge \Big(- \delta_{1,\psi'} + \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \rho_{\ell,\psi'}\Big)\Big), \ \psi | \chi.$$

Corollaire 10.7. *Si $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois G, on a :*

$$\chi(\widetilde{K}(S)/K) = \sum_{\psi \in \Psi} \Big(\psi(1) - \psi(1) \wedge \Big(- \delta_{1,\psi} + \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \rho_{\ell,\psi}\Big)\Big)\, \psi.$$

Corollaire 10.8. *On ne suppose plus S_0' stable par G'. Si $E_{K'}^{S_0'}$ est monogène (cf. 10.2) (i.e. si $-\delta_{1,\psi'} + \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \rho_{\ell,\psi'} \leq \psi'(1)$, pour tout $\psi' \in \Psi'$), ce qui suppose $|S_{0,\mathbb{Q}}| = 0$ ou 1, on a :*

$$\chi(\widetilde{K}(S)/K) = \sum_{\psi \in \Psi} \Big(\psi(1) r_2(k) + \psi(1) r_1(k) - \sum_{v \in S_{0,k} \cup P\ell^r_{k,\infty}} \rho_{v,\psi} + \delta_{1,\psi}\Big)\, \psi.$$

Démonstration du théorème 10.5. Pour ce calcul de caractère, on peut remplacer $\widetilde{K}(S)$ par $\widetilde{K}^S = \widetilde{K} \cap H_T^S$ puisque $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}^S/\widetilde{K}(S))$ est fini ; or $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}^S/K) \simeq \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)/\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/\widetilde{K}^S)$, et $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/\widetilde{K}^S)$ est engendré topologiquement par les groupes de décomposition des places de S_0. Or, d'après l'interprétation logarithmique de ces groupes de Galois, donnée dans [G1], [G2], on a :

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{K}^S/K) \simeq \overline{\mathrm{Log}(I_{P\ell_p})}/\overline{\mathrm{Log}(\langle S_0 \rangle)},$$

où :

$$\mathrm{Log} : I_{P\ell_p} \to \prod_{\mathfrak{p}|p} K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p \log(E)$$

est défini en posant $\mathrm{Log}(\mathfrak{A}) = \frac{1}{m}\log(\alpha)$ modulo $\mathbb{Q}_p\log(E)$, si $\mathfrak{A}^m = (\alpha)$, $\alpha \in K^\times_{P\ell_p}$ (cf. (4)).

On est donc amené à considérer la représentation (sur $\mathbb{Q}_p$) :

$$\mathbb{Q}_p \otimes \overline{\mathrm{Log}(I_{P\ell_p})}/\mathbb{Q}_p \otimes \overline{\mathrm{Log}(\langle S_0 \rangle)}$$

$$\begin{aligned}&\simeq \quad \mathbb{Q}_p \otimes \overline{\mathrm{Log}(P_{P\ell_p})}/\mathbb{Q}_p \otimes \overline{\mathrm{Log}(\langle S_0\rangle \cap P_{P\ell_p})}\\ &\simeq \quad \Big(\prod\nolimits_{\mathfrak{p}|p} K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p\mathrm{log}(E)\Big)/\Big(\mathbb{Q}_p\mathrm{log}(E^S)/\mathbb{Q}_p\mathrm{log}(E)\Big)\\ &\simeq \quad \prod\nolimits_{\mathfrak{p}|p} K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p\mathrm{log}(E^{S_0}),\end{aligned}$$

dont on vérifie qu'elle s'écrit sous la forme (avec des notations évidentes) :

$$\Big(\prod_{\mathfrak{p}'|p} K'_{\mathfrak{p}'}/\mathbb{Q}_p\mathrm{log}(E_{K'}^{S'_0})\Big)^H \ ;$$

le caractère de $\prod\limits_{\mathfrak{p}'|p} K'_{\mathfrak{p}'}/\mathbb{Q}_p\mathrm{log}(E_{K'}^{S'_0})$, comme représentation de G', est, d'après (3) appliqué au cas galoisien absolu :

$$\chi'(\widetilde{K'}(S')/K') = \chi'_{\mathrm{reg}} - \chi'_{S'_0},$$

où χ'_{reg} est le caractère de la représentation régulière de G', et où $\chi'_{S'_0}$, caractère de $\mathbb{Q}_p\mathrm{log}(E_{K'}^{S'_0})$, est, sous la conjecture de Jaulent, donné à partir du théorème 6.2, par (cf. 10.3) :

$$\chi'_{S'_0} = \chi'_{\mathrm{reg}} \wedge \Big(- 1_{G'} + \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \mathrm{Ind}_{H'_\ell}^{G'}(1_{H'_\ell})\Big), \tag{5}$$

où H'_ℓ est un groupe de décomposition de ℓ dans $K'/\mathbb{Q}$. Or $\mathrm{Ind}_{H'_\ell}^{G'}(1_{H'_\ell}) = \sum_{\psi' \in \Psi'} \rho_{\ell,\psi'}\, \psi'$, et donc :

$$\chi'_{S'_0} = \sum_{\psi' \in \Psi'} \psi'(1) \wedge \Big(- \delta_{1,\psi'} + \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \rho_{\ell,\psi'}\Big)\, \psi',$$

d'où :

$$\chi'(\widetilde{K'}(S')/K') = \sum_{\psi' \in \Psi'} \Big(\psi'(1) - \psi'(1) \wedge \Big(- \delta_{1,\psi'} + \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \rho_{\ell,\psi'}\Big)\Big)\, \psi'. \tag{5'}$$

On se restreint ensuite au sous-groupe H' en posant :

$$\mathrm{Res}_{H'}(\psi') = \sum_{\varphi' \in \Phi'} \lambda_{\varphi'}^{\psi'}\, \varphi',$$

où Φ' est l'ensemble des caractères absolument irréductibles de H', et on doit ensuite trouver le caractère de la sous-représentation

$$\Big(\prod_{\mathfrak{p}'|p} K'_{\mathfrak{p}'}/\mathbb{Q}_p\mathrm{log}(E_{K'}^{S'_0})\Big)^H .$$

Comme par définition H est normal dans H', on obtient, pour les représentations absolument irréductibles $V_{\varphi'}$, $\varphi' \in \Phi'$: $V_{\varphi'}^H = V_{\varphi'}$ (resp. 0), si $\mathrm{Ker}\,\varphi'$ contient H (resp. sinon).

On remplace donc $\mathrm{Res}_{H'}(\psi')$ par :

$$\sum_{\substack{\varphi' \in \Phi' \\ \mathrm{Ker}\varphi' \supset H}} \lambda_{\varphi'}^{\psi'} \varphi'$$

qui s'identifie à :

$$\sum_{\psi \in \Psi} \lambda_{\psi}^{\psi'} \psi$$

(en voyant ψ comme caractère de H').

On a donc :

$$\chi(\widetilde{K}(S)/K) = \sum_{\psi' \in \Psi'} \Big(\psi'(1) - \psi'(1) \wedge \Big(- \delta_{1,\psi'} + \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \rho_{\ell,\psi'}\Big)\Big) \sum_{\psi \in \Psi} \lambda_{\psi}^{\psi'} \psi$$

$$= \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\psi' \in \Psi'} \lambda_{\psi}^{\psi'} \Big(\psi'(1) - \psi'(1) \wedge \Big(- \delta_{1,\psi'} + \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \rho_{\ell,\psi'}\Big)\Big) \psi$$

et on obtient l'expression annoncée.

Le corollaire 10.7 s'en déduit facilement en faisant $H = 1$, $H' = G' = G$, d'où $\lambda_{\psi}^{\psi'} = \delta_{\psi,\psi'}$ (symbole de Kronecker).

Si $E_{K'}^{S'_0}$ est monogène, on revient à l'expression générale :

$$\chi'(\widetilde{K'}(\overline{S'})/K') = \chi'_{\mathrm{reg}} - \chi'_{\overline{S'_0}} = \chi'_{\mathrm{reg}} + 1_{G'} - \sum_{\ell \in S_{0,\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} \mathrm{Ind}_{H'_\ell}^{G'}(1_{H'_\ell}),$$

correspondant à l'ensemble G'-stable $\overline{S'_0}$ déduit de S'_0, et dont on prend la restriction à H'. Or on a la formule suivante (cf. [S1, II.7.3]) :

$$\mathrm{Res}_{H'}(\mathrm{Ind}_{H'_\ell}^{G'}(1_{H'_\ell})) = \underset{s'}{\oplus} \mathrm{Ind}_{H'_{\ell,s'}}^{H'}(1_{H'_{\ell,s'}}),$$

où s' représente les doubles classes $H' \backslash G'/H'_\ell$, et où $H'_{\ell,s'} = s'H'_\ell s'^{-1} \cap H'$. On vérifie que ces doubles classes sont en correspondance bijective avec l'ensemble des places v de k au-dessus de ℓ et que l'on passe de $\overline{S_{0,k}}$ à $S_{0,k}$ en obtenant :

$$\chi(\widetilde{K}(S)/K) = [k : \mathbb{Q}]\chi_{\mathrm{reg}} + 1_G - \sum_{v \in S_{0,k} \cup P\ell_{k,\infty}} \Big(\mathrm{Ind}_{H'_v}^{H'}(1_{H'_v})\Big)^H =$$

$$[k : \mathbb{Q}]\chi_{\mathrm{reg}} + 1_G - \sum_{v \in S_{0,k} \cup P\ell_{k,\infty}} \sum_{\psi \in \Psi} \rho_{v,\psi} \psi,$$

en utilisant à nouveau le fait que $V_{\varphi'}^H = V_{\varphi'}$ (resp. 0) si $\mathrm{Ker}\,\varphi'$ contient H (resp. sinon).

On en déduit alors le corollaire 10.8.

Remarque 10.9. Si S_0' n'est pas stable par G', $E_{K'}^{S_0'}$ n'est plus un G'-module et on ne peut utiliser les représentations de G', et si $E_{K'}^{S_0'}$ n'est pas monogène, il n'y a pas de façon canonique pour trouver le caractère du G-module $E_K^{S_0}$, et un tel caractère doit être trouvé "à la main" ou par le procédé conjectural proposé par [Ro].

A partir de maintenant, on suppose que K contient μ_p.

On peut alors énoncer :

Théorème 10.10. *Soit K un corps de nombres contenant μ_p ; soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p et de corps fixe k. Soient T, $S = S_0 \cup S_\infty$, deux ensembles finis, disjoints, G-invariants, de places de K, avec T, $S_0 \subset P\ell_{K,0}$, $S_\infty \subseteq P\ell^r_{K,\infty}$; on pose $\Delta_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty$. On suppose que T contient $P\ell_{K,p}$; alors on a, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}^S_{K,T}) - \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^{T\cup\Delta_\infty}_{K,S_0}) = \rho_{\chi^*}(T,S) - s_\chi(S) =$$

$$\sum_{v\in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi^*} + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi^*} + \delta_{1,\chi} - \delta_{\omega,\chi} - \sum_{v\in S_{0,k}} \rho_{v,\chi} - \delta_{2,p}\psi(1)|S_{\infty,k}| - s_\chi(S).$$ [46]

Si en outre, sous la conjecture de Jaulent, $k = \mathbb{Q}$ (i.e. $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois G d'ordre étranger à p), ou si S_0 est non vide et $E_{K'}^{S_0'}$ monogène (i.e. $-\delta_{1,\psi'} + \sum_{\ell\in\{q,\infty\}} \rho_{\ell,\psi'} \leq \psi'(1)$ pour tout $\psi' \in \Psi'$), on a :

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}^S_{K,T}) = \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^{T\cup\Delta_\infty}_{K,S_0}) + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi^*} - \delta_{\omega,\chi} + \delta_{2,p}\psi(1)|\Delta_{\infty,k}| +$$

$$\Big(\psi(1)r_2(k) + \sum_{v\in P\ell^{rc}_{k,\infty}} \rho_{v,\chi^*} + \delta_{1,\chi} - \sum_{v\in S_{0,k}} \rho_{v,\chi}\Big) \wedge 0,$$

où $P\ell^{rc}_{k,\infty}$ est l'ensemble des places à l'infini réelles de k, complexifiées dans K [47].

Démonstration. On a :

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}^S_T) = \mathrm{rg}_\chi(\mathcal{A}^S_T) - s_\chi(S) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell^S_T) - s_\chi(S).$$

Il vient donc, à partir de 5.18, (ii), des formules 5.15 et du théorème 10.5 et ses corollaires :

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}^S_T) - \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^{T\cup\Delta_\infty}_{S_0}) = \rho_{\chi^*}(T,S) - s_\chi(S) =$$

[46] Cette formule est valable sans aucune hypothèse et donne la relation attendue lorsque le calcul de $s_\chi(S)$ n'est pas donné par une formule ; dans les deux cas particuliers qui suivent, on peut complètement calculer le second membre.

[47] On notera que pour $p \neq 2$, $P\ell^{rc}_{k,\infty} = P\ell^r_{k,\infty}$, car K est totalement imaginaire, et que, pour $p = 2$, $P\ell^{rc}_{k,\infty} = \emptyset$, car $[K : k]$ est impair.

$$\sum_{v\in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi^*} + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi^*} + \delta_{1,\chi} - \delta_{\omega,\chi} - \sum_{v\in S_{0,k}} \rho_{v,\chi} - \delta_{2,p}\psi(1)|S_{\infty,k}| -$$
$$\psi(1)[k:\mathbb{Q}] + \Big(\psi(1)[k:\mathbb{Q}]\Big) \wedge \Big(-\delta_{1,\chi} + \sum_{v\in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi} + \sum_{v\in S_{0,k}} \rho_{v,\chi}\Big).$$

On rappelle alors que, d'après le lemme 5.14, on a :

$$\sum_{v\in P\ell_{k,\infty}} (\rho_{v,\chi} + \rho_{v,\chi^*}) - \psi(1)[k:\mathbb{Q}] = \delta_{2,p}\psi(1)r_1(k). \tag{6}$$

En utilisant la formule évidente $a\wedge b = b+(a-b)\wedge 0$, pour tout $a,\ b\in\mathbb{Z}$, on peut donc écrire l'expression de $\rho_{\chi^*}(T,S) - s_\chi(S)$ sous la forme :

$$\sum_{v\in P\ell_{k,\infty}} (\rho_{v,\chi^*} + \rho_{v,\chi}) - \psi(1)[k:\mathbb{Q}] - \delta_{\omega,\chi} + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi^*} -$$
$$\delta_{2,p}\psi(1)|S_{\infty,k}| + \Big(\psi(1)[k:\mathbb{Q}] + \delta_{1,\chi} - \sum_{v\in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi} - \sum_{v\in S_{0,k}} \rho_{v,\chi}\Big) \wedge 0.$$

On applique alors (6) deux fois pour obtenir :

$$\rho_{\chi^*}(T,S) - s_\chi(S) = \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi^*} - \delta_{\omega,\chi} + \delta_{2,p}\psi(1)|\Delta_{\infty,k}| +$$
$$\Big(\sum_{v\in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi^*} - \delta_{2,p}\psi(1)r_1(k) + \delta_{1,\chi} - \sum_{v\in S_{0,k}} \rho_{v,\chi}\Big) \wedge 0,$$

ce qui conduit au résultat puisque $\sum_{v\in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\chi^*} - \delta_{2,p}\psi(1)r_1(k)$ peut s'écrire :

$$\psi(1)r_2(k) + \sum_{v\in P\ell^{rc}_{k,\infty}} \rho_{v,\chi^*}.$$

Dans les corollaires qui suivent, nous considérons soit le "cas absolu" (pour lequel on utilise 10.7), soit le "cas monogène" (i.e. $E_{K'}^{S'_0}$ monogène, pour lequel on utilise 10.8).

Corollaire 10.11 ($p\neq 2$). *Pour $p\neq 2$, on a les expressions suivantes ($S=S_0\subset P\ell_{K,0}$) :*

(α) $\chi\notin\{1,\omega\}$ *:*

(i) *cas relatif général, cas monogène :*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}_{K,T}^S) = \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,S}^T) + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi^*}\ ;$$

(i′) *cas relatif normal, cas monogène :*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}_{K,T}^S) = \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_{K,S}^T) + \psi(1)|\{v\in T_k,\ H_v^{\chi^*}=1\}|\ ;$$

(ii) *cas absolu général :*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}^S_{K,T}) = \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^T_{K,S}) + \sum_{q\in T_\mathbb{Q}} \rho_{q,\chi^*} + \Big(\rho_{\infty,\chi^*} - \sum_{l\in S_\mathbb{Q}} \rho_{l,\chi}\Big) \wedge 0 \ ;$$

(ii′) *cas absolu normal :*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}^S_{K,T}) = \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell^T_{K,S}) + \psi(1)|\{q \in T_\mathbb{Q},\ H^{\chi^*}_q = 1\}| +$$
$$\psi(1)\Big(d_{\infty,\chi^*} - |\{l \in S_\mathbb{Q},\ H^\chi_l = 1\}|\Big) \wedge 0.$$

(β) $\chi \in \{1, \omega\}$ *:*

(i) *cas relatif, cas monogène :*

$$\mathrm{rg}_\omega(\mathcal{T}^S_{K,T}) = \mathrm{rg}_p(C\ell^T_{k,S}) + |T_k| - 1,$$
$$\mathrm{rg}_p(\mathcal{T}^S_{k,T}) = \mathrm{rg}_\omega(C\ell^T_{K,S}) + |\{v \in T_k,\ H^\omega_v = 1\}| - \delta_{1,\omega} \ ;$$

(ii) *cas absolu :*

$$\mathrm{rg}_\omega(\mathcal{T}^S_{K,T}) = \mathrm{rg}_p(C\ell^T_{\mathbb{Q},S}) + |T_\mathbb{Q}| - 1 + \Big(1 - |\{l \in S_\mathbb{Q},\ l \equiv 1(p)\}|\Big) \wedge 0,$$
$$\mathrm{rg}_p(\mathcal{T}^S_{\mathbb{Q},T}) = \mathrm{rg}_\omega(C\ell^T_{K,S}) + |\{q \in T_\mathbb{Q},\ q \equiv 1(p)\}| + (1 - |S_\mathbb{Q}|) \wedge 0 \ ;$$

(iii) *cas* $G = 1$*, cas monogène :*

$$\mathrm{rg}_p(\mathcal{T}^S_{K,T}) = \mathrm{rg}_p(C\ell^T_{K,S}) + |T| - 1.$$

Corollaire 10.12 (cas des corps à conjugaison complexe). *Si K est extension quadratique d'un corps totalement réel k, on a, dans le cas monogène ou $k = \mathbb{Q}$:*

$$\mathrm{rg}_p(\mathcal{T}^S_{k,T}) = \mathrm{rg}_-(C\ell^T_{K,S}) + |\{v \in T_k,\ H^K_v = 1\}| + \Big(1 - |S_k|\Big) \wedge 0,$$
$$\mathrm{rg}_-(\mathcal{T}^S_{K,T}) = \mathrm{rg}_p(C\ell^T_{k,S}) + |T_k| - 1 + \Big([k:\mathbb{Q}] - |\{v \in S_k,\ H^K_v = 1\}|\Big) \wedge 0.$$

Corollaire 10.13 ($p = 2$). *Pour $p = 2$, on a les expressions suivantes ($S = S_0 \cup S_\infty$) :*

(α) $\chi \neq 1$ *:*

(i) *cas relatif général, cas monogène :*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}^S_{K,T}) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^{T\cup\Delta_\infty}_{K,S_0}) + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi} + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}| \ ;$$

(i′) *cas relatif normal, cas monogène :*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}^S_{K,T}) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^{T\cup\Delta_\infty}_{K,S_0}) + \psi(1)|\{v \in T_k,\ H^\chi_v = 1\}| + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}| \ ;$$

(ii) *cas absolu général :*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}^{S_0\mathrm{res}}_{K,T}) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell^{T\mathrm{ord}}_{K,S_0}) + \sum_{q\in T_\mathbb{Q}} \rho_{q,\chi} + \psi(1) - \sum_{l\in S_{0,\mathbb{Q}}} \rho_{l,\chi},$$

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}_{K,T}^{S_0\mathrm{ord}}) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,S_0}^{T\mathrm{res}}) + \sum_{q\in T_{\mathbb{Q}}} \rho_{q,\chi} - \sum_{l\in S_{0,\mathbb{Q}}} \rho_{l,\chi} \ ;$$

(ii′) *cas absolu normal :*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}_{K,T}^{S_0\mathrm{res}}) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,S_0}^{T\mathrm{ord}}) + \psi(1)|\{q \in T_{\mathbb{Q}},\ H_q^\chi = 1\}| + \psi(1) -$$

$$\psi(1)|\{l \in S_{0,\mathbb{Q}},\ H_l^\chi = 1\}|,$$

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}_{K,T}^{S_0\mathrm{ord}}) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_{K,S_0}^{T\mathrm{res}}) + \psi(1)|\{q \in T_{\mathbb{Q}},\ H_q^\chi = 1\}| -$$

$$\psi(1)|\{l \in S_{0,\mathbb{Q}},\ H_l^\chi = 1\}|.$$

(β) $\chi = 1$ *:*

(i) *formule du 2-rang générale, cas monogène :*

$$\mathrm{rg}_2(\mathcal{T}_{K,T}^{S}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_{K,S_0}^{T\cup\Delta_\infty}) + |T| - 1 + |\Delta_\infty| \ ;$$

(ii) *cas absolu :*

$$\mathrm{rg}_2(\mathcal{T}_{\mathbb{Q},T}^{S_0\mathrm{res}}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathbb{Q},S_0}^{T\mathrm{ord}}) + |T_{\mathbb{Q}}| + \Big(1 - |S_{0,\mathbb{Q}}|\Big) \wedge 0,$$

$$\mathrm{rg}_2(\mathcal{T}_{\mathbb{Q},T}^{S_0\mathrm{ord}}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_{\mathbb{Q},S_0}^{T\mathrm{res}}) + |T_{\mathbb{Q}}| - 1 + \Big(1 - |S_{0,\mathbb{Q}}|\Big) \wedge 0.$$

Corollaire 10.14 ($S_0 = \emptyset$). *Si $S_0 = \emptyset$, il vient :*

(i) *cas $p \neq 2$:*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}_{K,T}) = \mathrm{rg}_{\chi^*}(C\ell_K^T) + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi^*} - \delta_{\omega,\chi} \ ;$$

(ii) *cas $p = 2$:*

$$\mathrm{rg}_\chi(\mathcal{T}_{K,T}^{S_\infty}) = \mathrm{rg}_{\chi^{-1}}(C\ell_K^{T\cup\Delta_\infty}) + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi} - \delta_{1,\chi} + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}| \ ;$$

en particulier, on retrouve les formules de p-rangs classiques, pour la p-ramification abélienne ($T = P\ell_{K,p}$) :

(i′) *cas $p \neq 2$:*

$$\mathrm{rg}_p(\mathcal{T}_{K,P\ell_p}) = \mathrm{rg}_p(C\ell_K^{P\ell_p}) + |P\ell_{K,p}| - 1 \ ;$$

(ii′) *cas $p = 2$:*

$$\mathrm{rg}_2(\mathcal{T}_{K,P\ell_2}^{\mathrm{res}}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{P\ell_2\mathrm{ord}}) + |P\ell_{K,2}| - 1 + r_1(K),$$

$$\mathrm{rg}_2(\mathcal{T}_{K,P\ell_2}^{\mathrm{ord}}) = \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{P\ell_2\mathrm{res}}) + |P\ell_{K,2}| - 1.$$

11. Formules de rangs pour les groupes $K_2(Z_{K,T})$.

Soit K un corps de nombres. Pour tout ensemble fini T de places finies de K, on a la suite exacte fondamentale, induite par les symboles modérés en les places finies de K (cf. [T, (5.3)]) :

$$(0) \qquad 1 \longrightarrow K_2(Z_{K,T}) \longrightarrow K_2(K) \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}\in P\ell_{K,0}-T} \overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} \longrightarrow 1,$$

où $Z_{K,T}$ est l'anneau des T-entiers[48] de K.

En généralisant le point de vue de [G3], on définit, pour $S_\infty \subseteq P\ell^r_{K,\infty}$, les noyaux modérés avec "signature" :

$$K_2^{S_\infty}(Z_{K,T}),$$

au moyen de la suite exacte modifiée [49] :

$$(0') \qquad 1 \longrightarrow K_2^{S_\infty}(Z_{K,T}) \longrightarrow K_2(K) \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}\in(P\ell_{K,0}-T)\cup S_\infty} \overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} \longrightarrow 1,$$

où, pour $\mathfrak{p} \in P\ell^r_{K,\infty}$, $\overline{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ désigne $\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times+}$; par conséquent, ces noyaux sont reliés par la suite exacte :

$$(1) \qquad 1 \longrightarrow K_2^{S_\infty}(Z_{K,T}) \longrightarrow K_2(Z_{K,T}) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S_\infty} \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times+} \longrightarrow 1$$

(la définition des $K_2^{S_\infty}$ n'ayant d'intérêt, pour les calculs de p-rangs, que pour $p = 2$).

Pour $S_\infty = P\ell^r_{K,\infty}$, nous posons :

$$K_2^{P\ell^r_\infty}(Z_{K,T}) = K_2^{\mathrm{pos}}(Z_{K,T}).$$

On suppose maintenant que K contient μ_p et on désigne par G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p, de corps fixe k. On rappelle que dans k^{gal}/k, $(K_2^{S_\infty}(Z_{F,T}))_F$ constitue une $\mathcal{G}$-famille au sens du § 3.3 de la section 3 (cf. [Ke, §§ 3, 4]).

D'après Tate (cf. [T, th. (6.3), lem. (6.4)]), on a la suite exacte de G-modules :

$$(2) \qquad 1 \longrightarrow \mu_p \otimes N_2(K) \longrightarrow \mu_p \otimes (K^\times/K^{\times p}) \longrightarrow K_2(K)[p] \longrightarrow 1,$$

dans laquelle $N_2(K) = \{a \in K^\times,\ \{\zeta, a\} = 1\}/K^{\times p}$, pour un générateur ζ fixé de μ_p , et où l'on a l'isomorphisme de G-modules :

$$(3) \qquad \mu_p \otimes N_2(K) \simeq \Big(\prod_{\mathfrak{p}\in P\ell^c_{K,\infty}} \mu_p\Big) \times (\mu_p \otimes \mu_p).$$

---

[48] i.e. l'ensemble des $\alpha \in K$ tels que $v_{\mathfrak{p}}(\alpha) \geq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in P\ell_{K,0} - T$.

[49] Pour laquelle le symbole en $\mathfrak{p} \in S_\infty$ est le symbole de Hilbert correspondant, considéré comme modéré (cf. [G3, I, 3]).

Soient $T \subset P\ell_{K,0}$, $S_\infty \subseteq P\ell^r_{K,\infty}$, T et S_∞ stables par G ; montrons que l'on a la suite exacte de G-modules :

$$(4) \qquad 1 \longrightarrow \mu_p \otimes N_2(K) \longrightarrow \mu_p \otimes W^{S_\infty}_{K,T\cup P\ell_p} \longrightarrow K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})[p] \longrightarrow 1,$$

où (cf. définitions 5.5) :

$$(5) \qquad W^{S_\infty}_{K,T\cup P\ell_p} = \mathrm{Rad}(L^{S_\infty}_{T\cup P\ell_p}/K).$$

En effet, d'après (2) et par définition des symboles modérés, $K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})[p]$ est l'ensemble des $\{\zeta,\alpha\} \in K_2(K)[p]$ tels que l'image de $\zeta^{v_\mathfrak{p}(\alpha)}$ dans $\overline{K}_\mathfrak{p}^\times$ soit égale à 1 pour tout $\mathfrak{p} \in (P\ell_{K,0} - T) \cup S_\infty$; comme $\zeta \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} \in P\ell_{K,p}$, les conditions précédentes caractérisent les $\alpha \in K^\times$ tels que $\alpha K^{\times p} \in W^{S_\infty}_{K,T\cup P\ell_p}$ (cf. 5.7) ; d'où (4).

Remarquons que si M est un G-module de type fini, alors on a, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, la formule :

$$(6) \qquad \mathrm{rg}_\chi(\mu_p \otimes M) = \mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}(M)$$

(on notera que $\omega^{-1}\chi$ est l'"inverse" du reflet χ^* de χ, mais que $\rho_{v,\omega^{-1}\chi} = \rho_{v,\chi^*}$).

On obtient alors, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$ (cf. (3),(4) et (6)) :

$$\mathrm{rg}_\chi(K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}(W^{S_\infty}_{K,T\cup P\ell_p}) - \mathrm{rg}_\chi(\mu_p \otimes N_2(K)) =$$
$$\mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}(W^{S_\infty}_{K,T\cup P\ell_p}) - \mathrm{rg}_\chi\Big(\prod_{v\in P\ell^c_{k,\infty}\cup P\ell^{rc}_{k,\infty}} \prod_{\mathfrak{p}|v} \mu_p\Big) - \mathrm{rg}_\chi(\mu_p \otimes \mu_p) \ ;$$

or $\mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}(W^{S_\infty}_{K,T\cup P\ell_p}) = \mathrm{rg}_{\omega^2\chi^{-1}}(C\ell^{S_\infty}_{K,T\cup P\ell_p})$ (cf. proposition 5.6), $\mathrm{rg}_\chi(\prod_{\mathfrak{p}|v} \mu_p) = \rho_{v,\omega^{-1}\chi}$ (cf. lemme 5.13) et $\mathrm{rg}_\chi(\mu_p \otimes \mu_p) = \delta_{\omega^2,\chi}$ (symbole de Kronecker), ce qui conduit à :

$$(7) \quad \mathrm{rg}_\chi(K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_{\omega^2\chi^{-1}}(C\ell^{S_\infty}_{K,T\cup P\ell_p}) - \psi(1)r_2(k) - \sum_{v\in P\ell^{rc}_{k,\infty}} \rho_{v,\omega^{-1}\chi} - \delta_{\omega^2,\chi}.$$

D'après le théorème 5.18, appliqué à $T \cup P\ell_p$, S_∞, et au caractère $\omega^{-1}\chi$, il vient, en posant $\Delta_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rg}_{\omega^2\chi^{-1}}(C\ell^{S_\infty}_{K,T\cup P\ell_p}) - \mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}(C\ell_K^{T\cup P\ell_p\cup\Delta_\infty}) = \rho_{\omega^{-1}\chi}(T\cup P\ell_p, S_\infty) \\
&\quad = \sum_{v\in P\ell_{k,\infty}} \rho_{v,\omega^{-1}\chi} + \sum_{v\in T_k\cup P\ell_{k,p}} \rho_{v,\omega^{-1}\chi} \\
(7') &\qquad + \delta_{\omega,\omega^{-1}\chi} - \delta_{1,\omega^{-1}\chi} - \delta_{2,p}\psi(1)|S_{\infty,k}| \\
&\quad = \psi(1)r_2(k) + \sum_{v\in P\ell^r_{k,\infty}} \rho_{v,\omega^{-1}\chi} + \sum_{v\in T_k\cup P\ell_{k,p}} \rho_{v,\omega^{-1}\chi} \\
&\qquad + \delta_{\omega^2,\chi} - \delta_{\omega,\chi} - \delta_{2,p}\psi(1)|S_{\infty,k}|.
\end{aligned}
$$

En remarquant que $\sum_{v\in P\ell^r_{k,\infty}} \rho_{v,\omega^{-1}\chi} - \sum_{v\in P\ell^{rc}_{k,\infty}} \rho_{v,\omega^{-1}\chi} - \delta_{2,p}\psi(1)r_1(k)$ est identiquement nul, on obtient, à partir de (7) et (7′), l'énoncé suivant, qui généralise des formules de p-rangs classiques (correspondant au cas $G = 1$) issues de [T, th. (6.2)] (cf. [Ke, th. (3.5), (3.6), (5.4)], [B, th. (4.2)]), ainsi que le cas $T = S_\infty = \emptyset$ de [J3] :

Théorème 11.1. *Soit K un corps de nombres contenant μ_p, soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p, de corps fixe k, et soient $T \subset P\ell_{K,0}$, $S_\infty \subseteq P\ell^r_{K,\infty}$, T et S_∞ stables par G. On a alors, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$:*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rg}_\chi(K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}&(C\ell_K^{T\cup P\ell_p\cup\Delta_\infty}) \\
&+ \sum_{v\in T_k\cup P\ell_{k,p}} \rho_{v,\omega^{-1}\chi} - \delta_{\omega,\chi} + \delta_{2,p}\psi(1)|\Delta_{\infty,k}|.
\end{aligned}
$$

Corollaire 11.2 ($p \neq 2$). *Dans le cas $p \neq 2$ on a :*

(α) $\chi \neq \omega$:

(i) *cas relatif général :*

$$\mathrm{rg}_\chi(K_2(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}(C\ell_K^{T\cup P\ell_p}) + \sum_{v\in T_k\cup P\ell_{k,p}} \rho_{v,\omega^{-1}\chi} \ ;$$

(i′) *cas relatif normal :*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rg}_\chi(K_2(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}&(C\ell_K^{T\cup P\ell_p}) \\
&+ \psi(1)|\{v \in T_k \cup P\ell_{k,p},\ H_v^{\omega^{-1}\chi} = 1\}| \ ;
\end{aligned}
$$

(ii) *cas absolu général :*

$$\mathrm{rg}_\chi(K_2(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}(C\ell_K^{T\cup P\ell_p}) + \sum_{q\in T_{\mathbb{Q}}\cup\{p\}} \rho_{q,\omega^{-1}\chi} \ ;$$

(ii′) *cas absolu normal :*

$$\mathrm{rg}_\chi(K_2(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_{\omega^{-1}\chi}(C\ell_K^{T\cup P\ell_p}) + \psi(1) \sum_{q\in T_{\mathbb{Q}}\cup\{p\}} d_{q,\omega^{-1}\chi}.$$

(β) $\chi = \omega$:

(i) *cas général :*

$$\mathrm{rg}_\omega(K_2(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_p(C\ell_k^{T\cup P\ell_p}) + |T_k \cup P\ell_{k,p}| - 1 \ ;$$

(ii) *(cas $G = 1$) :*

$$\mathrm{rg}_p(K_2(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_p(C\ell_K^{T\cup P\ell_p}) + |T \cup P\ell_{K,p}| - 1.$$

Corollaire 11.3 (corps à conjugaison complexe, $p \neq 2$). *Si de plus K est extension quadratique d'un corps totalement réel k, on a (cf. remarque du (c) de l'introduction au chapitre II) :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}_p(K_2(Z_{k,T})) &= \mathrm{rg}_-(C\ell_K^{T\cup P\ell_p}) + |\{v \in T_k \cup P\ell_{k,p},\ H_v^K = 1\}|,\\
\mathrm{rg}_-(K_2(Z_{K,T})) &= \mathrm{rg}_p(C\ell_k^{T\cup P\ell_p}) + |T_k \cup P\ell_{k,p}| - 1.
\end{aligned}$$

Corollaire 11.4 ($p = 2$). *Si $p = 2$ (cas pour lequel $\omega = 1$), on a :*

(α) $\chi \neq 1$:

(i) *cas relatif général :*

$$\mathrm{rg}_\chi(K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{T\cup P\ell_2\cup\Delta_\infty}) + \sum_{v\in T_k\cup P\ell_{k,2}} \rho_{v,\chi} + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}| \ ;$$

(i′) *cas relatif normal :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}_\chi(K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})) = {}& \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{T\cup P\ell_2\cup\Delta_\infty}) +\\
& \psi(1)|\{v \in T_k \cup P\ell_{k,2},\ H_v^\chi = 1\}| + \psi(1)|\Delta_{\infty,k}| \ ;
\end{aligned}$$

(ii) *cas absolu général :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}_\chi(K_2(Z_{K,T})) &= \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{T\cup P\ell_2\mathrm{ord}}) + \sum_{q\in T_{\mathbb{Q}}\cup\{2\}} \rho_{q,\chi} + \psi(1),\\
\mathrm{rg}_\chi(K_2^{\mathrm{pos}}(Z_{K,T})) &= \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{T\cup P\ell_2\mathrm{res}}) + \sum_{q\in T_{\mathbb{Q}}\cup\{2\}} \rho_{q,\chi} \ ;
\end{aligned}$$

(ii′) *cas absolu normal :*

$$\mathrm{rg}_\chi(K_2(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{T\cup P\ell_2\mathrm{ord}}) + \psi(1) \sum_{q\in T_{\mathbb{Q}}\cup\{2\}} d_{q,\chi} + \psi(1),$$

$$\mathrm{rg}_\chi(K_2^{\mathrm{pos}}(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{T\cup P\ell_2\mathrm{res}}) + \psi(1) \sum_{q\in T_{\mathbb{Q}}\cup\{2\}} d_{q,\chi}.$$

(β) *formule du 2-rang générale (K arbitraire) :*

$$\mathrm{rg}_2(K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_2(C\ell_K^{T\cup P\ell_2\cup\Delta_\infty}) + |T\cup P\ell_{K,2}| - 1 + |\Delta_\infty|.$$ [50]

Remarque 11.5. (i) Le rapprochement du théorème 11.1 avec le corollaire 10.14 montre que l'on a, sous la conjecture de Leopoldt pour p dans K, la relation :

$$\mathrm{rg}_\chi(K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_{\omega^2\chi^{-1}}(\mathcal{T}_{K,T\cup P\ell_p}^{S_\infty}),$$

pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$ (ce qui généralise [G3, th. 1]) ; on remarque également que les caractères concernés se correspondent dans une involution distincte de l'involution du miroir (sauf si $\mu_p \subset k$).
(ii) On a, lorsque $p = 2$:

$$\mathrm{rg}_\chi(K_2(Z_{K,T})) - \mathrm{rg}_\chi(K_2^{\mathrm{pos}}(Z_{K,T})) = \\ r_1(k) - [\mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{T\cup P\ell_2\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{T\cup P\ell_2\mathrm{ord}})].$$

Exemples 11.6. Montrons, dans le cadre des groupes $K_2(Z_K)$, comment obtenir des inégalités de type "Spiegelungssatz". On considère pour cela l'involution de $\mathfrak{X}_p(G)$ définie par :

$$\overline{\chi} = \omega^3\chi^{-1},$$

pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$.

Le théorème 11.1 conduit alors à :

$$\text{(8)}\quad \mathrm{rg}_{\overline{\chi}}(K_2^{\mathrm{pos}}(Z_K)) - \mathrm{rg}_\chi(K_2^{\mathrm{pos}}(Z_K)) = \\ \mathrm{rg}_{\varphi^*}(C\ell^{P\ell_p\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{P\ell_p\mathrm{res}}) + \sum_{v\in P\ell_{k,p}} (\rho_{v,\varphi^*} - \rho_{v,\varphi}) - \delta_{\omega^2,\chi} + \delta_{\omega,\chi},$$

où l'on a posé $\varphi = \omega^{-1}\chi$.

On peut alors utiliser la majoration :

$$\mathrm{rg}_{\varphi^*}(C\ell^{P\ell_p\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{P\ell_p\mathrm{res}}) \le \mathrm{rg}_{\varphi^*}(C\ell^{\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{\mathrm{ord}}) \\ + \mathrm{rg}_\varphi(c\ell^{\mathrm{ord}}(\langle P\ell_p\rangle)),$$

puis le théorème de réflexion de Leopoldt (cf. théorèmes 7.7, 8.8) qui conduit à :

(9)
$$\mathrm{rg}_{\varphi^*}(C\ell^{P\ell_p\mathrm{res}}) - \mathrm{rg}_\varphi(C\ell^{P\ell_p\mathrm{res}}) \le \mathrm{rg}_\varphi(E_{p\text{-prim}}^{\mathrm{ord}}/E^{\mathrm{ord}p}) + \mathrm{rg}_\varphi(c\ell^{\mathrm{ord}}(\langle P\ell_p\rangle)).$$

[50] Si $K = \mathbb{Q}$, on retrouve que $\mathrm{rg}_2(K_2^{\mathrm{pos}}(\mathbb{Z})) = 0$.

On obtient donc finalement, à partir de (8) et (9) :

(10)
$$\mathrm{rg}_{\overline{\chi}}(K_2^{\mathrm{pos}}(Z_K))-\mathrm{rg}_{\chi}(K_2^{\mathrm{pos}}(Z_K)) \leq \mathrm{rg}_{\varphi}(E^{\mathrm{ord}}_{p\text{-prim}}/E^{\mathrm{ord}p})+\mathrm{rg}_{\varphi}(c\ell^{\mathrm{ord}}(\langle P\ell_p\rangle))$$
$$+ \sum_{v\in P\ell_{k,p}} (\rho_{v,\varphi^*} - \rho_{v,\varphi}) - \delta_{\omega^2,\chi} + \delta_{\omega,\chi}, \ \varphi = \omega^{-1}\chi.$$

Remarquons que l'on peut toujours majorer $\mathrm{rg}_{\varphi}(E^{\mathrm{ord}}_{p\text{-prim}}/E^{\mathrm{ord}p})$ par $\mathrm{rg}_{\varphi}(E^{\mathrm{ord}})$ et $\mathrm{rg}_{\varphi}(c\ell^{\mathrm{ord}}(\langle P\ell_p\rangle))$ par $\mathrm{rg}_{\varphi}(\langle P\ell_p\rangle) = \sum_{v\in P\ell_{k,p}} \rho_{v,\varphi}$.

Par exemple, considérons la situation du théorème de Scholz (cf. 7.8, (i)) abordée dans [B], en supposant également que $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est le corps quadratique réel et que χ est le caractère qui lui correspond ; il vient, compte tenu du fait que $K_2^{\mathrm{pos}}(\mathbb{Z}) = 1$:

$$|P\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),3}| - |P\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),3}| - \mathrm{rg}_3(c\ell^{\mathrm{ord}}(\langle P\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),3}\rangle)) \leq$$
$$\mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})) - \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})})) \leq$$
$$|P\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}),3}| - |P\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),3}| + \mathrm{rg}_3(\langle\varepsilon\rangle_{3\text{-prim}}/\langle\varepsilon\rangle^3) + \mathrm{rg}_3(c\ell^{\mathrm{ord}}(\langle P\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{d}),3}\rangle)).$$

Si $\mathfrak{p}$ est une place de K au-dessus de 3, l'ordre, noté $o(c\ell^{\mathrm{ord}}(\mathfrak{p}))$, de la classe de $\mathfrak{p}$, ne peut être multiple de 3 que si 3 se décompose dans K ; d'où les 5 situations suivantes où l'on a posé $\delta(\varepsilon) = 1$ (resp. 0) si ε est 3-primaire (resp. sinon) :

(i) 3 non décomposé dans K :

$$0 \leq \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})) - \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})})) \leq \delta(\varepsilon) \ ;$$

(ii) 3 décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $o(c\ell^{\mathrm{ord}}(\mathfrak{p})) \not\equiv 0 \ (3)$:

$$-1 \leq \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})) - \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})})) \leq \delta(\varepsilon) - 1 \ ;$$

(iii) 3 décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $o(c\ell^{\mathrm{ord}}(\mathfrak{p})) \equiv 0 \ (3)$:

$$-1 \leq \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})) - \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})})) \leq \delta(\varepsilon) \ ;$$

(iv) 3 décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$, $o(c\ell^{\mathrm{ord}}(\mathfrak{p})) \not\equiv 0 \ (3)$:

$$1 \leq \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})) - \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})})) \leq \delta(\varepsilon) + 1 \ ;$$

(v) 3 décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$, $o(c\ell^{\mathrm{ord}}(\mathfrak{p})) \equiv 0 \ (3)$:

$$0 \leq \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})) - \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})})) \leq \delta(\varepsilon) + 1.$$

Le nombre $d = 1887 = 3 \cdot 629$ réalise la différence maximum (cas (v)) :

$$\mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})) - \mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})})) = 2 \ ;$$

en effet, on a $C\ell^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Q}(\sqrt{1887})} = 1$ et $C\ell^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-629})} \simeq \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, par conséquent $\delta(\varepsilon) = 1$; on vérifie que $o(c\ell^{\mathrm{ord}}(\mathfrak{p})) = 6$, d'où $\mathrm{rg}_3(C\ell^{P\ell_3 \mathrm{ord}}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-629})}) = 1$ et $\mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{1887})})) = 2$ (th. 11.1), tandis que $\mathrm{rg}_3(K_2(Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{-629})})) = 0$.

12. Formules de rangs conjecturales en K-théorie supérieure.

(Avec des indications de T. Nguyen Quang Do).

On peut envisager une approche unitaire des résultats 10.14 et 11.1, et par là espérer les généraliser (au moins conjecturalement) à la K-théorie supérieure paire ; cette approche, cohomologique, utilise essentiellement les théorèmes de dualité de Poitou-Tate et, de ce fait (contrairement à l'approche naïve des sections 10 et 11), est mal adaptée au cas $p = 2$, $S_\infty \neq \emptyset$.

On fait l'hypothèse que K contient μ_p et qu'il vérifie la conjecture de Leopoldt pour p. On fixe un groupe d'automorphismes G de K, d'ordre étranger à p.

Soient alors T un ensemble fini de places finies de K, T contenant $P\ell_{K,p}$ [51], et S_∞ un ensemble de places infinies réelles de K, T et S_∞ stables par G ; on pose $\Delta_\infty = P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty$.

Le point de départ est la suite exacte de G-modules (cf. [Ko, th. (3.75), 2]) [52] :

$$(0) \quad 1 \longrightarrow (V^{S_\infty}_{K,T}/K_T^{\times p})^* \longrightarrow H^2(\mathcal{G}^{S_\infty}_{K,T}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in T \cup \Delta_\infty} H^2(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow {\mu_p}^* \longrightarrow 1,$$

dans laquelle :

$\mathcal{G}^{S_\infty}_{K,T}$ est le groupe de Galois de la p-extension algébrique T-ramifiée, S_∞-décomposée maximale de K,

$\mathcal{G}_\mathfrak{p}$ est le groupe de Galois de la p-extension algébrique maximale de $K_\mathfrak{p}$,

$V^{S_\infty}_{K,T} = \{\alpha \in K_T^\times,\ v_\mathfrak{p}(\alpha) \equiv 0(p)\ \forall \mathfrak{p} \notin S_\infty,\ \alpha \in K_\mathfrak{p}^{\times p}\ \forall \mathfrak{p} \in T\}$ (cf. théorème 5.26),

$M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{F}_p)$ est le dual de Pontryagin du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel M, pour lequel on a l'isomorphisme $\mu_p \otimes M^* \simeq \widehat{M} = \mathrm{Hom}(M, \mu_p)$ (cf. définition 1.3).

Comme ici $V^{S_\infty}_{K,T}/K_T^{\times p} = W_K^{T \cup \Delta_\infty}$ (cf. proposition 5.7 et remarque 5.27), on a donc :

$$\mu_p \otimes (V^{S_\infty}_{K,T}/K_T^{\times p})^* \simeq \mathbb{F}_p \otimes C\ell_K^{T \cup \Delta_\infty} \qquad \text{(cf. théorème 1.5).}$$

[51] Les résultats précédents sur le K_2 montrent que cette hypothèse est naturelle.

[52] Qui reste, semble-t-il, à établir dans le cas $p = 2$, $S_\infty \neq \emptyset$.

Enfin, on sait [53] que $H^2(\mathcal{G}_\mathfrak{p}, \mathbb{F}_p) \simeq \mu_p^*$.

On a ainsi, par tensorisation par la m-ième puissance tensorielle $\mu_p^{\otimes(m)}$ de μ_p, $m \geq 1$, la suite exacte :

$$(1) \quad 1 \longrightarrow \mu_p^{\otimes(m-1)} \otimes C\ell_K^{T\cup\Delta_\infty} \longrightarrow H^2(\mathcal{G}_{K,T}^{S_\infty}, \mu_p^{\otimes(m)}) \\ \longrightarrow \mu_p^{\otimes(m-1)} \otimes \big(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in T\cup\Delta_\infty} \mathbb{F}_p\big) \longrightarrow \mu_p^{\otimes(m-1)} \longrightarrow 1,$$

dans laquelle $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in T\cup\Delta_\infty} \mathbb{F}_p = \bigoplus_{v\in T_k\cup\Delta_{\infty,k}} V_{H_v}$, où V_{H_v} est la représentation de permutation de G modulo H_v.

On a (ou aurait) alors les interprétations suivantes :

(i) $H^2(\mathcal{G}_{K,T}^{S_\infty}, \mathbb{F}_p) \simeq (\mathcal{T}_{K,T}^{S_\infty}[p])^*$
(cf. [N1] pour $p \neq 2$ ou pour $p = 2$ et $\mu_4 \subset K$, les cas manquants pouvant se déduire de certains arguments techniques de [N3]) ;

(ii) $H^2(\mathcal{G}_{K,T}^{S_\infty}, \mu_p^{\otimes(2)}) \simeq \mathbb{F}_p \otimes K_2^{S_\infty}(Z_{K,T})$
(propriété démontrée par C. Soulé [So] pour $p \neq 2$, par B. Kahn [K1] pour $p = 2$, dans le cas $S_\infty = \emptyset$, et par T. Nguyen Quang Do [N3, th. 3.6] pour $p = 2$, $S_\infty = P\ell_{K,\infty}^r$, le cas $p = 2$ général s'établissant à partir de [N3, § 3]) ;

(iii) $H^2(\mathcal{G}_{K,T}, \mu_p^{\otimes(m)}) \simeq \mathbb{F}_p \otimes K_{2m-2}(Z_{K,T})$, pour $p \neq 2$ et tout $m \geq 2$
(conjecture générale de Quillen-Lichtenbaum) ;

(iii′) pour $p = 2$, $S_\infty = \emptyset$, les récents travaux de B. Kahn [K2], et de J. Rognes et C. Weibel, montrent que l'isomorphisme (iii) n'est valable que pour $m \equiv 2 \bmod (4)$, et que, dans les autres cas, il existe un homomorphisme :

$$\mathbb{F}_2 \otimes K_{2m-2}(Z_{K,T}) \longrightarrow H^2(\mathcal{G}_{K,T}, \mu_2^{\otimes(m)}),$$

à noyau et conoyau de $\mathbb{F}_2$-dimensions majorées par $r_1(K)$ (cf. [K2, cor.2]).

Il est clair que tout ceci contient les énoncés 10.14 (suite exacte (0)) et 11.1 (suite exacte (1) pour $m = 2$), et que ces considérations, ainsi que l'étude du cas $m = 2$ de la section 11, invitent à poser la question suivante :

Question 12.1. *Peut-on définir naturellement des objets $K_{2m-2}^{S_\infty}(Z_{K,T})$ (ne différant des $K_{2m-2}(Z_{K,T})$ qu'au niveau des 2-Sylow), pour $S_\infty \subseteq P\ell_{K,\infty}^r$ [54], de telle sorte que $\mathbb{F}_2 \otimes K_{2m-2}^{S_\infty}(Z_{K,T})$ soit isomorphe à $H^2(\mathcal{G}_{K,T}^{S_\infty}, \mu_2^{\otimes(m)})$?*

---

[53] Grâce au théorème de dualité locale de Poitou-Tate, ou au théorème de structure des groupes de Demuškin pour $\mathfrak{p} \in P\ell_{K,0}$.

[54] On peut d'ailleurs étendre la question au cas d'un ensemble S fini quelconque de places de K comme le suggère la théorie des $\mathcal{T}_{K,T}^S$ de la section 10.

Le cas échéant, on aurait les formules de rangs explicites suivantes :

Conjecture 12.2. *Soit K un corps de nombres contenant μ_p, p premier ≥ 2 ; soit G un groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p, de corps fixe k, et soient $T \subset Pl_{K,0}$, T contenant $Pl_{K,p}$, $S_\infty \subset Pl^r_{K,\infty}$, T et S_∞ stables par G. Alors, pour tout $i \geq 1$ et pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_p(G)$, on a :*

$$(2) \quad \mathrm{rg}_\chi(K_{2i}^{S_\infty}(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_{\omega^{-i}\chi}(C\ell_K^{T\cup\Delta_\infty}) + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\omega^{-i}\chi} - \delta_{\omega^i,\chi} + \delta_{2,p}\psi(1)|\Delta_{\infty,k}|, \ \psi|\chi,$$

où $\Delta_\infty = Pl^r_{K,\infty} - S_\infty$.

En particulier :

$$\mathrm{rg}_p(K_{2i}^{S_\infty}(Z_{K,T})) = \mathrm{rg}_p(C\ell_K^{T\cup\Delta_\infty}) + |T| - 1 + \delta_{2,p}|\Delta_\infty|, \ i \geq 1.$$

Remarques 12.3. (i) Le $\omega^i\chi$-rang de $K_{2i}^{S_\infty}(Z_{K,T})$ serait indépendant de $i \geq 1$ et vaudrait :

$$\mathrm{rg}_\chi(C\ell_K^{T\cup\Delta_\infty}) + \sum_{v\in T_k} \rho_{v,\chi} - \delta_{1,\chi} + \delta_{2,p}\psi(1)|\Delta_{\infty,k}|.$$

Il coïnciderait alors avec le χ^*-rang de $\mathcal{T}_{K,T}^{S_\infty}$.

(ii) Pour χ fixé, le χ-rang de $K_{2i}^{S_\infty}(Z_{K,T})$, $i \geq 1$, serait périodique de période $p-1$.

(iii) Rappelons toutefois que la conjecture précédente est vraie pour tout p, dans le cas $i = 2$ (cf. théorème 11.1).

On pourra se référer à [Kol] pour des résultats complémentaires mettant en jeu les noyaux sauvages.

D'une manière générale, nous n'avons pas signalé les très nombreuses publications traitant des propriétés de $K_2(Z_K)$, dans la mesure où notre objectif est strictement celui rappelé dans l'introduction. Pour retrouver l'essentiel de ces références, on pourra consulter la bibliographie de [HK].

Index des principales notations.

p	nombre premier fixé
μ_p	groupe des racines p-ièmes de l'unité
K	corps de nombres contenant μ_p
G	groupe d'automorphismes de K, d'ordre étranger à p
$g,\ g_0$	$\lvert G\rvert$, p.p.c.m. des ordres des éléments de G
k	K^G
$e_{\mathfrak{p}}$	indice de ramification de $\mathfrak{p}\lvert p$ dans $K/\mathbb{Q}(\mu_p)$
$P\ell_K$	ensemble des places de K
$P\ell_{K,0},\ P\ell_{K,\infty}$	ensemble des places finies, à l'infini
$P\ell^r_{K,\infty},\ P\ell^c_{K,\infty}$	ensemble des places à l'infini réelles, complexes
$r_1(K),\ r_2(K)$	$\lvert P\ell^r_{K,\infty}\rvert,\ \lvert P\ell^c_{K,\infty}\rvert$
$P\ell_{K,p}$	ensemble des places de K divisant p
$P\ell^d_{k,\infty}$	ensemble des places à l'infini de k décomposées dans K/k
$P\ell^{rd}_{k,\infty},\ P\ell^{rc}_{k,\infty}$	ensembles des places à l'infini réelles de k décomposées, complexifiées, dans K/k
$r^d_1(k),\ r^c_1(k)$	$\lvert P\ell^{rd}_{k,\infty}\rvert,\ \lvert P\ell^{rc}_{k,\infty}\rvert$
$\Sigma,\ \Sigma_k$	ensemble de places de K, ensemble des places de k en-dessous de celles de Σ
$\mathfrak{f}$	module de K construit sur $P\ell_{K,0}$
$T,\ S$	parties finies disjointes de $P\ell_K$, stables par G, avec $T \subset P\ell_{K,0},\ S \subset P\ell_{K,0} \cup P\ell^r_{K,\infty}$
$T_p,\ S_p$	$T \cap P\ell_{K,p},\ S \cap P\ell_{K,p}$
$S_0,\ S_\infty$	$S \cap P\ell_{K,0},\ S \cap P\ell^r_{K,\infty}$
$\Delta_p,\ \Delta_\infty$	$P\ell_{K,p} - T_p - S_p,\ P\ell^r_{K,\infty} - S_\infty$
$T^*,\ S^*$	$T \cup \Delta_\infty,\ S_0 \cup \Delta_p$
$\mathfrak{m},\ \mathfrak{m}^*$	$\displaystyle\prod_{\mathfrak{p}\in S_0 - S_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p}\in S_p} \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1},\quad \mathfrak{m} \prod_{\mathfrak{p}\in\Delta_p} \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}}$
$\mathfrak{n}$	$\displaystyle\prod_{\mathfrak{p}\in T - T_p} \mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p}\in T_p} \mathfrak{p}^{pe_{\mathfrak{p}}+1}$
$\psi,\ \chi$	caractère $\mathbb{C}_p$, $\mathbb{Q}_p$-irréductible, de G
$\mathbb{Q}_p(\chi),\ \mathbb{Z}_p(\chi)$	corps des valeurs des $\psi\lvert\chi$ sur $\mathbb{Q}_p$, ordre maximal
$\Psi_p(G),\ \mathfrak{X}_p(G)$	ensemble des caractères $\mathbb{C}_p$, $\mathbb{Q}_p$-irréductibles

D_χ	système exact de représentants, dans $(\mathbb{Z}/g_0\mathbb{Z})^*$, des éléments de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\chi)/\mathbb{Q}_p)$
$\operatorname{Ker}\chi$, K^χ	noyau de χ, sous-corps de K fixe par $\operatorname{Ker}\chi$
G^χ	$\mathrm{Gal}(K^\chi/k)$
ω	caractère de Teichmüller sur G
χ^*	$\omega\chi^{-1}$ (reflet de χ)
e_χ	$\frac{\psi(1)}{g}\sum_{s\in G}\chi(s^{-1})s$ (idempotent associé à χ)
R_χ	$\mathbb{Z}_p[G]e_\chi$
M_χ	$(\mathbb{Z}_p\otimes M)^{e_\chi}$ (χ-composante du G-module M)
$\mathrm{rg}_\chi(M)$	nombre de fois que la représentation $\mathbb{F}_p$-irréductible de caractère χ figure dans M_χ/M_χ^p (χ-rang de M)
$\mathrm{rg}_p(M)$	dimension sur $\mathbb{F}_p$ de M/M^p (χ-rang de M pour $G=1$, $\chi=1$)
$M[p]$	$\{x\in M, x^p=1\}$
$H_v^K = H_v$ ($v\in P\ell_k$)	groupe de décomposition d'une place $\mathfrak{p}_0\vert v$ dans K/k
H_v^χ ($v\in P\ell_k$)	groupe de décomposition d'une place $\mathfrak{p}_0\vert v$ dans K^χ/k
c_v, c_v^χ	générateur de H_v, H_v^χ, lorsque $v\in P\ell_{k,\infty}$
$\rho_{v,\chi}$	$\frac{1}{\vert H_v^\chi\vert}\sum_{t\in H_v^\chi}\psi(t)$, $\psi\vert\chi$
$\rho_\chi(T,S)$	$\psi(1)r_2(k)+\sum_{v\in P\ell^r_{k,\infty}\cup T_k}\rho_{v,\chi}+\delta_{\omega,\chi}-\delta_{1,\chi}-\sum_{v\in S_{0,k}}\rho_{v,\chi^*}-\psi(1)\sum_{v\in S_{p,k}\cup\Delta_{p,k}}[k_v:\mathbb{Q}_p]-\delta_{2,p}\,\psi(1)\vert S_{\infty,k}\vert$, $\psi\vert\chi$
$\rho_p(T,S)$	$r_2(K)+r_1(K)+\vert T\vert-\vert S_0\vert-\sum_{\mathfrak{p}\in S_p\cup\Delta_p}[K_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_p]-\delta_{2,p}\vert S_\infty\vert$
$d_{v,\chi}$	égal à 1 (resp. 0) si $H_v^\chi=1$ (resp. sinon) (pour H_v^χ normal dans G^χ)
$E^S_{K,\mathfrak{f}}$ ($\mathfrak{f}\in\langle T\rangle$)	groupe des S-unités de K congrues à 1 mod $\mathfrak{f}$
$E_K = E_K^{\mathrm{pos}}$	groupe des unités totalement positives de K
$E_K^{P\ell^r_{K,\infty}} = E_K^{\mathrm{ord}}$	groupe des unités de K au sens ordinaire
$E_K^{S_0\mathrm{ord}}$	E_K^S pour $S=S_0\cup P\ell^r_{K,\infty}$ (S_0-unités au sens ordinaire)
$K_{T,\mathfrak{f}}^{\times\Delta_\infty}$ ($\mathfrak{f}\in\langle T\rangle$)	groupe des $x\in K^\times$, étrangers à T, positifs aux places de Δ_∞ et congrus à 1 modulo $\mathfrak{f}$
$K_T^\times$	groupe des $x\in K^\times$ étrangers à T

$K_T^{\times P\ell^r_\infty} = K_T^{\times \mathrm{pos}}$	groupe des éléments totalement positifs de $K_T^\times$
$P_{K,T,\mathfrak{f}}^{\Delta_\infty}$	$\{(x),\ x \in K_{T,\mathfrak{f}}^{\times\Delta_\infty}\}$
$P_{K,T} = P_{K,T}^{\mathrm{ord}}$	$\{(x),\ x \in K_T^\times\}$
$P_{K,T}^{P\ell^r_{K,\infty}} = P_{K,T}^{\mathrm{pos}}$	$\{(x),\ x \in K_T^{\times \mathrm{pos}}\}$
$I_K,\ I_{K,T}$	groupe des idéaux fractionnaires de K, étrangers à T
$Y_{T,\mathfrak{f}}^S\ (\mathfrak{f} \in \langle T\rangle)$	$\{y \in K_T^{\times p} K_{T,\mathfrak{f}}^{\times\Delta_\infty},\ (y) = \mathfrak{a}^p \mathfrak{a}_{S_0},\ \mathfrak{a} \in I_T,\ \mathfrak{a}_{S_0} \in \langle S_0\rangle\}$
$Y_{\Delta_p\text{-prim}}\ (Y \subset K_{P\ell_p}^\times)$	$\{y \in Y,\ y \equiv \xi_\mathfrak{p}^p \bmod \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}}, \forall \mathfrak{p} \in \Delta_p\}$
$Y_{p\text{-prim}}\ (Y \subset K_{P\ell_p}^\times)$	$\{y \in Y,\ y \equiv \xi_\mathfrak{p}^p \bmod \mathfrak{p}^{pe_\mathfrak{p}}, \forall \mathfrak{p} \in P\ell_{K,p}\}$
V_T^S	$\{\alpha \in K_T^\times,\ v_\mathfrak{p}(\alpha) \equiv 0 \bmod p\ \forall \mathfrak{p} \notin S,\ \alpha \in K_\mathfrak{p}^{\times p}\ \forall \mathfrak{p} \in T\}$
$C\ell_{K,\mathfrak{f}}^S\ (\mathfrak{f} \in \langle T\rangle)$	p-Sylow de $I_{K,T}/P_{K,T,\mathfrak{f}}^{\Delta_\infty}\langle S_0\rangle$
$C\ell_{K,\mathfrak{f}} = C\ell_{K,\mathfrak{f}}^{\mathrm{res}}$	p- groupe des classes de rayon modulo $\mathfrak{f}$ au sens restreint
$C\ell_{K,\mathfrak{f}}^{P\ell^r_{K,\infty}} = C\ell_{K,\mathfrak{f}}^{\mathrm{ord}}$	p- groupe des classes de rayon modulo $\mathfrak{f}$ au sens ordinaire
$C\ell_{K,\mathfrak{f}}^{S_0\mathrm{res}},\ C\ell_{K,\mathfrak{f}}^{S_0\mathrm{ord}}$	$C\ell_{K,\mathfrak{f}}^S$ pour $S = S_0$, pour $S = S_0 \cup P\ell^r_{K,\infty}$
$C\ell_{K,T}^S$	$\varprojlim_{\mathfrak{f}} (C\ell_{K,\mathfrak{f}}^S), \mathfrak{f} \in \langle T\rangle$
H_T^S	p-extension abélienne T-ramifiée S-décomposée maximale de K
$\mathcal{A}_T^S$	$\mathrm{Gal}(H_T^S/K)$ (comme $\mathbb{Z}_p$-module)
$\mathcal{T}_T^S$	sous-module de torsion de $\mathcal{A}_T^S$
L_T^S	p-sous-extension élémentaire maximale de H_T^S
A_T^S	$\mathrm{Gal}(L_T^S/K)$
$W_T^S = \mathrm{Rad}(L_T^S/K)$	radical kummérien de L_T^S/K
$K_\mathfrak{p},\ k_v$	complété $\mathfrak{p}$-adique de K, v-adique de k
$O_\mathfrak{p}$	anneau des entiers de $K_\mathfrak{p}$
$\overline{K}_\mathfrak{p}$	corps résiduel de K en $\mathfrak{p}$
$U_\mathfrak{p} = O_\mathfrak{p}^*$	groupe des unités de $K_\mathfrak{p}$
$U_\mathfrak{p}^{(i)},\ i \geq 1$	sous-groupes $1 + \mathfrak{p}^i O_\mathfrak{p}$ de $U_\mathfrak{p}$
$\mu_\mathfrak{p}$	p-groupe de torsion de $K_\mathfrak{p}^\times$
$\widetilde{K}$	composé des $\mathbb{Z}_p$-extensions de K
$\widetilde{K}^S$	sous-extension S-décomposées maximale de $\widetilde{K}$
$\widetilde{K}(S)$	composé des $\mathbb{Z}_p$-extensions S-décomposées de K

BIBLIOGRAPHIE

[AF] J.V. Armitage, A. Fröhlich, *Class numbers and unit signatures.* Mathematika **14** (1967), 94–98.

[AT] E. Artin, J. Tate , *Class field theory.* Benjamin, New York-Amsterdam 1967.

[B] J. Browkin, *On the p-rank of the tame kernel of algebraic number fields.* J. Reine Angew. Math. **432** (1992), 135–149.

[CF] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic number theory.* Academic Press, London-New York 1967.

[Co] M.J. Collins, *Representations and characters of finite groups.* Cambridge Studies in advanced mathematics **22**, Cambridge University Press 1990.

[Em] M. Emsalem, *Rang p-adique de groupes de S-unités d'un corps de nombres.* C.R. Acad. Sci. Paris **297** (1983), 225–228.

[G1] G. Gras, *Groupe de Galois de la p-extension abélienne p-ramifiée maximale d'un corps de nombres.* J. Reine Angew. Math. **333** (1982), 86–132.

[G2] G. Gras, *Logarithme p-adique et groupes de Galois.* J. Reine Angew. Math. **343** (1983), 64–80.

[G3] G. Gras, *Remarks on K_2 of number fields.* J. Number Theory **23** (1986), 322–335.

[G4] G. Gras, *Annulation du groupe des l-classes généralisées d'une extension abélienne réelle de degré premier à l.* Ann. Inst. Fourier **29** (1979), no. 1, 15–32.

[G5] G. Gras, *Critère de parité du nombre de classes des extensions abéliennes réelles de $\mathbb{Q}$ de degré impair.* Bull. Soc. Math. France **103** (1975), 177–190.

[G6] G. Gras, *Théorie des genres analytique des fonctions L p-adiques des corps totalement réels.* Invent. math. **86** (1986), 1–17.

[GMN] M.-N. Gras, *Méthodes et algorithmes pour le calcul numérique du nombre de classes et des unités des extensions cubiques cycliques de $\mathbb{Q}$.* J. Reine Angew. Math. **277** (1975), 89–116.

[Hag] R. Haggenmüller, *Signaturen von Einheiten und unverzweigte quadratische Erweiterungen total-reller Zahlkörper.* Arch. Math. **39** (1982), 312–321.

[H] H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper I, Ia, II,* Physica Verlag, Würzburg, 1965.

[He1] E. Hecke, *Über nicht-reguläre Primzahlen und den Fermatschen Satz.* Göttingen Nachr., Math. Phys. Kl. (1910), 420–424.

[He2] E. Hecke, *Lectures on the theory of algebraic numbers* (Trad. from german), Graduate Texts in Mathematics, **77**, Springer-Verlag, 1981.

[HK] J. Hurrelbrink, M. Kolster, *Tame kernel under relative quadratic extensions and Hilbert symbols.* Preprint Series, **4** (1996/97).

[J1] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des l-extensions* (Thèse d'Etat), Université de Franche-Comté, Besançon, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon (Théorie des Nombres), Années 1984/85-1985/86.

[J2] J.-F. Jaulent, *Représentations l-adiques et invariants cyclotomiques.* Publ. Math. Fac. Sci. Besançon (Théorie des Nombres), Année 1983/1984.

[J3] J.-F. Jaulent, *Sur quelques représentations l-adiques liées aux symboles et à la l-ramification.* Sém. Théorie des Nombres de Bordeaux **23**, Année 1983/1984.

[J4] J.-F. Jaulent, *Dualité dans les corps surcirculaires.* Sém. Théorie des Nombres, Paris (1986/87), Progress in Mathematics, **75**, Birkhäuser 1988, 183–220.

[J5] J.-F. Jaulent, *Sur l'indépendance l-adique de nombres algébriques.* J. Number Theory **20** (1985), 149–158.

[K1] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres.* K-Theory **7** (1993), 55-100.

[K2] B. Kahn, *The Quillen-Lichtenbaum conjecture at the prime 2.* (prépublication, 1997).

[Ke] F. Keune, *On the structure of the K_2 of the ring of integers in a number field.* K-Theory **2** (1989), no. 5, 625–645.

[Ko] H. Koch (Parshin, A.N., Šafarevič, I.R., Eds.), *Number Theory II.* Encycl. of Math. Sci., **vol. 62**, Springer-Verlag, 1992.

[Kol] M. Kolster, *Remarks on étale K-theory and Leopoldt's conjecture.* Sém. Théorie des Nombres, Paris (1991/92), Progress in Mathematics, **116**, Birkhäuser 1994, 37–62.

[K] E.E. Kummer (Weil, A., Ed.), *Ernst Edward Kummer collected papers I : Contributions to Number Theory.* Springer-Verlag, 1975.

[Ku] S.-N. Kuroda, *Über den Allgemeinen Spiegelungssatz für Galoissche Zahlkörper.* J. Number Theory **2** (1970), 282–297.

[La] J.C. Lagarias, *Signatures of units and congruences (mod 4) in certain totally real fields.* J. Reine Angew. Math. **320** (1980), 1–5.

[L] S. Lang, *Algebraic Number Theory.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **110**. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Le] H.W. Leopoldt, *Zur Struktur der l-Klassengruppe galoischer Zahlkörper.* J. Reine Angew. Math. **199** (1958), 165–174.

[M] C. Maire, *Extensions T-ramifiées modérées, S-décomposées* (Thèse de Doctorat), Université de Franche-Comté, Besançon 1995.

[MN] A. Movahhedi, T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels.* Sém. Théorie des Nombres, Paris (1987/89), Progress in Mathematics, **81**, Birkhäuser 1990, 155–200.

[N1] T. Nguyen Quang Do, *Sur la $\mathbb{Z}_p$-torsion de certains modules galoisiens.* Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 27–46.

[N2] T. Nguyen Quang Do, *Sur la torsion de certains modules galoisiens II.* Sém. Théorie des Nombres, Paris (1986/87), Progress in Mathematics, **75**, Birkhäuser 1988, 271–297.

[N3] T. Nguyen Quang Do, *Une étude cohomologique de la partie 2-primaire de $K_2\,\mathcal{O}$.* K-Theory **3** (1990), 523–542.

[O1] B. Oriat, *Généralisation du "Spiegelungssatz".* Soc. Math. France, Astérisque **61** (1979), 169–175.

[O2] B. Oriat, *Relation entre les 2-groupes des classes d'idéaux au sens ordinaire et restreint de certains corps de nombres.* Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 301–307.

[O3] B. Oriat, *Relations entre les 2-groupes des classes d'idéaux des extensions quadratiques $k(\sqrt{d})$ et $k(\sqrt{-d})$.* Ann. Inst. Fourier **27** (1977), 37–59.

[O4] B. Oriat, *Annulation de groupes de classes réelles.* Nagoya Math. J. **81** (1981), 45–56.

[OS] B. Oriat, P. Satgé, *Un essai de généralisation du "Spiegelungssatz".* J. Reine Angew. Math. **307/308** (1979), 134–159.

[R] Reiner I., *Maximal orders.* Academic Press, London 1975.

[Ro] D. Roy (Gouvêa, F., Ed.), *On the v-adic independance of algebraic numbers, Advances in Number Theory.* Proc. 3e conf. Théorie des Nombres, Queen's Univ., Kingston, Canada (1991), Clarendon Press, Oxford 1993, 441–451.

[Š] I.R. Šafarevič, *Extensions with given points of ramification.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **18** (1964), 71–95 (A.M.S. Transl. Ser.2 **59** (1966), 128–149).

[S] C.-G. Schmidt, *On ray class annihilators of cyclotomic fields.* Invent. math. **66** (1982), 215–230.

[Sc] A. Scholz, *Über die Bezeichung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander.* J. Reine Angew. Math. **166** (1932), 201–203.

[S1] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis.* coll. Méthodes, Hermann, 3e ed., Paris 1978.

[S2] J.-P. Serre, *Corps locaux.* Hermann 1962.

[So] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale.* Invent. Math. **55** (1979), 251–295.

[T] J. Tate, *Relations between K_2 and galois cohomology.* Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

[TBS] J. Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$.* Lecture notes edited by Dominique Bernardi and Norbert Schappacher. Progress in Mathematics, **47**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Mass., 1984.

[Ta] M. Taylor, *Galois module structure of class groups and units.* Mathematika **22** (1975), 156–160.

[W] L.C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields.* Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.

[We] A. Weiss, *Multiplicative module structure.* Fields Institute Monographs, A.M.S. 1996.

Georges GRAS
U.F.R. des Sciences et Techniques
Laboratoire de Mathématiques
UMR 6623 au CNRS
F-25030 Besançon cedex
E-mail : gras@vega.univ-fcomte.fr