JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN-CLAUDE DOUAI

Espaces homogènes et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 7, nº 1 (1995), p. 21-26

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1995__7_1_21_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **7** *(1995), 21–26*

Espaces homogènes et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind

par Jean-Claude DOUAI

RÉSUMÉ – Soit S un schéma arithmétique de dimension 1, c'est-à-dire le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres ou une courbe algébrique, lisse, irréductible, définie sur un corps fini ou algébriquement clos. Nous associons à un S-espace homogène (à gauche) X d'un groupe réductif G dont l'isotropie est aussi un groupe réductif H une classe caractéristique qui, dans le cas où H est semi-simple, vit dans un H^3 de S à valeurs dans le noyau du revêtement universel d'une S-forme de H. Cette classe constitue une obstruction au relèvement de X en un G-torseur et, sous certaines hypothèses, une obstruction à l'existence d'un point S-rationnel dans X. Applications à l'existence de tels points dans les S-espaces homogènes.

1. Introduction

Soit S un schéma arithmétique de dimension un c'est-à-dire le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres ou une courbe algébrique, lisse, irréductible, définie sur un corps fini ou algébriquement clos. Nous voulons montrer comment il est possible d'associer à un S-espace homogène (à gauche) X d'un groupe réductif G dont l'isotropie est aussi un groupe réductif H (souvent semi-simple) *une classe caractéristique dans un H^3 de S à valeurs dans le noyau du revêtement universel d'une S-forme de H* qui constitue une obstruction au relèvement de X en un G-torseur et, sous certaines hypothèses, une obstruction à l'existence d'un point S-rationnel dans X.

Applications à l'existence de tels points dans les espaces S-homogènes.

Dans toute la suite, S sera muni de la topologie étale. Réductif sera mis pour réductif connexe.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14 L 30 - 14 G 05 - 18 G 50.
Schémas en groupes, espaces homogènes, Points rationnels.
Manuscrit reçu le 26 Janvier 1994.

DÉFINITION 1.1. *Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes, X un S-schéma sur lequel G opère (à gauche). Le schéma X est un S-espace homogène de G avec isotropie H s'il existe un sous S-schéma en groupes H de G tel que, localement pour la topologie étale, X est isomorphe (comme schéma à groupes d'opérateurs G) au quotient étale de G par H.*

Si H est réduit à l'élément neutre de G, X est un S_{et}-torseur de G (ou S-torseur de G).

Nous noterons $H^1(S_{\mathrm{et}}, G, H)$ l'ensemble des classe d'isomorphie de S-espaces homogènes (à gauche) de G avec isotropie H ; il est pointé par la classe triviale G/H.

Si X est un S-espace homogène de G avec isotropie H, Y un S-torseur de G, nous dirons que Y *domine* X s'il existe un S-morphisme $Y \to X$ équivariant pour l'action (à gauche) de G sur Y et X. Cette relation de domination induit une relation $H^1(S_{\mathrm{et}}, G) \to H^1(S_{\mathrm{et}}, G, H)$ qui se réduit à l'application naturelle $H^1(S_{\mathrm{et}}, G) \to H^1(S_{\mathrm{et}}, G/H)$ quand H est normal dans G.

Soient $[X]$ une classe de $H^1(S_{\mathrm{et}}, G, H)$, $\mathcal{G}_X$ la S_{et}-gerbe des relèvement de X à G i.e. la gerbe dont les objets au-dessus d'un ouvert U de S_{et} sont les U-torseurs Y de G munis d'un U-morphisme $Y \to X/U$ équivariant pour l'action de G, les U-morphismes de $\mathcal{G}_X$ étant définis de façon évidente. Le lien $L = \mathrm{Lien}(\mathcal{G}_X)$ de la gerbe $\mathcal{G}_X$ est localement représentable par H au sens de Giraud [3], $n°1.2$, Chap. IV.

PROPOSITION 1.2. *Si H est réductif, L est représentable par une forme quasi-déployée H_L de H i.e. $L \simeq$ Lien(H_L). (cf. [2], n°3.2. Chap V. p. 75).*

$\mathcal{G}_X$ définit une classe dans $H^2(L) = H^2(S_{\mathrm{et}}, L)$ ($\simeq H^2(\mathrm{Lien}(H_L)) = H^2(H_L)$ si H est en plus réductif).

Dans toute la suite, nous utiliserons le fait suivant : "L'espace homogène X est dominé par un S-torseur de G si et seulement si $\mathcal{G}_X$ admet une S-section i.e. est neutre au sens de [5], $n°2.1.1.2$ Chap. III" (cf. [8] pour le cas où S est le spectre d'un corps).

2. Abélianisation de Borovoi.

Pour H un S-groupe réductif, nous noterons :

$$H^{s\cdot s\cdot} = \text{groupe dérivé de } \ H$$
$$H^{s\cdot c\cdot} = \text{revêtement universel de } \ H^{s\cdot s\cdot}$$
$$H^{\text{tor}} = \frac{H}{H^{s\cdot s\cdot}}$$
$$Z^{s\cdot s} = \text{ centre de } \ H^{s\cdot s}, \quad Z = \text{centre de } \ H$$
$$\frac{Z}{Z^{s\cdot s\cdot}} = H^{\text{tor}}$$
$$Z^{s\cdot c\cdot} = \text{centre de } \ H^{s\cdot c\cdot}$$
$$H^{ad} = \frac{H}{Z}$$

$H^{s\cdot s\cdot}$ est semi-simple, $H^{s\cdot c\cdot}$ semi-simple simplement connexe, H^{tor} un tore. Pour L un lien localement représentable par H, nous avons une fonction naturelle $t : H^2(L) \to H^2(H_L^{\text{tor}})$. Considérons l'homomorphisme $\rho_L : Z_L^{s\cdot c\cdot} \to Z_L$ que, à la manière de Borovoi [1] $n°5$, nous regardons comme un complexe de S-groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccc} 1 \to & Z^{s\cdot c\cdot} & \overset{\rho_L}{\to} & Z_L & \to 1 \\ & -1 & & 0 & \end{array} \qquad (*)$$

DÉFINITION 2.1. $H^i_{ab}(L) = \| \ \|^i(Z_L^{s\cdot c} \to Z_L)$ = *hypercohomologie en dimension i du complexe* $(*)$.

La suite exacte de complexes

$$1 \to (1 \to Z_L) \to (Z_L^{s\cdot c} \to Z_L) \to (Z_L^{s\cdot c} \to 1) \to 1$$

fournit une suite exacte

$$\cdots \to H^2(Z_L^{s\cdot c\cdot}) \overset{(\rho_L)_*}{\to} H^2(Z_L) \to H^2_{ab}(L) \to \cdots$$

qui définit un plongement de $\frac{H^2(Z_L)}{(\rho_L)_*(H^2(Z_L^{s\cdot c\cdot}))}$ *dans* $H^2_{ab}(L)$.

Par le théorème 3.3.3 - Chap IV de Giraud [5], $H^2(L)$ est un espace principal homogène sous $H^2(Z_L)$; l'existence de la classe neutre ϵ_L = [TorsG_L] permet d'identifier $H^2(L)$ à $H^2(Z_L)$. Une classe η de $H^2(L)$ définit donc par passage au quotient $\frac{H^2(Z_L)}{(\rho_L)_*(H^2(Z_L^{s\cdot c\cdot}))}$ une classe $ab^2(\eta)$ de $H^2_{ab}(L)$ dont on démontre qu'elle est indépendante de l'identification donnée par ϵ_L.

THÉORÈME 2.2. *Soit S un schéma arithmétique au sens de l'introduction, H un S-groupe réductif, L un S-lien localement représentable par H. Alors $\eta \in H^2(L)$ est neutre (i.e. η est représentée par une gerbe $\mathcal{G}_\eta$ possédant une S-section) si et seulement si $ab^2(\eta) = 0$.*

Le théorème 2.2 repose sur le lemme suivant :

LEMME 2.3. *Soient S comme dans le théorème, $H = H^{s\cdot s\cdot}$ un S-groupe semi-simple, alors l'application $H^1(S_{\text{et}}, H^{ad}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(S_{\text{et}}, Z^{s\cdot c\cdot})$ est surjective ($Z^{s\cdot c\cdot}$ = centre de $H^{s\cdot c\cdot}$).*

Ce lemme est établi dans le §III p. 278 de [4] (c) (on y a remarqué (Remarque 3.2 (3°)) de loc cit) que l'hypothèse G déployé n'y est pas indispensable). Il résulte aussi du théorème 1.1 joint à sa remarque (b) de [3] (quand S est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, cf. aussi [6] - Théorème 4.2.2.)

3. Classes de Kamber

La suite exacte de complexes

$$1 \to (Z_L^{s\cdot c\cdot} \to Z_L^{s\cdot s\cdot}) \to (Z_L^{s\cdot c\cdot} \to Z) \to (1 \to H_L^{\text{tor}}) \to 1$$

produit la suite exacte

$$\cdots \to H^1(H_L^{\text{tor}}) \to H^3(\ker\rho_L) \to H^2_{ab}(L) \to H^2(H_L^{\text{tor}}) \to \cdots \qquad (*)$$

Pour $\eta \epsilon H^2(L)$, nous appelerons $ab^2(\eta)$ la *classe de Kamber* de η. Cette appellation est justifiée par le fait que quand H est semi-simple (plus généralement quand $H^1(H_L^{\text{tor}}) = H^2(H_L^{\text{tor}}) = 0$), $(*)$ donne un isomorphisme $i : H^3(\ker\rho_L) \simeq H^2_{ab}(L)$ et, dans ce cas, $ab^2(\eta)$ peut être décrite directement comme suit : identifions $H^2(L)$ à $H^2(Z_L)$ comme en le $n°2$; la classe η définit une classe (encore notée η) de $H^2(Z_L)$. La classe $ab^2(\eta)$ n'est alors autre que l'image par i de $\delta^2(\eta)$ où δ^2 est la cobord $\delta^2 : H^2(Z_L) \to H^3(\ker\rho_L)$ associé à la suite exacte $0 \to \ker\rho_L \to Z_L^{s\cdot c} \to Z_L \to 0$. La conclusion du théorème précédent s'énonce alors : "$\cdots \eta \in H^2(L)$ est neutre si et seulement si sa classe de Kamber $ab^2(\eta)$ est nulle".

4. Soient G un S-groupe réductif, H un sous S groupe réductif de G, $[X]$ une classe de $H^1(S_{\text{et}}, G, H)$. Nous appelerons Kamb(X) la classe $ab^2([\mathcal{G}_X])$ dans $H^2_{ab}(L)$ où $L = \text{lien}(\mathcal{G}_X)$.

Conjuguant le fait mentionné à la fin du $n°1$ et le théorème 2.2, nous obtenons :

THÉORÈME 4.1. *Soient S un schéma arithmétique, G un S-groupe réductif, H un sous-S-groupe réductif de G, $[X]$ une classe dans $H^1(S_{\mathrm{et}}, G, H)$. Alors X est dominé par un S-torseur de G si et seulement si $Kamb(X) = 0$.*

COROLLAIRE 4.2. *Soient S une courbe algébrique, irréductible, lisse, définie sur un corps k, G un S-groupe réductif, H un sous-S-groupe réductif de G. Tout espace homogène X de G à isotropie H est dominé par un S-torseur de G dans les cas suivants :*

(i) *k est algébriquement clos, S pouvant être projective ou affine*
(ii) *k est fini et S affine,*
(iii) *k est fini, S projective et $H = H^{s.c.}$ semi-simple simplement connexe.*

En effet, dans tous les cas (i), (ii), (iii), Kamb(X) est nulle.

Dans le cas (i), on déduit de [5] que X est localement Zariski trivial.

COROLLAIRE 4.3. *Soient S le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres purement imaginaire K, $G = G^{s.c}$ un S-groupe semi-simple simplement connexe. Tout S-espace homogène X de G dont le groupe d'isotropie est réductif et dont la classe $Kamb(X)$ est nulle est localement trivial pour la topologie de Zariski.*

En effet, X est dominé par un S-torseur de G qui, vu les hypothèses sur S et G, est rationnellement trivial. On conclut alors par [7].

COROLLAIRE 4.4. *Sous les hypothèses du corollaire 4.3, supposons en plus G rationnellement quasi-trivial (i.e. $G = G^{s.c}$ admet un sous-groupe de Borel défini sur le corps K). Alors tout S-espace homogène X de G dont le groupe d'isotropie est réductif et dont la classe $Kamb(X)$ est nulle admet un S-point i.e. est trivial.*

Démonstration. cf. le corollaire 4.3 précédent et le théorème 3.3. de [6].

Une autre conséquence du théorème 4.1. est

COROLLAIRE 4.5. *S étant comme dans le corollaire 4.3, soient G un S-groupe semi-simple, X un S-espace homogène de G dont le groupe d'isotropie $H = H^{s.c}$ est semi-simple simplement connexe. Alors si X est rationnellement trivial, X est localement trivial pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. En effet, X et dominé par un S-torseur Y de G. Puisque X est rationnellement trivial, Y/K définit une classe de

$$\mathrm{Im}\ (H^1(K,H) \to H^1(K,G)) = 0\ .$$

Y est donc rationnellement trivial et, par [7], localement trivial pour la topologie de Zariski et il en est de même de X.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. V. BOROVOI, *Abelianization of the second non abelian Galois cohomology*, Preprint, MPI/91-92, Max Planck Institut für Math., Bonn, 1991.

[2] J.-C. DOUAI, *2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples*, Thèse d'Etat, Université de Lille (juin 1976).

[3] J.-C. DOUAI, *Cohomologie des schémas en groupes semi-simples sur les anneaux de Dedekind....*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 285 (19 sept. 1977), Série A, 325–328.

[4] J.-C. DOUAI, *Cohomologie des schémas en groupes sur les courbes définies sur les corps quasi-finis....*, Journal of Algebra **103**, **$n^\circ 1$** (1986), 273–284.

[5] J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne*, Grundlehren der mathematischen wissenchaften in Eingeldarstellungen 179, Springer-Verlag 1971.

[6] G. HARDER, *Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen*, Inv. Math. **4** (1967), 165–191.

[7] Y. A. NISNEVITCH, *Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arthmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 299, Série I, $n^\circ 1$, (1984) 5–8.

[8] T. A. SPRINGER, *Non abelian H^2 in Galois cohomology in Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proc. Sympos. Pure Math **9**, Amer. Math. Soc., Providence, (1966) 164–182.

Jean Claude DOUAI
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Université des Sciences et Technologie de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France