Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

B. Kahn

Quelques remarques sur le u-invariant

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2e série, tome 2, nº 1 (1990), p. 155-161

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1990__2_1_155_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **2** *(1990), 155-161*

Quelques remarques sur le u-invariant.

par B. KAHN

(Toutes les notations concernant les formes quadratiques sont empruntées au livre de T.Y. Lam [Lam]).

Soit F un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$. Le u-invariant de F est le plus petit entier $u(F)$ tel que toute forme quadratique sur F de rang $\geq u(F)$ soit isotrope, ou $+\infty$ si un tel entier n'existe pas. Pour que $u(F) < +\infty$, il faut que F ne soit pas formellement réel. Pour certains corps F, on connaît la valeur de $u(F)$:

THEOREME 1. *a) Si F est de type fini sur un corps algébriquement clos C, $u(F) = 2^{\mathrm{deg\ tr}(F/C)}$.*

b) Si F est de type fini sur un corps fini $\mathbb{F}_p, u(F) = 2^{\mathrm{deg\ tr}(F/F_p)} + 1$.

c) Si F est de type fini et de degré de transcendance 1 sur un corps ordonné maximal, et si F n'est pas formellement formellement réel, $u(F) =$ 2.

d) Si F est un corps de nombres totalement imaginaire, $u(F) = 4$.

DÉMONSTRATION: a) L'inégalité $u(F) \leq 2^d$, où $d = deg\ tr(F/C)$, résulte du théorème de Tsen- Lang qui implique que le corps F est C_d ([G], th. 3.6). L'inégalité opposée résulte du lemme suivant :

LEMME 1. *1) Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions F et de corps résiduel k (supposé de caractéristique $\neq 2$). Alors $u(F) \geq 2u(k)$.*

2) Soit F/k une extension de type fini, de degré de transcendance d. Alors $u(F) \geq 2^d u(\ell)$ pour une extension finie ℓ de k convenable.

DÉMONSTRATION DE 1): Soit $\overline{q}$ une forme quadratique anisotrope sur k. Relevons $\overline{q}$ coefficient par coefficient en une forme quadratique q sur A. Si π est une uniformisante de A, on vérifie facilement par un raisonnement de descente infinie que la forme $q \perp \pi q$ est anisotrope sur F.

DÉMONSTRATION DE 2): Par récurrence, on se ramène au cas $d = 1$. On écrit F comme extension finie de $k(T)$ (fractions rationnelles) ; la valuation

Manuscrit reçu le 25 novembre 1989

discrète sur $k(T)$ donnée par l'idéal (T) de $k[T]$ peut se prolonger en une valuation discrète de F, dont le corps résiduel est une extension finie de k. On peut alors appliquer 1).

Remarque 1. Cette démonstration montre que, dans 2), on peut prendre $\ell = k$ si l'extension F/k est transcendante pure.

L'énoncé b) du théorème 1) se démontre comme a), en utilisant le théorème de Chevalley qui dit qu'un corps fini est C_1([G], ch.3). Enfin, c) et d) sont bien connus ([Lam], ch. XI, exemples 4.2(2) et (5)).

Remarque 2. Tous les énoncés du théorème 1 peuvent se résumer par la formule $u(F) = 2^{cd(F)}$, où $cd(F)$ est la dimension cohomologique de F, c'est-à-dire de son groupe de Galois absolu, cf [CG], p. II-13 prop. 11, p. II-10 exemple 3.3, p. S-1 premier supplément, p. II-16 prop. 13.

En général, la détermination de $u(F)$ est un problème difficile. On ignore encore à l'heure actuelle quel est l'ensemble des valeurs prises par $u(F)$. On sait que :

$u(F) \notin \{3,5,7\}$ ([Lam], ch. XI, prop. 4.8) ; si $I^3F = 0$, et $u(F) > 1, u(F)$ est pair (ibid., lemme 4.9).

On peut conjecturer que, si F est de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps ordonné maximal et n'est pas formellement réel, on a encore $u(F) = 2^{cd(F)}$. En 1953, Kaplansky a conjecturé que $u(F)$ était toujours une puissance de 2 ([K]). Merkurjev vient de démontrer que cette conjecture est fausse, en prouvant que $u(F)$ peut prendre toute valeur paire ([M], cf aussi [T2]). Plus précisément, pour tout $m \geq 1$, Merkurjev montre qu'il existe un corps F tel que

$u(F) = 2m$; $cd(F) \leq 2$; en particulier $I^3F = 0$.

Je me propose ici d'estimer $u(F)$ en termes du *groupe de Brauer* de F ; l'énoncé précis est essentiellement une reformulation de lemmes utilisés par Merkurjev, mais j'espère qu'il présentera malgré tout un intérêt. Notons $Br(F)$ le groupe de Brauer de F, et $Quad(F)$ le sous-groupe de $Br(F)$ engendré par les classes d'algèbres de quaternions.[1] A F, on associe un invariant $\lambda(F)$:

$\lambda(F) = min\{\lambda|$ tout élément de $Quad(F)$ est somme de λ classes d'algèbres de quaternions$\}$.

THÉORÈME 2. *a) Pour tout corps $F, u(F) \geq 2(\lambda(F)+1)$.*

[1] Un théorème de Merkurjev [MS] implique que $Quad(F)$ est le sous-groupe de 2-torsion de $Br(F)$, mais on n'aura pas besoin de ce résultat.

b) Si $I^3F = 0$ et $u(F) > 1$, $u(F) = 2(\lambda(F) + 1)$.

Pour démontrer le théorème 2, on va rappeler quelques résultats sur l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique, démontrés et utilisés par Merkurjev dans [M]. Pour toute forme quadratique q, on note $C(q)$ l'algèbre de Clifford de q ([Lam], ch. V). Si q est de rang pair $2m$, $C(q)$ est une F-algèbre centrale simple de degré 2^m ; si q et q' sont de rang pair, on a la formule (loc. cit., cor. 2.7) :

$$(1) \qquad C(q \perp q') \cong C(q) \otimes C(d_{\pm}q.q'),$$

où $d_{\pm}q$ est le "discriminant à signe" de q, donné par $d_{\pm}q = (-1)^m disc\ q$ ([Lam], p. 38). Comme $C(< a, b >) = \left(\frac{a \quad b}{F}\right)$ ([Lam], ch. V, exemple 1.5 (3)), on voit que si q est de rang $2m$, $C(q)$ est produit tensoriel de m algèbres de quaternions. De plus, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. *([M]), lemme 1). 1) Si $q \in I^2F$ est de rang $2m$, $C(q) \cong M_2(E(q))$, où $E(q)$ est produit tensoriel de $m - 1$ algèbres de quaternions.*

2) Soit E un produit tensoriel de m – 1-algèbres de quaternions. Alors il existe $q \in I^2F$, de rang $2m$, telle que $E(q) \cong E$.

Soit $m = \lambda(F) + 1$ (supposé fini). Par définition de m, il existe des algèbres de quaternions $\kappa_1, \cdots, \kappa_{m-1}$ sur F telles que $[\kappa_1] + \cdots + [\kappa_{m-1}] \in Quad(F)$ ne soit pas somme de $m - 2$ classes d'algèbres de quaternions. D'après la prop. 1, 1), il existe une forme quadratique $q \in I^2F$, de rang $2m$, telle que $E(q) \cong \kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_{m-1}$. Si q était isotrope, on pourrait écrire $q \cong q' \perp \mathbf{H}$, où $q' \in I^2F$ est de rang $2m - 2$; alors on aurait $E(q) \cong M_2(E(q')$, où $E(q')$ est produit tensoriel de $m - 2$ algèbres de quaternions. Cela montre que q est anisotrope, donc que $u(F) \geq 2m$. Si $\lambda(F)$ est infini, le même raisonnement montre que $u(F) = +\infty$.

Supposons maintenant $I^3F = 0$. Cela entraîne que deux formes quadratiques sur F sont isométriques si et seulement si elles ont même rang, même discriminant à signe et même invariant de Clifford ([EL], th. 3.10 ; si q est de rang pair, son invariant de Clifford est par définition la classe de $C(q)$ dans $Br(F)$). On en déduit :

LEMME 2. *Soit $q \in IF$ telle que $[C(q)] = 0$ dans $Br(F)$. Alors $q \cong < -1, a > \perp t\mathbf{H}$, où $a = d_{\pm}q$ et $t \in \mathbb{N}$.*

Posons encore $m = \lambda(F) + 1$ (supposé fini), et soit q une forme quadratique de rang $2m + 2$. Par hypothèse, $[C(q)] = [E]$, où E est produit tensoriel de $m-1$ algèbres de quaternions. D'après la partie 2) de la proposition 1, il existe $Q \in I^2F$, de rang $2m$, telle que $E(Q) \cong E$. D'après la formule (1), on a :

$$[C(q \perp -Q)] = [C(q)] + [C(-Q)] = [C(q)] + [C(Q)] = 0.$$

D'après le lemme 1, on a $q \perp -Q \cong < -1, a > \perp t\mathbf{H}$, où $a = d_{\pm q}$ et $t \in \mathbf{N}$. Comme q est de rang $2m+2$, on a $t = 2m$. On peut donc écrire :

$$q \perp -Q \simeq < -1, a > \perp Q \perp -Q.$$

Par le théorème de simplification de Witt, cela implique $q \simeq < -1, a > \perp Q$. Mais $Q \in I^2F$ est *universelle*, c'est-à-dire représente tout élément de F^* (cf [Lam], ch. XI, dém. du lemme 4.9), donc q est isotrope. Comme $u(F)$ est pair (ibid.), on a $u(F) \leq 2m$, ce qui démontre la partie 2) du théorème 2.

COROLLAIRE. *(cf [MS], prop. (16.10)). Si F est l'un des corps apparaissant dans le th. 1, on a $\lambda(F) \leq 2^{cd(F)-1} - 1$.*

Remarque 3. Concurremment à $\lambda(F)$ on peut introduire un autre invariant $\lambda'(F)$, lui aussi lié aux algèbres centrales simples sur F :

$\lambda'(F) = sup\{\lambda' |$ il existe un corps gauche de centre F, produit tensoriel de λ' algèbres de quaternions$\}$.

Cet invariant tire son importance du théorème principal de Merkurjev ([M], th. 1, voir aussi [T2], th. 1), qui implique que, si q est une forme quadratique de corps de fonctions $F(q)$, on a $\lambda'(F(q)) \geq \lambda'(F)$ dès que $q \in I^3F$, que $q \in I^2F$ avec $dim\ q \geq 2\lambda'(F) + 4$ ou que $q \notin I^2F$ avec $dim\ q \geq 2\lambda'(F) + 2$. Les deux invariants $\lambda'(F)$ et $\lambda(F)$ sont reliés par la

PROPOSITION 2. *1) Pour tout corps F, on a $\lambda'(F) \leq \lambda(F)$.*

2) Si $\lambda'(F) \leq 2$, on a $\lambda'(F) = \lambda(F)$.

3) Si $\lambda'(F) = 3$, on a $\lambda(F) = 3$ ou 4.

DÉMONSTRATION: 1) est évident. Si $n = \lambda(F)$, pour tout $(n+1)$-uplet $(\kappa_1, \cdots, \kappa_{n+1})$ d'algèbres de quaternions sur F, l'algèbre $\kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_{n+1}$ est de la forme $M_2(A)$, où A est une algèbre de degré 2^n. Si $n \leq 2$, il résulte d'un théorème d'Albert (cf [R]) que A est produit tensoriel de n algèbres de quaternions ; on a donc $\lambda'(F) \leq n$, et donc $\lambda(F) = \lambda'(F)$, ce qui démontre 2). Finalement, si $n = 3$ et si κ_5 est une autre algèbre de quaternions, on a $A \otimes \kappa_5 \cong M_2(B)$, où B est de degré 8 ; il résulte d'un théorème de Tignol ([T1]) que $M_2(B)$ est produit tensoriel de 4 algèbres de quaternions, et donc que $\lambda(F) \leq 4$, ce qui démontre 3).

Si $n \geq 3$, on sait que pour F convenable il existe un corps gauche de centre F, de degré 2^n, dont la classe est dans $Quad(F)$ et qui n'est pas produit tensoriel d'algèbres de quaternions ([ART], [ELTW]) ; il est probable qu'on a en général $\lambda'(F) < \lambda(F)$. Des arguments "génériques" impliquent qu'il existe une fonction f telle que $\lambda(F) \leq f(\lambda'(F))$ pour tout corps F ([T3], §1) ; il serait intéressant d'estimer, ou au moins de majorer f de manière explicite. Par ailleurs, on peut se demander si on a $\lambda'(F) = \lambda(F)$ lorsque F est d'un type particulier, par exemple lorsque $I^3F = 0$. C'est en tout cas vrai si $cd_2(F) = 2$; en fait :

THÉORÈME 3. *(Merkurjev). Supposons que $cd_2(F) = 2$. Alors :*

a) Tout corps gauche de centre F dont la classe est dans $Quad(F)$ est produit tensoriel d'algèbres de quaternions.

b) Une forme quadratique $q \in I^2F$ est anisotrope si et seulement si $E(q)$ est un corps.

En particulier, on a $\lambda'(F) = \lambda(F)$.

DÉMONSTRATION (Merkurjev). Soit F un corps quelconque. Il est clair que si $q \in I^2F$ et que $E(q)$ est un corps, alors q est anisotrope (cf [M], cor. au lemme 1, ou l'argument ci-dessus suivant la proposition 1). Inversement, la proposition 1 montre que b) implique formellement a) dans le théorème 3. Il suffit donc de montrer que, lorsque $cd_2(F) = 2$, $E(q)$ est un corps pour toute forme quadratique anisotrope $q \in I^2F$.

Soient F_1 une extension algébrique parfaite de F, L une clôture algébrique de F_1 et S un 2-sous-groupe de Sylow de $Gal(L/F_1)$. Le corps K des invariants de S a les propriétés suivantes :

i) toute sous-extension finie de K/F est de degré impair ;

ii) toute sous-extension finie de L/K est composée d'extensions quadratiques successives.

D'après le théorème de Springer ([Lam], ch. VII, th. 2.3), q_K est encore anisotrope, et on a évidemment encore $cd_2(K) \leq 2$; il suffit donc de démontrer 2) pour q_K, c'est-à-dire qu'on peut supposer $F = K$.

Soit $2m$ le rang de q, et soit $e(q)$ l'indice de $E(q)$: on a $e \leq 2^{m-1}$, et on doit montrer que $e = 2^{m-1}$. On va démontrer que $e \geq 2^{m-1}$ par récurrence sur e.

Le cas $e = 1$ est impossible. Si $e = 2, dim\ q \geq 4$ et $E(q)$ est semblable à une algèbre de quaternions $\left(\frac{a \quad b}{F}\right)$, et le lemme 2 montre que $q \perp -q'$ est hyperbolique, donc que $q \cong q'$ puisque q est anisotrope. Supposons $e \geq 4$. Soit D un corps gauche de centre F semblable à $E(q)$ (donc $deg\ D = e$), et soit M un sous-corps commutatif maximal de D. Vu la propriété (ii), M/F contient une sous-extension quadratique N/F ; il est clair que $D \otimes_F N$ n'est pas un corps, donc que $e(q_N) \leq e(q)/2$. Par récurrence, on a donc $e(q_N) \geq 2^{m'-1}$, où $2m'$ est le rang de la partie anisotrope de q_N, c'est-à-dire le $2m$–indice (q_N). Le lemme suivant entraîne que $m' \geq m - 1$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 3. *Soit F un corps tel que $I^3F = 0$, soit N une extension quadratique de F et soit $q \in I^2F$ une forme quadratique anisotrope de rang ≥ 6. Alors l'indice de q_N est ≤ 2.*

DÉMONSTRATION: Soit $N = F(\sqrt{a})$. D'après [Lam], ch VII, lemme 3.1, q peut s'écrire $< 1, -a > \otimes \Phi \perp \Psi$ avec Φ de rang ϵ, où 2ϵ est l'indice de q_N. Si $\epsilon \geq 2, \Phi$ contient une sous-forme de rang 2, donc $< 1, -a > \otimes \Phi$ contient une sous-forme isométrique à une 2-forme de Pfister, qui est universelle puisque $I^3F = 0$. Si $dim\ q \geq 6$, cela implique que q est isotrope, ce qui est absurde.

REFERENCES

[ART] S.A. AMITSUR, L-H. ROWEN, J-P. TIGNOL, ***Division algebras of degree 4 and 8 with involution*** Israel J. Math. **33** (1979), 133–148.

[CG] J-P. SERRE, *Cohomologie galoisienne*, Lect. Notes in Math. **5**. Springer, Berlin, 1965.

[EL] R. ELMAN, T.Y. LAM, *On the quaternion symbol homomorphism* $g_F : k_2F \to B(F)$, Lect. Notes in Math. **342**, 447–463. Springer, New-York, 1973.

[ELTW] R. ELMAN, T.Y. LAM, J-P. TIGNOL, A. WADSWORTH, *Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions*, I, Amer. J. Math **105** (1983), 1119–1170.

[G] M. GREENBERG, *Lectures on forms in many variables.* Benjamin, New York, 1969.

[K] I. KAPLANSKY *Quadratic forms*, J. Soc. Math. Japan **5** (1953), 200-207.

[Lam] T.Y. LAM, *The algebraic theory of quadratic forms.* Benjamin, New-York, 1980.

[M] A.S. MERKURJEV, *Simple algebras over function fields of quadrics.* preprint, 1989.

[MS] A.S. MERKURJEV, A.A. SUSLIN, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982), 1011-1046. Trad. anglaise : Math. USSR Izv. **21** (1983), 307-341.

[R] M.L. RACINE, *A simple proof of theorem of Albert*, Proc. AMS **43** (1974), 487–488.

[T1] J-P. TIGNOL, *Sur les classes de similitude de corps à involution de degré 8*, C.R. Acad. Sci. Paris **286**.

[T2] J-P. TIGNOL, *Réduction de l'indice d'une algèbre simple sur le corps des fonctions d'une quadrique.* preprint, 1989.

[T3] J-P. TIGNOL, *On the length of decompositions of central simple algebras in tensor products of symbols*, in Methods of ring theory, NATO ASI Series, Ser. C **129**, 505–516. Reidel, Dordrecht, 1984.

URA 212-CNRS
Mathématiques-Université de Paris 7
5ème étage, couloir 45-55
2, Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05 (FRANCE).