

WOLFGANG JENKNER

Sur les fonctions zêta attachées aux classes de rayon

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 7, n° 1 (1995), p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1995__7_1_1_0

© Université Bordeaux 1, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur les fonctions zêta attachées aux classes de rayon

par Wolfgang JENKNER

1. Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie (quadratique, pour la plupart des considérations suivantes) et soit $\mathfrak{m}$ un idéal ($\neq (0)$, comme tous les idéaux dont il est question ici) dans l'anneau $\mathcal{O}$ des entiers de K . Désignons par $I(\mathfrak{m})$ le groupe engendré par les idéaux $\mathfrak{a}$ tels que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}$ soient premiers entre eux et par $P(\mathfrak{m})$ le sous-groupe des idéaux principaux. Soient $P_{\mathfrak{m}} = \{(x) \in P(\mathfrak{m}) \mid x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}\}$ et $P_{\mathfrak{m}+} = \{(x) \in P_{\mathfrak{m}} \mid \sigma_1(x) > 0, \dots, \sigma_{r_1}(x) > 0\}$ où $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$ sont les $\mathbb{Q}$ -monomorphismes $K \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour un groupe

$$P_{\mathfrak{m}+} \leq \mathcal{C} \leq P(\mathfrak{m}),$$

soit $H(\mathcal{C}) = I(\mathfrak{m})/\mathcal{C}$.

Pour $\operatorname{Re} s > 1$, on définit la *fonction zêta partielle attachée* à la classe $\mathfrak{a}\mathcal{C}$ par

$$\zeta(s, \mathfrak{a}\mathcal{C}) = \sum_{n\mathcal{C}=\mathfrak{a}\mathcal{C}} \frac{N\mathfrak{m}^s}{Nn^s}.$$

Ce sont respectivement les fonctions zêta de Hurwitz et d'Epstein lorsque n égale 1 ou 2.

Évidemment, il est possible de ramener les fonctions de cette forme aux fonctions L attachées aux caractères du groupe $H(\mathcal{C})$, mais cette méthode ne permet pas, à ce qu'il semble, de trouver des inégalités satisfaisantes touchant les intégrales (pour $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1, s = \sigma + it$)

$$\int |\zeta(s, \mathfrak{a}\mathcal{C})|^2 dt,$$

pour peu que l'on s'intéresse à la façon dont ces expressions dépendent de l'idéal $\mathfrak{m}$. C'est donc le sujet de ce qui suit.

2. On commence par quelques considérations élémentaires, dont l'idée de base se trouve dans [4, Kap. V Aufg. 16].

LEMME 1. Soit $K \in \mathbb{N}$ et $c, d \in \mathbb{Z}$. Soit $\rho = \text{p.g.c.d.}(c, d, K)$. De plus, soient S, T, U, V tels que

$$SV = TU.$$

Soit $M := \min\{S, U\}$ ainsi que $N := \min\{T, V\}$. Alors le nombre des $(s, t, u, v) \in \mathbb{Z}^4$ satisfaisant aux conditions

$$sv = tu$$

$$\begin{cases} s \equiv c \pmod{K} \\ t \equiv d \pmod{K} \end{cases}$$

$$|s| \leq S, |t| \leq T, |u| \leq U, |v| \leq V$$

est

$$\ll \frac{SV\rho}{K^2} \log^+ MN + \left(U + \frac{T}{K} + 1\right) \left(V + \frac{S}{K} + 1\right) + U \log^+ M + V \log^+ N$$

Preuve. Tout d'abord, il convient de compter les quadruplets en question dont au moins une composante est égale à zéro; il en existe

$$\ll \left(U + \frac{T}{K} + 1\right) \left(V + \frac{S}{K} + 1\right).$$

Dès lors, on peut supposer que $svtu \neq 0$ et, quitte à remplacer (c, d) par $(\pm c, \pm d)$, il suffit même de ne considérer que les $(s, t, u, v) \in \mathbb{N}^4$. De plus, on n'apporte pas de restriction au problème si l'on suppose que $\text{p.g.c.d.}(c, d, K) = 1$.

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux et tels que

$$\frac{a}{b} = \frac{s}{t} = \frac{u}{v}.$$

À partir de là, on renverse la situation : Étant donnés a et b , on va chercher les $(s, t), (u, v)$ tels que la relation ci-dessus ainsi que les hypothèses du lemme soient vérifiées.

Or, évidemment, il existe des nombres $m, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} u = ma & v = mb \\ s = na & t = nb. \end{cases}$$

On voit tout de suite que le nombre des couples (u, v) est

$$\leq \min\left\{\frac{U}{a}, \frac{V}{b}\right\}.$$

En ce qui concerne les (s, t) , il faut d'abord résoudre

$$\begin{cases} na \equiv c \pmod{K} \\ nb \equiv d \pmod{K}. \end{cases}$$

On voit de façon élémentaire qu'il existe une bijection entre les (a, b, n) satisfaisant à ce système-là et les solutions (a', b', n') du système suivant:

$$\begin{cases} (a', K_c) = (b', K_d) = 1 \\ n'a' \equiv c' \pmod{K_c} \\ n'b' \equiv d' \pmod{K_d}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} K_c := \frac{K}{(c, K)} & K_d := \frac{K}{(d, K)} \\ c' := \frac{c}{(c, K)} & d' := \frac{d}{(d, K)}, \end{cases}$$

et la bijection est donnée par

$$(a', b', n') \mapsto (a, b, n) := (a'(c, K), b'(d, K), n).$$

Donc, pour qu'il y ait une solution, il faut et il suffit que

$$a'd' \equiv b'c' \pmod{(K_c, K_d)},$$

et dans ce cas, il y a une seule solution $n \pmod{K}$ (car $[K_c, K_d] = K$). Par conséquent, le nombre des couples (s, t) est

$$\leq \frac{1}{K} \min\left\{\frac{S}{a}, \frac{T}{b}\right\} + 1.$$

Soit

$$\lambda := \frac{S}{T} = \frac{U}{V} = \frac{M}{N}.$$

Il s'ensuit que le nombre des (s, t, u, v) tels que $a \geq \lambda b$ est

$$\leq \sum_a \sum_b \left(\frac{1}{K} \frac{S}{a} + 1 \right) \frac{U}{a},$$

où les a sont tels que $a \leq M$ et $(c, K) \mid a$, alors que les b doivent satisfaire à $b \leq \lambda^{-1}a$ et $b \equiv r(a) \pmod{K_c}$, la classe de $r(a) \pmod{K_c}$ étant donnée par les considérations ci-dessus. Cette somme est

$$\begin{aligned} &\leq \sum_a \left(\frac{1}{K} \frac{S}{a} + 1 \right) \frac{U}{a} \left(\frac{a}{\lambda} \frac{(c, K)}{K} + 1 \right) \\ &\ll \frac{SV}{K^2} (1 + \log M) + \frac{SU}{K} + UV + U(1 + \log M), \end{aligned}$$

et il suffit d'y joindre l'expression analogue que l'on obtient dans le cas $b \geq \lambda^{-1}a$, le remplacement de $1 + \log$ par $\log^+$ étant justifié par l'inégalité

$$\left(U + \frac{T}{K} \right) \left(V + \frac{S}{K} \right) \geq 4 \left(U \frac{T}{K} \right)^{\frac{1}{2}} \left(V \frac{S}{K} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esquissons brièvement l'idée principale de ce qui va suivre :

Étant donné un polynôme

$$F(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2 + aX + bY + c \in \mathbb{Z}[X, Y],$$

on se propose comme but de compter (en quelque sorte) les solutions de l'équation

$$F(x, y) = F(x', y') \quad \text{avec} \quad (x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4.$$

Or, on a l'identité

$$F(x, y) - F(x', y') = \frac{1}{2}(sv - tu)$$

avec

$$\begin{cases} u = y' - y \\ v = x - x' \\ s = 2A(x + x') + B(y + y') + 2a \\ t = 2C(y + y') + B(x + x') + 2b. \end{cases}$$

Pourvu que l'on soit assez chanceux pour disposer de bornes raisonnables pour u, v, s, t , on a donc ramené le problème au lemme précédent.

3. Pour le polynôme

$$F(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2 + aX + bY + c \in \mathbb{Z}[X, Y],$$

soient $\delta = (A, B, C)$, $\rho = (\delta, a, b)$, $A' = A/\delta$, $B' = B/\delta$, $C' = C/\delta$, $\Delta = B^2 - 4AC$, $D = \Delta/\delta^2$, $d = |D|$.

Soit $G = \{S = S(S_0, k) = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ k^t & 1 \end{pmatrix} \mid S_0 \in Sl_2(\mathbb{Z}), k \in \mathbb{Z}^2\}$. On définit une action de G sur $\mathbb{Z}[X, Y]$ par

$$(S \cdot F) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = F(S^t \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix})$$

(où $F((X, Y, 1)^t) := F(X, Y)$), et une action de G sur $\mathbb{Z}^2$ par

$$S \cdot (x, y) := (S^t)^{-1}(x, y, 1)^t.$$

D'après ces définitions, on a $(S \cdot F)(S \cdot (x, y)) = F(x, y)$. Soit $\text{Aut } F = \{S \in G \mid S \cdot F = F\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$r_F(n) = \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid F(x, y) = n\} / \text{Aut } F.$$

Soit $F_h(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2$; on voit facilement que l'application

$$\begin{aligned} \text{Aut } F &\rightarrow \text{Aut } F_h \\ S &\mapsto S_0 \end{aligned}$$

est un monomorphisme, de sorte que l'on peut identifier $\text{Aut } F$ à un sous-groupe de $\text{Aut } F_h$, ce qui s'explique encore mieux par comparaison avec le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$:

Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie. Soit U le groupe des unités de K et soit $U^+ = \{u \in U \mid N(u) = 1\}$, où N est la norme par rapport à $\mathbb{Q}$. D'une façon plus générale, pour un idéal $\mathfrak{m} \triangleleft \mathcal{O}$, on définit $U_{\mathfrak{m}} = \{u \in U \mid u \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}\}$ et $U_{\mathfrak{m}}^+ = \{u \in U_{\mathfrak{m}} \mid N(u) = 1\}$ ainsi que $U_{\mathfrak{m}^+} = \{u \in U_{\mathfrak{m}} \mid \sigma_1(u) > 0, \dots, \sigma_{r_1}(u) > 0\}$.

De plus, pour un corps quadratique, il existe une unité qui engendre $U_{\mathfrak{m}}^+$ (modulo $\{\pm 1\}$ lorsque $-1 \in U_{\mathfrak{m}}^+$) et dont la valeur absolue est ≥ 1 ; soit $\varepsilon_{\mathfrak{m}}$ cette valeur absolue.

En ce qui concerne le polynôme F_h (dont on suppose désormais que D est un discriminant fondamental), il est bien connu que l'application

$$\begin{aligned} \text{Aut } F_h &\rightarrow U^+ \\ S_0(u, t) &\mapsto \frac{t - u\sqrt{D}}{2}, \end{aligned}$$

où

$$S_0(u, t) = \begin{pmatrix} \frac{t+B'u}{2} & -A'u \\ C'u & \frac{t-B'u}{2} \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme.

De manière plus générale, on a

$$F(X, Y) = F_h(X - p, Y - q) - F_h(p, q) + c$$

avec $p = (2Ca - Bb)/\Delta$ et $q = (2Ab - Ba)/\Delta$. Comme on sait [6, §10], il existe un idéal $\mathfrak{A}$ de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ donné par une base orientée (ξ, η) telle que

$$F_h(x, y) = \frac{N(x\xi + y\eta)}{N\mathfrak{A}}\delta,$$

de sorte que

$$F_h(x - p, y - q) = \frac{N(\alpha + x\xi + y\eta)}{N\mathfrak{A}}\delta,$$

avec $\alpha = -p\xi - q\eta$. Quitte à remplacer $\mathfrak{A}$ par $(l)\mathfrak{A}$, avec un nombre $l \in \mathbb{N}$ de sorte que $\mathfrak{A}$ et α soient entiers, on est à même d'énoncer ce qui suit :

PROPOSITION 1. *Soit K un corps quadratique. Soit $\mathfrak{A} \triangleleft \mathcal{O}_K$ un idéal donné par une base orientée (ξ, η) ; soit $\alpha \in \mathcal{O}_K$ et*

$$\mathfrak{m} := \frac{\mathfrak{A}}{(\alpha) + \mathfrak{A}}.$$

On considère le polynôme

$$F(x, y) = N(\alpha + \xi x + \eta y).$$

Alors

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut } F_h & \xrightarrow{\cong} & U^+ \\ \text{incl.} \uparrow & & \uparrow \text{incl.} \\ \text{Aut } F & \xrightarrow[\cong]{} & U_{\mathfrak{m}}^+ \end{array}$$

est commutatif.

(En ce cas, on peut définir $\varepsilon_F := \varepsilon_{\mathfrak{m}}$.)

Dans le même ordre d'idées, soit

$$\mathcal{C} = \{(x) \in I_K \mid x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}, N(x) > 0\}.$$

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal tel que $\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = 1$, on définit

$$a(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}, n) = \#\{\mathfrak{b} \triangleleft \mathcal{O} \mid \mathfrak{b}\mathcal{C} = \mathfrak{a}\mathcal{C} \text{ et } N\mathfrak{b} = n\}.$$

On peut choisir $\mathfrak{c} \triangleleft \mathcal{O}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = (\alpha)$ avec $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, $N(\alpha) > 0$, et tel que $\mathfrak{c}$ et D soient premiers entre eux. En définissant

$$F(x, y) = N(\alpha + \xi x + \eta y),$$

où (ξ, η) est une base orientée de $\mathfrak{m}\mathfrak{c}$, on obtient

$$a(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}, n) = r_F(nN\mathfrak{c})$$

(tandis que $r_F(m) = 0$ si $N\mathfrak{c} \nmid m$). C'est, pour l'essentiel, une conséquence de la proposition ci-dessus.

4. Pour voir réalisé le souhait exprimé à la fin du paragraphe 2 il faut que F soit donné d'une façon particulière:

DÉFINITION 1. *Un polynôme*

$$F(X, Y) = A(X - p)^2 + B(X - p)(Y - q) + C(Y - q)^2 \in \mathbb{Z}[X, Y]$$

est réduit (par rapport à G) si

$$\begin{aligned} -|A| < B \leq |A| \leq C, \\ 0 \leq p, q < 1. \end{aligned}$$

Soit $T > 0$, et soit F réduit. Si l'on choisit un système de représentants $D(T)$ pour

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 < F(x, y) \leq T\} / \text{Aut } F,$$

on a pour $n \leq T$

$$\begin{aligned} r_F(n)^2 &= \#\{(x, y) \in D(T) \mid F(x, y) = n\}^2 \\ &= \#\{(x, y, x', y') \in D(T)^2 \mid F(x, y) = F(x', y') = n\}, \end{aligned}$$

de sorte que $Q_F(T) :=$

$$\sum_{n \leq T} r_F(n)^2 = \#\{(x, y, x', y') \in D(T)^2 \mid 0 < F(x, y) = F(x', y') \leq T\}.$$

Avec un choix approprié de $D(T)$ (c'est-à-dire un secteur d'ellipse pour $D < 0$ et un "secteur" d'hyperbole pour $D > 0$), on arrive aux inégalités suivantes (les notations sont comme à la fin du paragraphe 2):

$$|s| \leq S = 36\varepsilon\sqrt{|A|T}, \quad |v| \leq V = 8\varepsilon\sqrt{\frac{T}{|A|}}$$

$$|u| \leq U = 8\varepsilon\sqrt{\frac{T}{|C|}}, \quad |t| \leq T = 36\varepsilon\sqrt{|C|T};$$

c'est juste ce qu'il faut pour pouvoir appliquer le lemme 1:

PROPOSITION 2. *Soit*

$$F(X, Y) = A(X - p)^2 + B(X - p)(Y - q) + C(Y - q)^2 \in \mathbb{Z}[X, Y].$$

Alors, pour $T > 0$

$$Q_F(T) \ll \frac{\varepsilon^2 \rho}{\delta^2} T \log^+ \frac{\varepsilon^2}{\delta} T + \frac{\varepsilon^2 \sqrt{d}}{\delta} T + 1$$

(où $\varepsilon := \varepsilon_F, \dots$)

Pour ce résultat-là, on ne s'est servi que de la condition banale

$$\begin{cases} s \equiv 2a \pmod{\delta} \\ t \equiv 2b \pmod{\delta}. \end{cases}$$

Avec une hypothèse supplémentaire, en appliquant la théorie des diviseurs élémentaires à la matrice $\begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix}$, on peut montrer un peu plus (on désigne par $\tau(d)$ le nombre des diviseurs de d):

PROPOSITION 3. *On suppose de plus que $(\delta, D) = 1$. Alors, pour $T > 0$*

$$Q_F(T) \ll \frac{\varepsilon^2 \rho \tau(d)}{\delta^2 d} T \log^+ \frac{\varepsilon^2}{\delta} T$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 \sqrt{d}}{\delta} T + \frac{\varepsilon d}{\sqrt{\delta}} \sqrt{T} \log^+ \frac{T}{\delta} + 1.$$

Toutefois, c'est de la proposition 2, que l'on va faire usage dans la suite; au moyen des résultats du paragraphe précédent, elle se traduit de la manière suivante dans le langage des idéaux (pour ce qui est de ρ , cf. la définition suivante) :

PROPOSITION 4. On a

$$\sum_{n \leq T} a(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}, n)^2 \ll \frac{\varepsilon^2 \rho}{N\mathfrak{m}^2} T \log^+ \frac{\varepsilon^2}{N\mathfrak{m}} T + \frac{\varepsilon^2 \sqrt{d}}{N\mathfrak{m}} T + 1$$

(où $\varepsilon := \varepsilon_{\mathfrak{m}}$ et $\rho = \rho(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})$.)

DÉFINITION 2.

$$\rho(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}) = \min(\{ |N\mathfrak{b} - N\mathfrak{b}'| \neq 0 \mid \mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \triangleleft \mathcal{O}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathfrak{a}\mathcal{C} \} \cup \{N\mathfrak{m}\})$$

Remarque 1: On a

$$\rho(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}) N\mathfrak{c} \geq \rho_F.$$

Toutefois, c'est une définition qui ne s'impose pas à première vue, mais qui s'explique par la suite.

Remarque 2: Soit $a(n) = \#\{\mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{O} \mid N\mathfrak{a} = n\}$ et soit $Q(T) = \sum_{n \leq T} a(n)^2$. Il est intéressant de mettre les résultats ci-dessus en comparaison avec ceci:

$$Q(T) = AT \log T + BT + \mathcal{O}\left(\sqrt{Td} 4^{\omega(d)} (\log T)^6\right).$$

où

$$A = \frac{L(1)^2}{\zeta(2)} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$B = A \left(2\gamma - 1 - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + 2 \frac{L'(1)}{L(1)} + \sum_{p|d} \frac{\log p}{1+p} \right)$$

(On a posé $\omega(d) = \#\{p \in \mathbb{P} \mid p|d\}$ et $L(s) = L(s, \chi_D)$ où χ_D est le caractère quadratique primitif de $\mathbb{Z}/(d)$.)

C'est que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)^2 n^{-s}$ a la représentation

$$\prod_{p|d} (1 + p^{-s})^{-1} (\zeta(s) L(s))^2 \zeta(2s)^{-1},$$

ce qui permet d'appliquer les méthodes habituelles de l'intégration complexe jointes à quelques inégalités difficiles (cf. [5]) touchant les valeurs moyennes des fonctions concernées.

5. Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie de degré $n = r_1 + 2r_2$. Soient $\mathfrak{D}$ la différente et d la valeur absolue du discriminant de cette extension. Soit $\mathfrak{m} \triangleleft \mathcal{O}$. Soit χ un caractère du groupe $H(P_{\mathfrak{m}+})$. On a une application

$$(\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times \times (\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^+)^{r_1} \rightarrow P(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}+}$$

$$(x+\mathfrak{m}; \text{signe } \sigma_1(x), \dots, \text{signe } \sigma_{r_1}(x)) \mapsto (x)P_{\mathfrak{m}+},$$

qui donne la suite exacte

$$0 \rightarrow U/U_{\mathfrak{m}+} \rightarrow (\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times \times (\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^+)^{r_1} \rightarrow P(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}+} \rightarrow 0$$

de sorte que l'on a un caractère

$$\chi : (\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

et un autre caractère

$$\chi_\infty : (\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^+)^{r_1} \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

tels que

$$\chi((x)) = \chi(x)\chi_\infty(x)$$

si l'on écrit

$$\chi_\infty(x) := \chi_\infty(\text{signe } \sigma_1(x), \dots, \text{signe } \sigma_{r_1}(x)).$$

Soit $m = m(\chi_\infty)$ le nombre des fois que -1 se trouve parmi les valeurs suivantes:

$$\chi_\infty(-1, 1, \dots, 1), \chi_\infty(1, -1, \dots, 1) \cdots, \chi_\infty(1, 1, \dots, -1).$$

On définit une fonction méromorphe G_{χ_∞} par

$$G_{\chi_\infty}(s) i^m (2^{-r_2} \pi^{-n/2})^{2s-1}$$

$$= \left(\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)} \right)^{r_1-m} \left(\frac{\Gamma(1-(s/2))}{\Gamma((1+s)/2)} \right)^m \left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} \right)^{r_2}.$$

Soit $P_{\mathfrak{m}+} \leq \mathcal{C} \leq P_{\mathfrak{m}}$ et soit $\mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{O}$.

Il existe une équation fonctionnelle (que l'on peut démontrer à partir de celles attachées aux fonctions L):

PROPOSITION 5 (ÉQUATION FONCTIONNELLE). *Étant donné un caractère χ du groupe $H(\mathcal{C})$ et un idéal $\mathfrak{n} \triangleleft \mathcal{O}_K$, soit*

$$E(\mathcal{C}, \chi, \mathfrak{n}) = \begin{cases} \frac{1}{(\widehat{P_{\mathfrak{m}} : \mathcal{C}})} \sum_{\varepsilon \in U/U_{\mathfrak{m}}} e^{2\pi i \text{Tr}(\varepsilon \nu)} \chi_{\infty}(\varepsilon \nu) \\ \text{si } \mathfrak{n} \mathfrak{a} \mathfrak{m}^{-1} \mathfrak{D}^{-1} = (\nu) \\ 0 \text{ si } \mathfrak{n} \mathfrak{a} \mathfrak{m}^{-1} \mathfrak{D}^{-1} \text{ non principal.} \end{cases}$$

Alors, pour $\sigma < 0$

$$\zeta(s, \mathfrak{a}\mathcal{C}) = d^{\frac{1}{2}-s} \sum_{\chi \in \widehat{P_{\mathfrak{m}}/\mathcal{C}}} G_{\chi_{\infty}}(s) \sum_{\mathfrak{n}} E(\mathcal{C}, \chi, \mathfrak{n}) \mathbf{N}\mathfrak{n}^{s-1}.$$

(On a identifié $U/U_{\mathfrak{m}}$ à l'image de U dans $(\mathcal{O}/\mathfrak{m})^{\times}$ et Tr est la trace par rapport à l'extension $K/\mathbb{Q}$.)

En adaptant les méthodes de [1], on obtient dans le cas d'une extension quadratique ($\mathcal{C}$ étant définie comme dans le paragraphe précédent):

PROPOSITION 6 (ÉQUATION FONCTIONNELLE APPROCHÉE).

Soit $0 \leq \sigma < 1$ et soient $x, y, t \in \mathbb{R}$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites:

$$\begin{aligned} t &\geq 8 \\ t/2 &\leq x \leq 2t \\ xy &= t^2 \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \zeta(s, \mathfrak{a}\mathcal{C}) &= (\mathbf{N}\mathfrak{m})^s \sum_{n \leq \sqrt{d}\mathbf{N}\mathfrak{m}x/2\pi} \frac{a(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}, n)}{n^s} \\ &+ d^{\frac{1}{2}-s} \sum_{\chi \in \widehat{P_{\mathfrak{m}}/\mathcal{C}}} G_{\chi_{\infty}}(s) \sum_{n \leq \sqrt{d}y/2\pi} \frac{c(\mathcal{C}, \chi_{\infty}, n)}{n^{1-s}} \\ &+ \mathbf{O}(\varepsilon_{\mathfrak{m}} t^{\frac{1}{2}-\sigma} \log t), \end{aligned}$$

avec

$$c(\mathcal{C}, \chi_{\infty}, n) = \sum_{\mathbf{N}\mathfrak{n}=n} E(\mathcal{C}, \chi, \mathfrak{n}),$$

et où la constante impliquée par $\mathbf{O}$ ne dépend que du corps K .

De cette façon, on a exprimé une fonction zêta par des polynômes de Dirichlet, ce qui suggère d'appliquer les méthodes de [3, §6, 7]. On a d'abord ceci:

LEMME 2. Soit $(\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ une suite strictement monotone. On suppose qu'il existe un nombre $\rho > 0$ tel que la condition

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geq \rho \text{ pour } n \neq m$$

soit vérifiée.

De plus, soient $a_n \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{R}_+$. On considère

$$S(t) = \sum_{\lambda_n \leq N} \frac{a_n}{\lambda_n^{it}}.$$

Alors, pour $T > 0$

$$\int_{-T}^T |S(t)|^2 dt = 2T \sum_{\lambda_n \leq N} |a_n|^2 + 2\theta R(N)$$

où

$$R(N) = 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\rho} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda_n \leq N} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda_n \leq N} \lambda_n^2 |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$-1 \leq \theta = \theta(T, N) \leq 1.$$

C'est précisément là que se pose le problème de trouver une inégalité comme celle de la proposition 4; en même temps, on voit la raison de la définition 2.

À proprement parler, c'est d'une moyenne double que l'on a besoin; cependant, au lieu d'invoquer, là aussi, les méthodes de [3], on préfère peut-être voir le résultat explicite que voici:

Pour $T > 0$, soit

$$W_T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq T, \frac{t}{2} \leq x \leq 2t\};$$

pour une fonction mesurable

$$f : W_T \rightarrow \mathbb{C}$$

et un nombre $\lambda < 1$, on définit la pseudonorme suivante :

$$\|f\|_{\lambda, T} = \frac{2}{3}(1 - \lambda)T^{\lambda-1} \int_0^T \int_{t/2}^{2t} |f(x, t)| dx t^{-\lambda-1} dt.$$

PROPOSITION 7. Soit $f : W_T \rightarrow [0, \infty)$ une fonction mesurable telle que

$$\int_0^T f(x, t) dt = S(x)T + \mathbf{O}(R(x)),$$

avec des fonctions mesurables $R, S : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

Soit $M > -1$. Alors, pour $-M \leq \lambda < 1$ et pour tout $S_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\lambda, T} &= S_0 + \\ &+ \mathbf{O}_M \left((1 - \lambda)T^{\lambda-1} \left(\int_0^{2T} |S(x) - S_0| x^{-\lambda} dx + \int_0^{2T} \frac{R(x)}{x^{1+\lambda}} dx \right) \right). \end{aligned}$$

En posant

$$\zeta^*(s, \mathfrak{a}\mathcal{C}) = \sum_{n \geq \mathbf{Nm}} \frac{a(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}, n)}{\mathbf{Nn}^s}$$

et

$$Z^*(\sigma) = \mathbf{Nm}^{2\sigma} \sum_{n \geq \mathbf{Nm}} \frac{a(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}, n)^2}{\mathbf{Nn}^{2\sigma}};$$

on est à même d'appliquer les outils donnés par le lemme 2 et la proposition 7 à la proposition 6, ce qui donne finalement

PROPOSITION 8. Soit $T \geq 8$ (par exemple).

(1) Soit $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$. Alors on a

$$\frac{1}{T} \int_8^T |\zeta^*(s, \mathfrak{a}\mathcal{C})|^2 dt = Z^*(\sigma) + \mathbf{O}_{K, \sigma} \left(q(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}) T^{\frac{1}{2}-\sigma} \log \varepsilon_{\mathfrak{m}}^2 T \right).$$

(2) On a

$$\frac{1}{T} \int_8^T |\zeta^*(\tfrac{1}{2} + it, \mathfrak{a}\mathcal{C})|^2 dt = \mathbf{O}_K \left(q(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}) (\log \varepsilon_{\mathfrak{m}}^2 T)^2 \right),$$

où

$$q(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{m}}^2 \frac{\mathbf{Nm}}{\rho(\mathfrak{m}, \mathfrak{a})}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *The Approximate Functional Equation for a Class of Zeta -Functions*, Math. Annalen **152** (1963), 30–64.
- [2] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, New York ..., 1986.
- [3] H.L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin ..., 1986.
- [4] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin..., 1978.
- [5] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Berlin, 1963.
- [6] D. B. Zagier, *Zetafunktionen und quadratische Körper*, Springer-Verlag, Berlin ..., 1981.

Wolfgang JENKNER
Universität Wien
Institut für Mathematik
Strudlhofgasse 4
1090 Vienne, Autriche
e-mail : wolfgang@nelly.mat.univie.ac.at