JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

BERNARD RANDÉ

Récurrences 2- et 3-mahlériennes

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, n° 1 (1993), p. 101-109

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_101_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 101–109*

Récurrences 2- et 3-mahlériennes

par BERNARD RANDÉ

RÉSUMÉ. On sait (Cobham) qu'une suite 2- et 3-automatique est une suite rationnelle. Une question de Loxton et van der Poorten étend ce résultat au cas 2- et 3-régulier. On montre dans cet article que, si une suite vérifie une récurrence 2- et 3-mahlérienne d'ordre un, elle est rationnelle.

1. Introduction

Un résultat célèbre de Cobham, ([2]), affirme que si une suite est à la fois p- et q-automatique, p et q étant deux entiers multiplicativement indépendants, elle est ultimement périodique. La généralisation de ce résultat, conjecturée par Loxton et van der Poorten, est la suivante : *si une série formelle à coefficients dans un corps commutatif vérifie à la fois une p-équation de Mahler et une q-équation de Mahler, p et q étant multiplicativement indépendants, c'est une fraction rationnelle.* Notons que van der Poorten donne une réponse à cette question dans [4] par des méthodes compliquées, sous l'hypothèse que le corps de base est un corps de nombres. On pourra aussi lire l'article de J. H. Loxton [3].

Notons que cette conjecture implique le théorème de Cobham, ainsi que la généralisation du théorème de Cobham aux suites p-régulières conjecturée par Allouche et Shallit dans [1].

Le résultat que nous obtenons est en réalité de portée beaucoup plus limitée, mais nous l'obtenons par des méthodes "élémentaires" : nous considérons un élément φ de $\mathbb{C}((X))$ vérifiant une p-équation de Mahler d'ordre un sur $\mathbb{C}(X)$, et aussi une q-équation de Mahler d'ordre un sur $\mathbb{C}(X)$. Il faut noter que p et q sont supposés un peu plus que multiplicativement indépendants, à savoir premiers entre eux. Pour la clarté du propos, on prend $p = 2$ et $q = 3$.

Manuscrit reçu le 10 avril 1992.
Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

2. Langages et notations

Une application $f : A \to B$ est dite *presque nulle* si l'ensemble

$$supp(f) = \{a \in A \ f(a) \neq 0\}$$

est fini; $supp(f)$ est appelé *support de* f.

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, et k un entier naturel, on note

$$A^{1/k} = \{x \in \mathbb{C}, \quad x^k \in A\}.$$

Si $A = \{a\}$, on notera plus brièvement $a^{1/k}$ cet ensemble. On désignera aussi par A^k l'image de A par $x \mapsto x^k$.

Soient à présent deux fractions rationnelles a et b telles que

$$a(0) = b(0) = 1,$$

et une fonction φ, méromorphe sur le disque unité ouvert, telle que $\varphi(0) = 1$, et vérifiant de plus les deux équations de Mahler suivantes :

$$\varphi(x^3) = a(x)\varphi(x) \qquad (1),$$
$$\varphi(x^2) = b(x)\varphi(x) \qquad (2).$$

On désire montrer que φ est elle aussi une fraction rationnelle.

3. Réduction du problème

Posons

$$a(x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x - \alpha)^{f(\alpha)},$$

où $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{Z}$ est presque nulle. On obtient alors :

$$a(x^2) = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x^2 - \alpha)^{f(\alpha)}.$$

Soit I un système représentatif de racines carrées des éléments de $\mathbb{C}^*$. On obtient, compte tenu du fait que $\mathbb{C}^* = I \cup (-I)$:

$$a(x^2) = \prod_{\beta \in I} (x^2 - \beta^2)^{f(\beta^2)} = \prod_{\beta \in I} (x - \beta)^{f(\beta^2)} \prod_{\beta \in I} (x + \beta)^{f(\beta^2)}$$
$$= \prod_{\beta \in \mathbb{C}^*} (x - \beta)^{f(\beta^2)}.$$

Si, de même, $b(x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x-\alpha)^{g(\alpha)}$, on obtiendra :

$$b(x^3) = \prod_{\beta \in \mathbb{C}^*} (x-\beta)^{g(\beta^3)}.$$

Grâce aux relations (1) et (2), et au fait que $\varphi \neq 0$, on a :

$$a(x^2)b(x) = a(x)b(x^3),$$

ou encore, grâce aux calculs précédents :

$$\prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x-\alpha)^{f(\alpha^2)+g(\alpha)} = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x-\alpha)^{f(\alpha)+g(\alpha^3)}.$$

Soit :

$$\text{(H)} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}^* \qquad f(\alpha^2) - f(\alpha) = g(\alpha^3) - g(\alpha).$$

Grâce à cette relation, nous allons prouver l'existence d'une application $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{Z}$, presque nulle, telle que :

$$f(\alpha) = h(\alpha) - h(\alpha^3).$$

Supposons h construite, et soit $r(x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x-\alpha)^{-h(\alpha)}$.

On aura alors :

$$\frac{r(x^3)}{r(x)} = a(x) = \frac{\varphi(x^3)}{\varphi(x)}.$$

Donc $\theta = \dfrac{\varphi}{r}$ vérifie la relation : $\theta(x^3) = \theta(x)$. De plus, 0 n'est pas pôle ni zéro de r, donc θ est holomorphe au voisinage de 0. Il en résulte que $\theta(x) = \theta(0)$ puis que : $\varphi = \theta(0)r$, donc que φ est une fraction rationnelle.

4. Construction de h sur le complémentaire de l'ensemble des racines de l'unité

LEMME 1. *Soit* $S = \{x \in \mathbb{C}^*,\ x$ *non racine de l'unité*$\}$ *et* F *un sous-ensemble fini de* S. *Alors :*

$$\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \quad F^{2^\ell} \cap F^{3^k} \neq \emptyset\} \text{ est fini.}$$

Preuve.

Notons I l'ensemble précédent; si $(k,\ell) \in I$, il existe $y_{k,\ell} \in F^{2^\ell} \cap F^{3^k}$, donc il existe $\alpha_{k,\ell}$ et $\beta_{k,\ell}$ dans F tels que :

$$y_{k,\ell} = \alpha_{k,\ell}^{2^\ell} = \beta_{k,\ell}^{3^k}.$$

On définit ainsi une application :

$$I \to F \times F$$
$$(k,\ell) \mapsto (\alpha_{k,\ell},\ \beta_{k,\ell}).$$

Montrons qu'elle est injective, ce qui suffira. Soit :

$$\alpha_{k,\ell} = \alpha_{k',\ell'} = \alpha\ ;\ \beta_{k,\ell} = \beta_{k',\ell'} = \beta.$$

On a : $\alpha^{2^\ell} = \beta^{3^k}$; $\alpha^{2^{\ell'}} = \beta^{3^{k'}}$ et donc :

$$\alpha^{2^\ell . 3^{k'}} = \alpha^{2^{\ell'} . 3^k}.$$

Or α n'est pas racine de 1 ($\alpha \in F$). Donc : $2^{\ell-\ell'} = 3^{k-k'}$, soit $\ell = \ell'$ et $k = k'$.

Nous pouvons à présent poser :

$$\forall \alpha \in S \quad h(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(\alpha^{3^k}).$$

Ceci a un sens, car $k \mapsto \alpha^{3^k}$ est injective, et donc $f(\alpha^{3^k}) = 0$ pour k assez grand. De plus, $h(S) \subset \mathbb{Z}$ évidemment.

Soit $\alpha \in S$. Alors $\alpha^3 \in S$, et donc :

$$h(\alpha^3) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(\alpha^{3^{k+1}}) = h(\alpha) - f(\alpha).$$

Montrons que $h : S \to \mathbb{Z}$ est presque nulle.

Notons $A = [\ \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)] \cap S$; A est fini.

LEMME 2. $\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A^{\frac{1}{2^k}}\right] \cap \left[\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} A^{\frac{1}{3^\ell}}\right]$ *est fini.*

Preuve. L'ensemble considéré est égal à :

$$\bigcup_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} (A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}}).$$

Si (k,ℓ) est tel que $A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}} \neq \emptyset$, il existe x, y dans A tels que $x = \omega^{2^k}$, $y = \omega^{3^\ell}$, où $\omega \in A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}}$. D'où : $x^{3^\ell} = y^{2^k}$, et $(k,\ell) \in I$ (avec la notation du lemme 1).

Finalement :

$$\bigcup_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} (A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}}) = \bigcup_{(k,\ell)\in I} (A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}}).$$

Or, A étant fini, $A^{\frac{1}{2^k}}$ est lui aussi fini. Le résultat en découle.

Pour montrer que h est presque nulle, il suffit donc de montrer que, si $\alpha \notin [\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A^{\frac{1}{2^k}}] \cap [\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} A^{\frac{1}{3^\ell}}]$, alors $h(\alpha) = 0$. Supposons par exemple que $\alpha \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A^{\frac{1}{2^k}}$. Cela signifie que, quel que soit k dans $\mathbb{N}$, $\alpha^{2^k} \notin A$, donc que $g(\alpha^{2^k}) = 0$. Notons que l'hypothèse (H) entraîne :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f(\alpha^{3^k}) - f(\alpha^{2.3^k}) = g(\alpha^{3^k}) - g(\alpha^{3^{k+1}}),$$

et donc que :

$$\begin{aligned} h(\alpha) - h(\alpha^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} [f(\alpha^{3^k}) - f(\alpha^{2.3^k})] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} [g(\alpha^{3^k}) - g(\alpha^{3^{k+1}})] \\ &= g(\alpha), \end{aligned}$$

puisque $g(\alpha^{3^k}) = 0$ pour k assez grand.

Il en résulte que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad h(\alpha) = h(\alpha^{2^k}).$$

Or il existe k tel que $h(\alpha^{2^k}) = 0$; sinon, pour tout k, $h(\alpha^{2^k}) \neq 0$ et donc, d'après la définition même de h, il existe ℓ (dépendant de k) tel que $f(\alpha^{2^k 3^\ell}) \neq 0$. Mais $k \mapsto \alpha^{2^k 3^\ell}$ est injective, donc supp (f) est infini, ce qui est contradictoire. Finalement, on a bien $h(\alpha) = 0$.

5. Construction de h sur l'ensemble des racines de l'unité

Montrons tout d'abord deux lemmes.

LEMME 3. *Soit* $M = \sum_{y \in \mathbb{C}^*} |f(y)|$, *et* x *un élément de* $\mathbb{C}^*$, p *un élément de* $\mathbb{N}$. *Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n[f(x) + f(x^3) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})]$$
$$= \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left\{ \sum_{\omega \in (x^{3^p})^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) - \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) \right\},$$

où $|\alpha_n| \leq Mp$.

Preuve. Soit $\omega \in x^{\frac{1}{2^n}}$. On a, successivement :

$$f(\omega^2) - f(\omega) = g(\omega^3) - g(\omega)$$
$$\cdots$$
$$f(\omega^{2^n}) - f(\omega^{2^{n-1}}) = g(\omega^{2^{n-1}.3}) - g(\omega^{2^{n-1}})$$

et donc :

$$f(x) - f(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[g(\omega^{2^k.3}) - g(\omega^{2^k}) \right].$$

Sommons ces égalités pour ω décrivant $x^{\frac{1}{2^n}}$. On obtient :

$$2^n f(x) - \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^n}}} f(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^n}}} [g(\omega^{2^k.3}) - g(\omega^{2^k})].$$

Clairement : $|\sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^n}}} f(\omega)| \leq M$. De plus, pour $k \in [0, n-1]$:

$\sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^n}}} g((\omega^{2^k})^3) = 2^k \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega^3)$. On a donc :

$$2^n f(x) = \varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left\{ \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}} [g(\omega^3) - g(\omega)] \right\},$$

avec $|\varepsilon_n| \leq M$.

Montrons que l'application :

$$x^{\frac{1}{2^j}} \to (x^3)^{\frac{1}{2^j}}$$
$$\omega \mapsto \omega^3$$

est bijective. Compte tenu de la cardinalité, il suffit de montrer qu'elle est injective. Or :

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 \text{ avec } \omega_1^{2^j} = \omega_2^{2^j} \Rightarrow \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^3 = 1 \text{ et } \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{2^j} = 1, \text{ donc } \omega_1 = \omega_2.$$

Finalement, on peut réécrire :

$$2^n f(x) = \varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left\{ \sum_{\omega \in (x^3)^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) - \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) \right\}.$$

Appliquons cette égalité à x, $x^3, \cdots, x^{3^{p-1}}$, et sommons :

$$2^n[f(x) + f(x^3) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})]$$
$$= \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left(\sum_{\omega \in (x^{3^p})^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) - \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) \right),$$

avec $|\alpha_n| \leq pM$.

LEMME 4. *Soit $R = \{x \in \mathbb{C}^*,\ x$ racine de l'unité $\}$, et F un sous-ensemble fini de R. Alors :*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{2^n} \text{ est un ensemble fini.}$$

Preuve. Si $F = \{x\}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{2^n}$ est incluse dans le sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ engendré par x, qui est fini. Le résultat général en découle.

Notons $B = [\text{supp } (f) \cup \text{ supp } (g)] \cap R$; l'ensemble B est fini, et donc, d'après le lemme 4 : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{2^n}$ est fini.

Soit à présent $\alpha \in R$. Puisque $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \alpha^{\frac{1}{3^p}}$ est infini, il existe donc

$$x \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \alpha^{\frac{1}{3^p}} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{2^n}.$$

Posons :

$$h(\alpha) = -[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})], \text{ où } x^{3^p} = \alpha.$$

Il convient de vérifier que cette définition ne dépend que de α, pas de (x, p). Soit donc $y \notin \cup B^{2^n}$ tel que $y^{3^q} = \alpha$. D'après le lemme 3 :

$$2^n[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})] = \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left(\sum_{\omega \in \alpha^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) - \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) \right).$$

Mais, si $\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}$, $\omega^{2^{n-k}} = x \Rightarrow \omega \notin B \Rightarrow g(\omega) = 0$.

Donc :

$$2^n[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})] = \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left(\sum_{\omega \in \alpha^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) \right).$$

De même :

$$2^n[f(y) + \cdots + f(y^{3^{q-1}})] = \beta_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left(\sum_{\omega \in \alpha^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) \right).$$

Donc :

$$|2^n\{[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})] - [f(y) + \cdots + f(y^{3^{q-1}})]\}| \leq M(p+q),$$

et ce quel que soit n. Donc, faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'égalité souhaitée.

h étant ainsi définie, h est clairement à valeurs entières.

Soit $\alpha \notin \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} B^{3^n}$, qui est un ensemble fini (lemme 4). Soient x et p tels que $x^{3^p} = \alpha$. S'il existe $k \leq p-1$ tel que $x^{3^k} \in B$, alors $x^{3^p} \in B^{3^{p-k}}$, donc $\alpha \in B^{3^{p-h}}$, ce qui est exclu. Donc : $f(x) = f(x^3) = \cdots = f(x^{3^{p-1}}) = 0$, soit $h(\alpha) = 0$.

Enfin, si $h(\alpha) = -[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})]$, alors :

$$h(\alpha^3) = -[f(x) + \cdots + f(x^{3^p})].$$

En effet, $x^{3^p} = \alpha \Rightarrow x^{3^{p+1}} = \alpha^3$, et $x \notin \cup B^{2^n}$. Donc $(x, p+1)$ permet effectivement de définir $h(\alpha^3)$. D'où :

$$h(\alpha) - h(\alpha^3) = f(x^{3^p}) = f(\alpha).$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soient p, q deux entiers premiers entre eux, a et b deux fractions rationnelles telles que $a(0) = b(0) = 1$, φ une fonction méromorphe sur un voisinage de 0 telle que*

$$\varphi(x^p) = a(x)\varphi(x) \quad et \quad \varphi(x^q) = b(x)\varphi(x).$$

Alors φ est une fraction rationnelle.

La généralisation consistant à passer de $(2,3)$ à (p,q) ne relève que du contenu de la démonstration. En outre, l'hypothèse $\varphi(0) = 1$ n'est pas utile car :

- ou bien $\varphi = 0$, et le résultat est clair,
- ou bien $\varphi \neq 0$, $\varphi(x) \underset{0}{\sim} Cx^d \Rightarrow Cx^{pd} \sim Cx^d \Rightarrow d = 0$, donc 0 n'est ni zéro ni pôle de φ, et $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(0)}$ vérifie les mêmes hypothèses.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. Allouche et J. Shallit, *The ring of k-regular sequences*, Theor. Comp. Sci. **98** (1992), 1163–197.

[2] A. Cobham, *On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata*, Math. Systems Theory **3** (1969), 186–192.

[3] J. H. Loxton, *Automata and transcendence*, New advances in transcendence theory (Durham 1986), Cambridge University Press (1988), 215–228.

[4] A. van der Poorten, *Remarks on automata, functional equations and transcendence*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1986–1987), exposé n° 27, 27-01–27-11.

Bernard Randé
6 rue des Echevins
F-44000 Nantes