

J.-P. ALLOUCHE

J. O. SHALLIT

## **Complexité des suites de Rudin-Shapiro généralisées**

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 5, n° 2 (1993),  
p. 283-302

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1993\\_\\_5\\_2\\_283\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_2_283_0)

© Université Bordeaux 1, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Complexité des suites de Rudin-Shapiro généralisées

par J.-P. ALLOUCHE ET J. O. SHALLIT\*

ABSTRACT – The complexity of an infinite sequence is defined as the function counting the number of factors of length  $k$  in this sequence. We consider the generalized Rudin-Shapiro sequences, which count the number of occurrences of a certain type of blocks in the binary expansion of the nonnegative integers, and we prove that their complexity function is an ultimately affine function.

RÉSUMÉ – La complexité d'une suite infinie est définie comme la fonction qui compte le nombre de facteurs de longueur  $k$  dans cette suite. Nous prouvons ici que la complexité des suites de Rudin-Shapiro généralisées (qui comptent les occurrences de certains facteurs dans les développements binaires d'entiers) est ultimement affine.

### 1. Introduction

Une suite infinie  $u = (u(n))_{n \geq 0}$  étant donnée, on appelle facteur de cette suite tout mot de la forme  $u(n)u(n+1) \cdots u(n+k-1)$ , ( $k \geq 1$ ). L'entier  $k$  est appelé longueur de ce mot. On note  $P_u(k)$  le nombre de facteurs de longueur  $k$  de la suite  $u$ , et l'application  $P_u$  est appelée complexité de la suite  $u$ .

Rappelons ici quelques résultats généraux sur la fonction  $P_u$  :

A. S'il existe un entier  $n \geq 1$  pour lequel  $P_u(n) \leq n$ , alors la suite  $u$  est ultimement périodique (voir, par exemple, [7]).

B. Les suites non ultimement périodiques de complexité minimale devraient donc vérifier :  $\forall n, P_u(n) = n + 1$ . De telles suites existent, elles sont appelées suite sturmiennes, voir [9] et [7], voir aussi l'article de Borel

---

*Mots-clés* : Rudin-Shapiro sequence, complexity.

Manuscrit reçu le 30 juin 1991, version définitive le 15 janvier 1994.

\* Research supported by a grant from NSERC.

Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

et Laubie dans le volume précédent (*Quelques mots sur la droite projective réelle*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **5** (1993), 23–51) et celui de Mignosi et Séebold dans ce volume (*Morphismes sturmiens et règles de Rauzy*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **5** (1993), 221–233).

C. Les suites de complexité  $2n + 1$  sont étudiées par Arnoux et Rauzy dans [2]. Elles partagent avec les suites sturmiennes la propriété “d’avoir une définition géométrique”.

Si l’on s’intéresse plus particulièrement aux suites automatiques (au sens de [6], voir aussi [5]), on a les résultats suivants :

a. Si  $u$  est automatique, alors  $P_u(n) \leq Cn$  pour une certaine constante  $C$  [6].

b. Si  $u$  est la suite de Thue-Morse,  $P_u(n)$  a été calculé explicitement, et une formule en termes du développement binaire de  $n$  est donnée dans [3] et [8].

c. Si  $u$  est une suite automatique vérifiant certaines conditions supplémentaires, alors  $P_u(n + 1) - P_u(n)$  est aussi une suite automatique [13].

Il est alors naturel de se demander pour quelles suites  $u$  la suite  $P_u(n + 1) - P_u(n)$  est constante, ou au moins ultimement constante (autrement dit pour quelles suites  $u$  la fonction  $P_u(n)$  est ultimement affine, c’est-à-dire  $\exists a, b, \exists n_0, \forall n \geq n_0, P_u(n) = an + b$ ). Les suites sturmiennes et les suites de complexité  $2n + 1$  sont bien sûr de ce type.

Dans cet article nous nous intéressons aux suites de Rudin-Shapiro généralisées proposées par Mendès France et étudiées dans [1]; plus précisément soit  $d$  un entier  $\geq 1$ , on note  $z_d(n)$  le nombre d’occurrences (qui peuvent se chevaucher) du facteur  $1 * \dots * 1$  dans le développement binaire de  $n$ , où  $* \dots *$  représente un mot quelconque de longueur  $d - 1$ . En d’autres termes si le développement binaire de  $n$  est donné par  $n = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(n)2^j$ , alors

$$z_d(n) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(n)e_{j+d}(n).$$

Enfin on appelle suites de Rudin-Shapiro généralisées [1] les suites

$$u_d(n) = z_d(n) \pmod{2}.$$

Notons que la suite de Rudin-Shapiro classique ([12] et [11]) correspond au cas  $d = 1$ .

Le théorème que nous prouvons dans ce qui suit s’énonce alors :

THÉORÈME. *Pour chaque  $d \geq 1$  il existe  $n_0 = n_0(d)$  tel que  $\forall n \geq n_0(d)$ ,  $P_{u_d}(n) = 2^{d+2}(n-1)$ .*

## 2. Le cas de la suite de Rudin-Shapiro classique

Nous notons ici  $u = u_1$  la suite de Rudin-Shapiro classique. Dans un courrier électronique de septembre 1989, le second auteur proposait, sur la base de calculs expérimentaux, la conjecture suivante :

$$\forall n \geq 8 \quad P_u(n) = 8n - 8.$$

Si nous appelons  $\sigma$  la substitution définie sur l'alphabet  $\{a, b, a', b'\}$  par

$$\begin{aligned} a &\rightarrow ab \\ b &\rightarrow ab' \\ a' &\rightarrow a'b' \\ b' &\rightarrow a'b \end{aligned}$$

et  $\varphi$  l'application de  $\{a, b, a', b'\}$  dans  $\{0, 1\}$  définie par  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ;  $\varphi(a') = \varphi(b') = 1$ , il est bien connu que  $u = \varphi \circ v$  où  $v$  est le point fixe de  $\sigma$ , ( $v = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma^k(a)$ ).

Or il se trouve que Tapsoba donne dans [13] la relation

$$P_v(n) = 8n - 8, \quad \forall n \geq 2$$

et que Mouline indique (sans preuve) dans [10] que

$$P_u(n) = P_v(n) \quad \forall n \geq 8.$$

La conjecture ci-dessus résulte de ces deux affirmations. Elle a aussi été prouvée par Brlek [4]. Nous nous proposons d'en donner ici une preuve autonome (n'introduisant pas explicitement la notion de "rythme", voir [10] et [13]), puis dans les prochains paragraphes de montrer comment cela se généralise aux suites  $u_d$ .

### 1° Calcul de $P_v(n)$ :

On appelle donc  $v$  le point fixe de  $\sigma$  définie par

$$\begin{aligned} a &\rightarrow ab \\ b &\rightarrow ab' \\ a' &\rightarrow a'b' \\ b' &\rightarrow a'b \end{aligned}$$

LEMME 1.

• *Tout facteur de  $v$  de la forme  $B_1A_1B_2$ , avec  $B_i \in \{b, b'\}$  et  $A_i \in \{a, a'\}$  admet un unique prolongement à gauche en un facteur de  $v$  de longueur 4.*

• *Tout facteur de  $v$  de la forme  $A_1B_1A_2$ , avec  $A_i \in \{a, a'\}$  et  $B_i \in \{b, b'\}$  admet un unique prolongement à droite en un facteur de  $v$  de longueur 4.*

Après avoir remarqué qu'il y a dans  $v$  alternance des  $A$  dans  $\{a, a'\}$  et des  $B$  dans  $\{b, b'\}$ , il suffit de prouver que deux facteurs de  $v$  de la forme  $A_1B_1A_2B_2$ , ( $A_i \in \{a, a'\}, B_i \in \{b, b'\}$ ) sont égaux dès que leurs préfixes (respectivement suffixes) de longueur 3 sont égaux.

Or un facteur de  $v$  de la forme  $A_1B_1A_2B_2$  est l'image par  $\sigma$  d'un facteur de  $v$  de longueur 2. A cause de l'alternance des  $A$  et des  $B$  dans  $v$  il y a au plus 8 facteurs de longueur 2 qui sont  $ab, ab', a'b, a'b', ba, b'a, ba'$  et  $b'a'$ . Ces facteurs figurent effectivement dans  $v$  (puisqu'il figurent déjà dans  $\sigma^4(a)$  comme on le vérifie sans peine). Notons qu'on obtient au passage  $P_v(2) = 8$ . Les facteurs de  $v$  de la forme  $A_1B_1A_2B_2$  sont alors exactement les mot suivants :

$$\begin{aligned} \sigma(ab) &= abab' & \sigma(ba) &= ab'ab \\ \sigma(ab') &= aba'b & \sigma(b'a) &= a'bab \\ \sigma(a'b) &= a'b'ab' & \sigma(ba') &= ab'a'b' \\ \sigma(a'b') &= a'b'a'b & \sigma(b'a') &= a'ba'b'. \end{aligned}$$

Il est alors clair que deux tels mots distincts ont leurs préfixes droits et leurs préfixes gauches de longueur 3 respectivement distincts.

LEMME 2.

$$\forall n \geq 2, P_v(2n) = P_v(n) + P_v(n+1);$$

$$\forall n \geq 1, P_v(2n+1) = 2P_v(n+1).$$

A cause de l'alternance des  $A \in \{a, a'\}$  et des  $B \in \{b, b'\}$  dans  $\sigma$ , on voit qu'un facteur de  $v$  de longueur  $2n$  est soit du type

$$A_1B_1A_2B_2 \cdots A_nB_n,$$

soit du type

$$B_1A_1B_2A_2 \cdots B_nA_n,$$

avec  $A_i \in \{a, a'\}, B_i \in \{b, b'\}$ , et que ces possibilités s'excluent mutuellement. Un facteur du premier type est l'image par  $\sigma$  d'un facteur de longueur

$n$  de  $v$  (se souvenir que  $v = \sigma(u)$ ), il y a donc exactement  $P_v(n)$  tels facteurs.

Un facteur du second type se prolonge à gauche et à droite en un facteur de  $v$  (à gauche car  $u$  commence par  $a$ ), et un tel prolongement est unique pour  $n \geq 2$  d'après le lemme 1. Il y a donc autant de facteurs du second type que de facteurs

$$AB_1A_1B_2 \cdots B_nA_nB$$

( $A$  et les  $A_i$  dans  $\{a, a'\}$ ;  $B$  et les  $B_i$  dans  $\{b, b'\}$ ) et ces derniers, images par  $\sigma$  des facteurs de longueur  $n + 1$  de  $v$ , sont au nombre de  $P_v(n + 1)$ . Ainsi  $P_v(2n) = P_v(n) + P_v(n + 1)$  pour  $n \geq 2$ .

De la même façon les facteurs de  $v$  de longueur impaire sont soit du type

$$A_1B_1A_2B_2 \cdots A_nB_nA,$$

soit du type

$$B_1A_1B_2A_2 \cdots B_nA_nB,$$

et ces deux possibilités s'excluent mutuellement.

Un facteur du premier type est prolongeable à droite en un facteur de  $v$ , et pour  $n \geq 1$  ce prolongement est unique (lemme 1), de la forme  $A_1B_1A_2B_2 \cdots A_nB_nAB$ . Comme ci-dessus il y a  $P_v(n + 1)$  tels facteurs.

Un facteur du second type est prolongeable à gauche en un facteur de  $v$ , et pour  $n \geq 1$  ce prolongement est unique (lemme 1), de la forme  $AB_1A_1B_2A_2 \cdots B_nA_nB$ . Il y a encore  $P_v(n + 1)$  tels facteurs.

Bref,  $P_v(2n + 1) = 2P_v(n + 1)$ .

PROPOSITION 1. On a  $P_v(n) = 8n - 8, \forall n \geq 2$ .

Il est clair que  $P_v(1) = 4$ , et l'on a obtenu dans le cours du lemme 1,  $P_v(2) = 8$ . Le lemme 2 donne  $P_v(3) = 8$  et une récurrence facile montre que  $P_v(n) = 8n - 8, \forall n \geq 2$  : on suppose le résultat vrai pour  $j \in [2, 2n - 1]$  pour un  $n \geq 2$  et on le démontre pour  $j \in [2, 2n + 1]$ .

2°) Calcul de  $P_u(n)$  :

THÉORÈME 1. On a  $P_u(n) = 8n - 8 \quad \forall n \geq 8$ .

Ceci repose sur le résultat suivant, cité sans démonstration par Mouline [10], et qui est plutôt surprenant :

PROPOSITION 2. On a  $P_u(n) = P_v(n) \quad \forall n \geq 8$ .

On montre d'abord ce résultat pour  $n = 8$ , en écrivant les 56 facteurs de longueur 8 et en constatant que toutes leurs images par  $\varphi$  sont distinctes !

On procède ensuite par récurrence sur  $n$  : supposons que pour un  $n \geq 8$  on ait  $P_u(n) = P_v(n)$  et regardons un facteur de  $u$  de longueur  $n + 1$ . Son préfixe de longueur  $n$  admet un seul antécédent par  $\varphi$  dans  $v$  par l'hypothèse de récurrence. Un antécédent par  $\varphi$  de ce mot de longueur  $n + 1$  dans  $v$  est alors parfaitement déterminé :

- son préfixe de longueur  $n$  est déterminé,
- sa dernière lettre qui appartient soit à  $\{a, a'\}$ , soit à  $\{b, b'\}$  est déterminée au prime près par l'alternance des  $A$  et des  $B$ ,
- le fait que cette lettre soit ou non primée ne dépend que de la valeur de la dernière lettre du facteur de longueur  $n + 1$  de  $u$  considéré.

**Remarque :** Notons, pour finir ce paragraphe, les valeurs de  $P_u(n)$  et  $P_v(n)$  pour  $n \leq 8$  :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_v(n)$	4	8	16	24	32	40	48	56
$P_u(n)$	2	4	8	16	24	36	46	56

### 3. Les suites de Rudin-Shapiro généralisées

Comme on l'a rappelé dans l'introduction, on se donne ici un entier  $d \geq 1$  et on considère la suite

$$u_d(n) = z_d(n) \bmod 2$$

où

$$z_d\left(\sum_{j=0}^{\infty} e_j(n)2^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(n)e_{j+d}(n).$$

Nous nous proposons d'abord d'indiquer comment construire  $u_d$  par une substitution et de donner des propriétés de cette substitution.

1°) **La substitution  $\sigma_d$**  :

$d$  étant un entier supérieur ou égal à 1, on note  $\Gamma_d$  l'alphabet

$$\Gamma_d = \{a_0, a_1, \dots, a_{2^d-1}, a'_0, a'_1, \dots, a'_{2^d-1}\}$$

et  $\sigma_d$  la substitution définie sur  $\Gamma_d$  par :

$$\forall j \in [0, 2^{d-1} - 1], \sigma_d(a_j) = a_{2j}a_{2j+1} \text{ et } \sigma_d(a'_j) = a'_{2j}a'_{2j+1};$$

$$\forall j \in [2^{d-1}, 2^d - 1], \sigma_d(a_j) = a_{2j-2^d}a'_{2j+1-2^d} \text{ et } \sigma_d(a'_j) = a'_{2j-2^d}a_{2j+1-2^d}.$$

On note enfin

$$v_d = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sigma_d^r(a_0).$$

On a bien sûr  $\sigma_d(v_d) = v_d$ .

**LEMME 3.**

•  $\forall x \in \Gamma_d$  on a  $\sigma_d^d(x) = A_0A_1 \cdots A_{2^d-1}$  où  $A_i \in \{a_i, a'_i\}$ , et où  $\sigma_d^j$  est la  $j^{\text{e}}$  itérée de  $\sigma_d$ ,

$$\bullet \sigma_d^d(a_0) = a_0a_1 \cdots a_{2^d-1},$$

$$\bullet \sigma_d^d(a_1) = a_0a'_1a_2a'_3 \cdots a_{2^d-2}a'_{2^d-1}.$$

Notons en effet  $\tau_d$  la 2-substitution définie sur  $\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z}$  par

$$\tau_d(x) = (2x)(2x + 1),$$

et  $\theta_d$  le morphisme défini de  $\Gamma_d^*$  dans  $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^*$  ( $A^*$  désigne l'ensemble des mots sur l'alphabet  $A$ ) par sa valeur sur les lettres :

$$\theta_d(a_i) = \theta_d(a'_i) = i \bmod 2^d.$$

Il est clair que

$$\theta \circ \sigma_d = \tau_d \circ \theta$$

et donc que, quel que soit  $j$ ,

$$\theta \circ \sigma_d^j = \tau_d^j \circ \theta.$$

Or une récurrence immédiate montre que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z} \quad \forall i \geq 0 \quad \tau_d^i(x) = (2^i x)(2^i x + 1) \cdots (2^i x + 2^i - 1),$$



donc on a

$$\tau_d^d(x) = (2^d x)(2^d x + 1) \cdots (2^d x + 2^d - 1) = (0, 1, \dots, 2^d - 1),$$

ce qui prouve la première assertion du lemme.

Pour établir la seconde assertion, nous allons montrer par récurrence finie sur  $j \in [0, d]$  que

$$\sigma_d^j(a_0) = a_0 a_1 \cdots a_{2^j - 1}.$$

C'est vrai pour  $j = 0$ , et si c'est vrai pour un  $j$  dans  $[0, d - 1]$ , alors

$$\sigma_d^{j+1}(a_0) = \sigma_d(a_0 a_1 \cdots a_{2^j - 1}) = (a_0 a_1)(a_2 a_3) \cdots (a_{2^{j+1} - 2} a_{2^{j+1} - 1}).$$

Il suffit de remarquer que  $2^j - 1 \leq 2^{d-1} - 1$ .

La troisième assertion s'obtient en montrant par récurrence finie sur  $j$  que  $\forall j \in [0, d - 1]$  on a

$$\sigma_d^j(a_1) = a_{2^j} a_{2^j + 1} \cdots a_{2^{j+1} - 1}.$$

C'est en effet vrai pour  $j = 0$  et 1. Supposons que ce soit vrai pour un  $j \leq k - 2$ , et calculons  $\sigma_d^{j+1}(a_1)$  :

$$\sigma_d^{j+1}(a_1) = \sigma_d(a_{2^j} a_{2^j + 1} \cdots a_{2^{j+1} - 1}) = (a_{2^{j+1}} a_{2^{j+1} + 1}) \cdots (a_{2^{j+2} - 2} a_{2^{j+2} - 1}).$$

On note que  $2^{j+1} - 1 \leq 2^{d-1} - 1$ . En appliquant ceci à  $j = d - 1$ , on obtient donc

$$\sigma_d^{d-1}(a_1) = a_{2^{d-1}} a_{2^{d-1} + 1} \cdots a_{2^d - 1}$$

d'où maintenant

$$\sigma_d^d(a_1) = a_0 a'_1 a_2 a'_3 \cdots a_{2^d - 2} a'_{2^d - 1}.$$

## 2°) Conséquences du lemme 3

On a les propriétés suivantes :

- Dans la suite infinie  $v_d$ ,  $a_j$  et  $a'_j$  ne peuvent être suivies que par  $a_{j+1}$  ou  $a'_{j+1}$  si  $0 \leq j \leq 2^d - 2$ , et  $a_{2^d - 1}$  et  $a'_{2^d - 1}$  ne peuvent être suivies que par  $a_0$  ou  $a'_0$ ;

- $\forall n \geq 0, \forall j \in [0, 2^d - 1], v_d(2^d n + j) \in \{a_j, a'_j\}$ ;

- $\forall n \geq 0, v_d(2n) \in \{a_0, a_2, \dots, a_{2^d-2}, a'_0, a'_2, \dots, a'_{2^d-2}\}$ ;
- $\forall n \geq 0, v_d(2n+1) \in \{a_1, a_3, \dots, a_{2^d-1}, a'_1, a'_3, \dots, a'_{2^d-1}\}$ ;
- les facteurs de deux lettres de  $v_d$  sont exactement les  $2^{d+2}$  mots suivants :

$$a_j a_{j+1}, a'_j a_{j+1}, a_j a'_{j+1}, a'_j a'_{j+1}, \quad (0 \leq j \leq 2^d - 2);$$

$$a_{2^d-1} a_0, a'_{2^d-1} a_0, a_{2^d-1} a'_0, a'_{2^d-1} a'_0.$$

Les trois premières propriétés résultent immédiatement du lemme 3. En ce qui concerne les facteurs de  $v_d$  de longueur 2, ils sont nécessairement parmi les  $2^{d+2}$  mots écrits ci-dessus (à cause de la première propriété). Pour montrer que ces mots apparaissent effectivement dans  $v_d$ , on utilise les deuxième et troisième assertions du lemme 3 :

- pour  $0 \leq j \leq 2^d - 2$ ,  $a_j a_{j+1}$  apparaît dans  $\sigma_d^d(a_0)$ ;  $a'_j a'_{j+1}$  apparaît dans  $\sigma_d^d(a'_0)$ ; et  $a_j a'_{j+1}$  et  $a'_j a_{j+1}$  apparaissent dans  $\sigma_d^d(a_1)$  ou  $\sigma_d^d(a'_1)$ ;
- $a_{2^d-1} a_0$  apparaît dans  $\sigma_d^{d+1}(a_0) = \sigma_d^d(a_0) \sigma_d^d(a_1)$ ;
- $a'_{2^d-1} a'_0$  apparaît dans  $\sigma_d^{d+1}(a'_0)$ ;
- $a_{2^d-1} a'_0$  apparaît dans  $\sigma_d^{d+1}(a_{2^d-1})$ ;
- $a'_{2^d-1} a_0$  apparaît dans  $\sigma_d^{d+1}(a'_{2^d-1})$ .

**PROPOSITION 3.** Soit  $\varphi$  définie de  $\Gamma_d^*$  dans  $\{0, 1\}$  par  $\varphi(a_i) = 0$ ,  $\varphi(a'_i) = 1$ . Alors  $u_d = \varphi \circ v_d$ .

Notons  $\alpha_d$  la 2-substitution définie sur  $\Gamma_d$  par :

$$\text{si } 0 \leq j \leq 2^{d-1} - 1, \text{ alors } \alpha_d(a_j) = a_j a_j \text{ et } \alpha_d(a'_j) = a'_j a'_j;$$

$$\text{si } 2^{d-1} \leq j \leq 2^d - 1, \text{ alors } \alpha_d(a_j) = a_j a'_j \text{ et } \alpha_d(a'_j) = a'_j a_j.$$

On remarque alors que pour tout mot  $m$  sur  $\Gamma_d$ , on a

$$\varphi(\sigma_d(m)) = \varphi(\alpha_d(m)),$$

il suffit de le prouver pour les lettres, ce qui est évident. En choisissant alors pour mot  $m$  le mot  $\sigma_d^d(v_d(n))$ , on obtient :

$$\forall n \geq 0 \quad \varphi(\sigma_d^{d+1}(v_d(n))) = \varphi(\alpha_d(\sigma_d^d(v_d(n)))).$$

Autrement dit,

$$\forall n \geq 0 \quad \varphi(\sigma_d^d(v_d(2n)v_d(2n+1))) = \varphi(\alpha_d(\sigma_d^d(v_d(n)))).$$

(ne pas oublier que  $v_d$  est point fixe de  $\sigma_d$ ).

Mais cette dernière égalité signifie exactement (en utilisant l'une des assertions du lemme 3 :  $v_d(2^d n + j) \in \{a_j, a'_j\}$ ) :

$$\varphi v_d(2^{d+1}n + 2j) = \varphi v_d(2^d n + j), \quad 0 \leq 2j \leq 2^{d+1} - 1$$

et

$$\varphi v_d(2^{d+1}n + 2j + 1) = \begin{cases} \varphi v_d(2^d n + j), & 0 \leq 2j + 1 \leq 2^d - 1, \\ 1 - \varphi v_d(2^d n + j), & 2^d \leq 2j + 1 \leq 2^{d+1} - 1. \end{cases}$$

Comme  $u_d$  vérifie exactement les mêmes équations et que  $\forall j \in [0, 2^d - 1]$  on a  $\varphi v_d(j) = u_d(j) = 0$ , on en déduit  $u_d = \varphi v_d$ .

### 3°) Calcul de $P_{v_d}(n)$ :

Ce calcul se fait comme dans le cas  $d = 1$  étudié au paragraphe 2.

#### LEMME 4.

• *Tout facteur de  $v_d$  de longueur 3 du type  $A_{2i}A_{2i+1}A_{2i+2}$  ou du type  $A_{2^d-2}A_{2^d-1}A_0$  avec  $A_i \in \{a_i, a'_i\}$  admet un unique prolongement à droite en un facteur de  $v_d$  de longueur 4;*

• *Tout facteur de  $v_d$  de longueur 3 du type  $A_{2i+1}A_{2i+2}A_{2i+3}$  ou du type  $A_{2^d-1}A_0A_1$  avec  $A_i \in \{a_i, a'_i\}$  admet un unique prolongement à gauche en un facteur de  $v_d$  de longueur 4.*

Comme plus haut il suffit d'écrire tous les facteurs de  $v_d$  de longueur 4 et du type  $A_{2i}A_{2i+1}A_{2i+2}A_{2i+3}$  ou  $A_{2^d-2}A_{2^d-1}A_0A_1$  avec  $A_i \in \{a_i, a'_i\}$  et de montrer que leurs préfixes (respectivement suffixes) de longueur 3 sont tous distincts. Or ces mots de longueur 4 sont précisément les images par  $\sigma_d$  des facteurs de  $v_d$  de longueur 2 et ces derniers ont été donnés au lemme 3.

On trouve donc exactement les  $2^{k+2}$  facteurs :

pour  $0 \leq j < j + 1 \leq 2^{d-1} - 1$ , c'est-à-dire  $0 \leq j \leq 2^{d-1} - 2$  :

$$\sigma_d(a_j a_{j+1}) = a_{2j} a_{2j+1} a_{2j+2} a_{2j+3}$$

$$\sigma_d(a'_j a_{j+1}) = a'_{2j} a'_{2j+1} a_{2j+2} a_{2j+3}$$

$$\sigma_d(a_j a'_j) = a_{2j} a_{2j+1} a'_{2j+2} a'_{2j+3}$$

$$\sigma_d(a'_j a'_j) = a'_{2j} a'_{2j+1} a'_{2j+2} a'_{2j+3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_d(a_{2^d-1} a_{2^d-1}) &= a_{2^d-2} a_{2^d-1} a_0 a'_1 \\ \sigma_d(a'_{2^d-1} a_{2^d-1}) &= a'_{2^d-2} a'_{2^d-1} a_0 a'_1 \\ \sigma_d(a_{2^d-1} a'_{2^d-1}) &= a_{2^d-2} a_{2^d-1} a'_0 a_1 \\ \sigma_d(a'_{2^d-1} a'_{2^d-1}) &= a'_{2^d-2} a'_{2^d-1} a'_0 a_1\end{aligned}$$

pour  $2^{d-1} \leq j < j+1 \leq 2^d - 1$ , c'est-à-dire  $2^{d-1} \leq j \leq 2^d - 2$  :

$$\begin{aligned}\sigma_d(a_j a_{j+1}) &= a_{2j-2^d} a'_{2j+1-2^d} a_{2j+2-2^d} a'_{2j+3-2^d} \\ \sigma_d(a'_j a_{j+1}) &= a'_{2j-2^d} a_{2j+1-2^d} a_{2j+2-2^d} a'_{2j+3-2^d} \\ \sigma_d(a_j a'_{j+1}) &= a_{2j-2^d} a'_{2j+1-2^d} a'_{2j+2-2^d} a_{2j+3-2^d} \\ \sigma_d(a'_j a'_{j+1}) &= a'_{2j-2^d} a_{2j+1-2^d} a'_{2j+2-2^d} a_{2j+3-2^d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_d(a_{2^d-1} a_0) &= a_{2^d-2} a'_{2^d-1} a_0 a_1 \\ \sigma_d(a'_{2^d-1} a_0) &= a'_{2^d-2} a_{2^d-1} a_0 a_1 \\ \sigma_d(a_{2^d-1} a'_0) &= a_{2^d-2} a'_{2^d-1} a'_0 a'_1 \\ \sigma_d(a'_{2^d-1} a'_0) &= a'_{2^d-2} a_{2^d-1} a'_0 a'_1\end{aligned}$$

LEMME 5.

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, P_{v_d}(2n) &= P_{v_d}(n) + P_{v_d}(n+1), \\ \forall n \geq 1, P_{v_d}(2n+1) &= 2P_{v_d}(n+1).\end{aligned}$$

Ce lemme se démontre exactement comme le lemme 2 au second paragraphe, en utilisant les propriétés qui suivent le lemme 3, ainsi que le lemme 4.

PROPOSITION 4.

$$\forall n \geq 2, P_{v_d}(n) = 2^{d+2}(n-1).$$

Ceci résulte facilement par récurrence du lemme 5 ci-dessus, ainsi que de la valeur  $P_{v_d}(1) = 2^{d+2}$ , et des valeurs  $P_{v_d}(2) = 2^{d+2}$  (obtenue dans les conséquences du lemme 3) et  $P_{v_d}(3) = 2^{d+3}$  (obtenue grâce au lemme 5).

### 3) Calcul de $P_{u_d}(n)$ :

#### THÉORÈME 2.

Il existe  $n_0 = n_0(d)$  tel que  $\forall n \geq n_0(d)$ ,  $P_{u_d}(n) = 2^{d+2}(n-1)$ .

Pour déduire ce théorème de la proposition 4, nous avons besoin de deux étapes supplémentaires.

- Première étape : *s'il existe  $n_0 (= n_0(d))$  tel que  $P_{u_d}(n) = P_{v_d}(n)$ , alors  $\forall n \geq n_0$ ,  $P_{u_d}(n) = P_{v_d}(n)$ .*

Cette étape se démontre exactement comme dans la fin de la preuve de la proposition 2, par récurrence sur  $n \geq n_0$ . Au lieu de l'alternance des  $A$  et des  $B$  respectivement dans  $\{a, a'\}$  et  $\{b, b'\}$ , on utilise l'alternance  $A_0 A_1 \cdots A_{2^d-1}$  où  $A_j \in \{a_j, a'_j\}$ .

- Seconde étape : *il existe  $n_0 = n_0(d)$  tel que  $P_{u_d}(n_0) = P_{v_d}(n_0)$ .*

Cette étape demande une étude plus précise des facteurs de  $u_d$  et nous nous proposons de la traiter dans les deux paragraphes suivants, obtenant au passage une valeur explicite pour  $n_0(d)$ .

### 4. Facteurs alignés

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'examiner les propriétés de certains facteurs du mot infini  $u_d$ . Bien que ces propriétés aient un intérêt propre, notre but est essentiellement de montrer le résultat mentionné à la fin du paragraphe précédent.

**DÉFINITION.** Soit  $w = u_d(n)u_d(n+1) \cdots u_d(n+a-1)$  un facteur de  $u_d$  de longueur  $a$ . Nous dirons que  $w$  est  $a$ -aligné si et seulement si  $n \equiv 0$  modulo  $a$ .

**DÉFINITION.** Nous définissons une suite de mots  $B_j$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  par :

$$B_0 = \{0, 1\} \text{ et, pour } j \geq 1, B_{j+1} = \{WW\} \cup \{W\overline{W}\}, W \in B_j,$$

(où  $\overline{0} = 1$  et  $\overline{1} = 0$ ).

Notons que le cardinal de  $B_j$  est égal à  $2^{j+1}$ , notons aussi que  $B_j$  est stable par l'application qui à  $X$  associe  $\overline{X}$ , ce qui est immédiat par récurrence sur  $j$ .

**PROPOSITION 5.** L'ensemble des facteurs  $2^d$ -alignés de  $u_d$  est exactement l'ensemble  $B_d$ .

*Démonstration.*

La preuve se fait en deux étapes. Dans la première nous montrons par récurrence sur  $d$  que chaque mot de  $B_d$  est un facteur 2-aligné de  $u_d$ . Dans la seconde nous montrons que tout facteur  $2^d$ -aligné de  $u_d$  est effectivement un élément de  $B_d$ .

Pour la première étape, nous prouvons les deux assertions suivantes par récurrence sur  $d$ .

A. Tout mot de  $B_d$  est un facteur  $2^d$ -aligné de  $u_d$ .

B. Tout mot de  $B_d$  qui commence par un 0 est l'un des  $2^d$  premiers facteurs  $2^d$ -alignés de  $u_d$ .

Pour  $d = 1$ , les deux assertions sont vraies puisque

$$\begin{aligned} u_1(0)u_1(1) &= 00, \\ u_1(2)u_1(3) &= 01, \\ u_1(6)u_1(7) &= 10, \\ u_1(12)u_1(13) &= 11. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que A et B sont vraies pour  $d$ , et prouvons-les pour  $d + 1$ . Soit  $X$  un mot de  $B_{d+1}$ . Par définition de  $B_{d+1}$  on a soit  $X = WW$  soit  $X = W\overline{W}$  où  $W$  est un mot de  $B_d$ .

Premier cas :

si  $W$  commence par un 0, alors utilisant B et l'hypothèse de récurrence, nous voyons qu'il existe  $j$ ,  $0 \leq j < 2^d$  tel que

$$u_d(2^d j)u_d(2^d j + 1) \cdots u_d(2^d j + 2^d - 1) = W.$$

Il est alors facile de constater que

$$WW = u_{d+1}(2^{d+1} j)u_{d+1}(2^{d+1} j + 1) \cdots u_{d+1}(2^{d+1} j + 2^{d+1} - 1)$$

et que

$$W\overline{W} = u_{d+1}(2^{2d+1} + 2^{d+1} j) \cdots u_{d+1}(2^{2d+1} + 2^{d+1} j + 2^{d+1} - 1).$$

Second cas :

si  $W$  commence par un 1, considérons le mot  $\overline{X}$  qui appartient à  $B_{d+1}$ . Ce mot commence par un zéro et d'après le premier cas c'est un facteur  $2^{d+1}$ -aligné de  $u_{d+1}$ , disons

$$\overline{X} = u_{d+1}(2^{d+1} j) \cdots u_{d+1}(2^{d+1} j + 2^{d+1} - 1),$$

où  $0 \leq j < 2^{d+1}$ . Mais on voit alors facilement que l'on a :

$$X = u_{d+1}(2^{4d+4} + 2^{3d+3} + 2^{d+1}j) \cdots u_{d+1}(2^{4d+4} + 2^{3d+3} + 2^{d+1}j + 2^{d+1} - 1),$$

(nous avons simplement mis le bloc  $10^{d-1}10^d$  en tête des développements binaires).

Ceci achève la preuve de la première partie. La seconde partie de la proposition 5 est l'affirmation suivante.

C. Tout facteur  $2^d$ -aligné de  $u_d$  appartient à  $B_d$ .

Ceci se prouve ainsi :

soit  $X = u_d(2^d j) u_d(2^d j + 1) \cdots u_d(2^d j + 2^d - 1)$  un facteur  $2^d$ -aligné de  $u_d$ . Ecrivons  $j = 2^d r + i$ , avec  $0 \leq i < 2^d$ . Alors, pour  $0 \leq a < 2^d$ , on a

$$\begin{aligned} u_d(2^d j + a) &\equiv u_d(2^d(2^d r + i) + a) \\ &\equiv u_d(2^{2d} r + 2^d i + a) \\ &\equiv u_d(2^{2d} r + 2^d i) + u_d(2^d i + a) \\ &\equiv u_d(2^d r + i) + u_d(2^d i + a) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\text{ou bien } X = u_d(2^d i) \cdots u_d(2^d i + 2^d - 1),$$

$$\text{ou bien } \overline{X} = u_d(2^d i) \cdots u_d(2^d i + 2^d - 1),$$

et ce dernier mot est par l'assertion A et l'hypothèse de récurrence un élément de  $B_d$ . Ceci conclut la preuve de la proposition 5.

Nous allons maintenant montrer comment engendrer le mot infini  $u_d$  en itérant un morphisme. La construction que nous allons donner définit en fait une application surjective  $\rho_d$  de l'ensemble des facteurs  $2^d$ -alignés de  $u_d$  sur l'ensemble des facteurs  $2^{d+1}$ -alignés; ce n'est donc pas un morphisme au sens habituel. On peut cependant facilement construire des morphismes  $\tau_d$  et  $\varphi_d$  tels que

$$u_d = \tau_d(\varphi_d^\infty(a_0)),$$

où  $\varphi_d$  est un morphisme uniforme de longueur 2 et  $\tau_d$  est un morphisme uniforme de longueur  $2^d$ .

**Exemple :**

Pour  $d = 2$ ,  $\rho_d$  est donné comme suit :

$$\begin{aligned}
 0000 &\rightarrow 0000 & 0101 \\
 0011 &\rightarrow 0000 & 1010 \\
 0101 &\rightarrow 0011 & 0110 \\
 0110 &\rightarrow 0011 & 1001 \\
 1001 &\rightarrow 1100 & 0110 \\
 1010 &\rightarrow 1100 & 1001 \\
 1100 &\rightarrow 1111 & 0101 \\
 1111 &\rightarrow 1111 & 1010.
 \end{aligned}$$

**DÉFINITION.** Si  $a_0a_1 \cdots a_{2^d-1}$  est un facteur  $2^d$ -aligné de  $u_d$ , on pose

$$\rho_d(a_0a_1 \cdots a_{2^d-1}) = a_0a_0a_1a_1 \cdots a_{2^{d-1}-1}a_{2^{d-1}-1}a_{2^{d-1}}\overline{a_{2^{d-1}}} \cdots a_{2^d-1}\overline{a_{2^d-1}}.$$

**PROPOSITION 6.** On a  $u_d = \rho_d^\infty(0^{2^d})$ .

*Démonstration.* Comme  $a_0a_1 \cdots a_{2^d-1}$  est un mot  $2^d$ -aligné, il existe un entier  $n$  tel que :

$$a_i = u_d(2^d n + i), \quad \forall i \in [0, 2^d[.$$

Il nous faut donc prouver que

$$\rho_d(a_0a_1 \cdots a_{2^d-1}) = u_d(2^{d+1}n) \cdots u_d(2^{d+1}n + 2^{d+1} - 1).$$

Supposons que  $0 \leq i < 2^{d-1}$ . Alors clairement :

$$\begin{aligned}
 u_d(2^{d+1}n + 2i) &= u_d(2^d n + i), \\
 u_d(2^{d+1}n + 2i + 1) &= u_d(2^d n + i).
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $2^{d-1} \leq i < 2^d$ . Alors :

$$\begin{aligned}
 u_d(2^{d+1}n + 2i) &= u_d(2^d n + i), \\
 u_d(2^{d+1}n + 2i + 1) &= \overline{u_d(2^d n + i)},
 \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.



COROLLAIRE 1. *Il y a exactement  $(2^{d+1})$  facteurs  $2^{d+1}$ -alignés dans  $u_d$ , et ce sont exactement les images des éléments de  $B_d$  par  $\rho_d$ .*

Pour finir ce paragraphe, nous allons donner un "codage" naturel des  $2^{d+1}$  éléments de  $B_d$  par des mots de longueur  $2^{d+1}$ .

DÉFINITION. *Nous définissons les deux applications  $T_0$  et  $T_1$  sur les mots  $W$  par*

$$T_0(W) = WW \quad \text{et} \quad T_1(W) = W\overline{W}.$$

PROPOSITION 7.

(i) *Tout mot  $W = W_0W_1 \cdots W_{2^d-1}$  dans  $B_d$  peut s'écrire de manière unique sous la forme*

$$W = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots T_{a_1}(a_0)) \cdots)$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_d$  sont dans  $\{0, 1\}$ .

(ii) *De plus, soit  $W = W_0W_1 \cdots W_{2^d-1} = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots T_{a_1}(a_0)) \cdots)$ . Appelons  $m$  l'entier dont le développement en base 2 est  $a_d a_{d-1} \cdots a_1$ . Alors si  $a_d a_{d-1} \cdots a_1 \neq 0^d$ , on a pour tout  $n \geq 1$  :*

$$\nu_2(m) = \nu_2(n) \quad \implies \quad W_n \neq W_{n-1}$$

( $\nu_2(n)$  est l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise  $n$ ).

*Démonstration.*

(i) se déduit immédiatement de la définition de  $B_d$ ;

(ii) comme on suppose  $a_d a_{d-1} \cdots a_1 \neq 0^d$ , l'un au moins des  $a_i$  vaut 1. Soit  $j$  le plus petit des indices tels que  $a_j = 1$ . Alors :

$$T_{a_j}(T_{a_{j-1}} \cdots T_{a_1}(a_0)) \cdots = a_0^{2^j-1} \overline{a_0^{2^j-1}} = X.$$

Donc si  $m$  est l'entier de représentation binaire  $a_j \cdots a_1$ , on a  $m = 2^{j-1}$ . Si  $n = 2^{j-1}$ , il est clair que  $w_n \neq w_{n-1}$ . Comme

$$W = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots (T_{a_{j+1}}(X)) \cdots)),$$

on a  $W = X_1 \cdots X_{2^d-j}$ , où chacun des  $X_i$  vaut  $X$  ou  $\overline{X}$ . Nous voyons ainsi que si  $n \equiv 2^{j-1} \pmod{2^j}$ , alors  $W_n \neq W_{n-1}$ . En d'autres termes, si  $\nu_2(m) = \nu_2(n)$  alors  $W_n \neq W_{n-1}$ .

COROLLAIRE 2. Si l'on a  $W = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots(T_{a_1}(a_0))\cdots))$ , alors :

$$\rho_d(W) = T_{a_{d-1}}(T_{a_{d-2}}(\cdots T_{a_1}(T_0(a_0)))\cdots)T_{a_{d-1}}(T_{a_{d-2}}(\cdots T_{a_1}(T_1(a_0)))\cdots).$$

La démonstration est laissée au lecteur.

## 5. Preuve de l'existence de $n_0$

Dans ce paragraphe nous prouvons l'existence d'un entier  $n_0$  tel que :

$$P_{u_d}(n_0) = P_{v_d}(n_0).$$

Pour cela nous prouvons d'abord que si l'on se donne un facteur de  $u_d$  suffisamment long, disons  $u_d(n)u_d(n+1)\cdots$ , alors on peut déterminer  $n$  modulo  $2^{d+1}$ .

DÉFINITION. Si  $W = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots(T_{a_1}(a_0))\cdots))$ , on écrit  $\text{code}(W) = a_d a_{d-1} \cdots a_1$ .

PROPOSITION 8. Supposons que l'on ait

$$a_0 a_1 \cdots a_{2^{d+2}-1} = u_d(n)u_d(n+1)\cdots u_d(n+2^{d+2}-1).$$

Alors  $n \equiv 0 \pmod{2^{d+1}}$  si et seulement si les deux mots  $Z_1 = a_0 a_1 \cdots a_{2^{d+1}-1}$  et  $Z_2 = a_{2^{d+1}} a_1 \cdots a_{2^{d+2}-1}$  sont des facteurs  $2^{d+1}$ -alignés de  $u_d$ .

*Démonstration.*

Le sens  $\implies$  est évident.

La preuve du sens  $\impliedby$  est compliquée et nous nous contentons de l'esquisser, confiants en la capacité du lecteur intéressé à fournir les détails non précisés ci-dessous.

(i) Supposons  $n \equiv 0 \pmod{2}$  et  $n \not\equiv 0 \pmod{2^{d+1}}$ .

Si  $(n \pmod{2^{d+1}}) \leq 2^d$ , alors, d'après le corollaire 1,  $u_d(n+2^d-2) \neq u_d(n+2^d-1)$ ; donc  $Z_1$  ne peut pas être un facteur  $2^{d+1}$ -aligné.

Si  $2^d \leq (n \pmod{2^{d+1}}) < 2^{d+1}$ , alors d'après le corollaire 2,  $u_d(n) \neq u_d(n+1)$  et donc  $Z_1$  ne peut pas être un facteur  $2^{d+1}$ -aligné.

(ii) Supposons maintenant  $n \equiv 1 \pmod{2}$ . Sans perte de généralité on peut supposer  $n > 2$ , puisque tout facteur qui apparaît dans  $u_d$  apparaît une infinité de fois. Soit  $r = \lfloor n/2^{d+1} \rfloor$ . On écrit :

$$\begin{aligned} u_d(r2^{d+1}) \cdots u_d(n) \cdots u_d(n+2^{d+2}-1) &= XW_1W_2 \\ &= Z_1Z_2Y \end{aligned}$$

où  $|W_1| = |W_2| = |Z_1| = |Z_2| = 2^{d+1}$ .

Soit  $S_i$  un mot tel que  $\rho_d(S_i) = W_i$ , pour  $i = 1, 2$ .

Cas (a) :  $(n \bmod 2^{d+1}) < 2^{d-1}$ .

Si  $\text{code}(S_1) \notin \{0^d, 10^{d-1}\}$ , alors, d'après la proposition 7 (ii), on a  $W_1(a) \neq W_1(a-1)$  pour un  $a$  dans  $\{2^{d-1}, 2^{d-1} + 2, \dots, 2^d - 4, 2^d - 2\}$ . Ceci donne  $Z_1(b) \neq Z_1(b+1)$  pour  $b = a - (n \bmod 2^{d+1}) - 1$ . Comme  $(n \bmod 2^{d+1}) < 2^{d-1}$ , on a  $0 \leq b < 2^{d-1}$ . Mais ceci contredit la description de  $Z_1$  donnée dans le corollaire 1.

Si  $\text{code}(S_1) = 10^{d-1}$ , alors  $W_1(2^d) \neq W_1(2^d - 1)$ , ce qui conduit aussi à une contradiction.

Supposons enfin que  $\text{code}(S_1) = 0^d$ . Alors  $W_1(2^d + 2) \neq W_1(2^d + 1)$ , ce qui donne une contradiction si  $(n \bmod 2^{d+1}) > 1$ . Si  $n \equiv 1 \pmod{2^{d+1}}$ , alors il n'est pas difficile de voir que l'on a nécessairement  $Z_2 = Z_1$ . Donc  $\rho_d^{-1}(Z_1 Z_2) = 0^{2^d}$ , qui ne peut pas être un facteur de  $u_d$ . Par conséquent  $Z_1 Z_2$  ne peut pas être un facteur de  $u_d$ .

Cas (b) :  $2^{d-1} < (n \bmod 2^{d+1}) < 2^d$ .

Si  $\text{code}(S_1) \notin \{0^{d-1}1, 10^{d-2}1\}$ , alors d'après le corollaire 2 et la proposition 7 (ii) on a  $W_1(a) = W_1(a-1)$ , pour un  $a$  appartenant à l'ensemble  $\{2^d + 2, 2^d + 4, \dots, 2^d + 2^{d-1}\}$ . Ceci entraîne  $Z_1(b) \neq Z_1(b+1)$  pour  $b = a - (n \bmod 2^{d+1}) - 1$ . Comme  $2^{d-1} < (n \bmod 2^{d+1}) < 2^d$ , on a  $0 \leq b < 2^{d-1}$ . Mais ceci contredit la description de  $Z_1$  donnée dans le corollaire 1.

Si  $\text{code}(S_1) = 0^{d-1}1$ , alors d'après la proposition 7 (ii), on a  $W_1(2^d) \neq W_1(2^d - 1)$ , ce qui conduit aussi à une contradiction.

Si  $\text{code}(S_1) = 10^{d-2}1$ , alors  $W_1(2^d - 2) \neq W_1(2^d - 3)$ , ce qui donne une contradiction si  $(n \bmod 2^{d+1}) < 2^d - 1$ . Si  $n \equiv 2^d - 1 \pmod{2^{d+1}}$ , alors il est facile de voir que nécessairement  $Z_1 = \rho_d((10)^{2^d})$ . Alors  $W_2 = \rho_d((01)^{2^{d-1}}(10)^{2^{d-1}})$ . Donc  $Z_2 = \rho_d((10)^{2^d})$ .

Par conséquent  $\rho_d^{-1}(Z_1 Z_2) = (10)^{2^d}$ , qui ne peut pas être un facteur de  $u_d$ . Donc  $Z_1 Z_2$  ne peut pas être un facteur de  $u_d$ .

Les deux derniers cas (c) et (d)

Cas (c) :  $2^d < (n \bmod 2^{d+1}) < 3 \cdot 2^d$ ,

Cas (d) :  $3 \cdot 2^d < (n \bmod 2^{d+1}) < 2^{d+1}$ ,

se traitent de manière similaire et sont laissés au lecteur.

**COROLLAIRE 3.** Soit  $F = f_1 f_2 \cdots f_{3 \cdot 2^{d+1}}$  un facteur de  $u_d$ . Alors, si  $n$  est un entier tel que :  $F = u_d(n) \cdots u_d(n + 3 \cdot 2^{d+1} - 1)$ , la classe de  $n$  modulo  $2^{d+1}$  ne dépend que de  $F$ , (en d'autres termes, si  $F$  apparaît en différentes places dans  $u_d$ , les indices où  $F$  commence sont tous dans la même classe de congruence modulo  $2^{d+1}$ ).

*Démonstration.* On applique la proposition 8 successivement aux facteurs :  $f_1 \cdots f_{2^{d+2}}$ ,  $f_2 \cdots f_{2^{d+2}+1}$ ,  $\cdots$ ,  $f_{2^{d+1}} \cdots f_{3 \cdot 2^{d+1}}$ .

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 2 :

Soit  $F$  un facteur de  $u_d$ , de longueur  $k \geq 3 \cdot 2^{d+1}$ , et soit  $n$  un entier tel que  $F = u_d(n) \cdots u_d(n + k - 1)$ . D'après le corollaire 3, la classe de  $n$  et donc les classes de  $n + 1, \cdots, n + k - 1$  modulo  $2^{d+1}$  ne dépendent que de  $F$ , donc aussi leurs classes modulo  $2^d$ . Se souvenant alors de la seconde conséquence du lemme 3 (paragraphe 2), on voit que pour chaque  $i$  entre 0 et  $k - 1$ ,  $v_d(n + i)$  appartient à  $\{a_{j(i)}, a'_{j(i)}\}$  où  $j(i) \equiv n + i \pmod{2^d}$  et  $0 \leq j(i) < 2^d$ , les  $j(i)$  ne dépendant donc que de  $F$ . De plus le choix entre les lettres primées et les lettres non primées dépend des valeurs de  $u_d(n + i)$  autrement dit seulement de  $F$ . Ceci montre donc l'unicité du facteur de  $v_d$  dont l'image par  $\varphi_d$  est  $F$ . Ainsi on peut prendre dans le théorème 2  $n_0(d) = 3 \cdot 2^{d+1}$ .

**Remarque :** Le cas de la suite de Rudin-Shapiro classique et des calculs pour  $d \leq 4$  semblent prouver que cette valeur de  $n_0(d)$  n'est pas la plus petite possible. Il semble que la valeur optimale pour  $n_0(d)$  soit  $2^{d+1} + 4$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. Allouche et P. Liardet, *Generalized Rudin-Shapiro sequences*, Acta Arith. **60** (1991), 1–27.
- [2] P. Arnoux et G. Rauzy, *Représentation géométrique des suites de complexité  $2n+1$* , Bull. Soc. math. France **119** (1991), 199–215.
- [3] S. Brlek, *Enumeration of factors in the Thue-Morse word*, Discrete Appl. Math. **24** (1989), 83–96.
- [4] S. Brlek, Communication privée.
- [5] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France et G. Rauzy, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. math. France **108** (1980), 401–419.
- [6] A. Cobham, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164–192.
- [7] E. M. Coven et G. A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.

- [8] A. de Luca et S. Varricchio, *Some combinatorial properties of the Thue-Morse sequence and a problem in semigroups*, Theoret. Comput. Sci. **63** (1989), 333–348.
- [9] M. Morse et G. A. Hedlund, *Symbolic Dynamics, II, Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. Soc. **62** (1940), 1–42.
- [10] J. Mouline, *Contribution à l'étude de la complexité des suites substitutives*, Thèse, Université de Provence, 1990.
- [11] W. Rudin, *Some theorems on Fourier coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 855–859.
- [12] H. S. Shapiro, *Extremal problems for polynomials and power series*, M. S. Thesis, M. I. T., 1951.
- [13] T. Tapsoba, *Complexité de suites automatiques*, Thèse de troisième cycle, Université Aix-Marseille II, 1987.

J.-P. Allouche  
C. N. R. S., L. M. D.  
Luminy, Case 930  
F-13288 Marseille Cedex 9  
France  
e-mail : allouche@lmd.univ-mrs.fr

J. O. Shallit  
Department of Computer Science  
University of Waterloo  
Waterloo, Ontario N2L 3G1  
Canada  
e-mail : shallit@graceland.uwaterloo.ca