JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

MICHEL BALAZARD

Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2e série, tome 2, nº 1 (1990), p. 13-30

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1990__2_1_13_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **2** *(1990), 13–30*

Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres.

par MICHEL BALAZARD

1 - Suites unimodales

Soit I un intervalle de $\mathbb{Z}$. Nous dirons qu'une suite de nombres réels positifs ou nuls $(u_k)_{k\in I}$ est unimodale s'il existe $k_0 \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que $u_k \leq u_{k+1}$ si $k < k_0$ et $u_k \geq u_{k+1}$ si $k \geq k_0$. Le nombre k_0 est appelé mode de la suite u_k ; il peut ne pas être unique.

En ce qui concerne le sens de variation, l'unimodalité est donc la propriété la plus simple après la monotonie, qui en est d'ailleurs un cas particulier. L'attention particulière portée aux suites unimodales vient de la théorie des probabilités et de la statistique : si u_k est la probabilité qu'une certaine variable aléatoire X prenne la valeur k, k_0 est la valeur la plus probable de X et la probabilité que $X = k$ est d'autant plus faible que $|k - k_0|$ est grand (cf. l'ouvrage récent [7]).

Des suites unimodales apparaîssent dans de nombreux domaines des mathématiques et les démonstrations d'unimodalité, souvent délicates, sont d'une surprenante variété. Ainsi l'unimodalité de la suite des coefficients du polynôme $\prod_{k=1}^{n}(1+x^k)$ fut démontrée par Hughes en 1977 grâce à la théorie des algèbres de Lie, et redémontrée par Odlyzko et Richmond en 1982 par la méthode de Laplace d'évaluation des intégrales. Nous reviendrons sur cet exemple au paragraphe 3.

Notre objectif est ici d'illustrer cette diversité de méthodes par des exemples issus de la théorie des nombres. Au paragraphe 2, nous rappelons les relations existant entre unimodalité, concavité logarithmique, et convolution. Au paragraphe 3, nous donnons quelques exemples de suites unimodales tirés de la théorie des partitions. Enfin, le paragraphe 4 est dévolu à la solution récente d'une conjecture d'Erdös, objet de l'exposé oral tenu à ce séminaire. Signalons que notre article complète dans une certaine mesure le récent tour d'horizon de Stanley (cf. [22]), avec lequel il a cependant une intersection non vide (essentiellement, notre paragraphe 3).

Manuscrit reçu le 21 novembre 1989.

2 - Unimodalité, concavité logarithmique et convolution

La suite de nombres réels positifs ou nuls $(u_k)_{k\in I}$ est dite logarithmiquement concave (en abrégé, log-concave) si $u_k^2 \geq u_{k+1}.u_{k-1}$ pour tout $k \in I$ tel que $k \pm 1 \in I$, et si le support de u (l'ensemble des k pour lesquels $u_k \neq 0$) est un intervalle de $\mathbb{Z}$. La log-concavité de u entraîne son unimodalité : $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ est décroissante donc il existe $k_0 \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1$ si $k < k_0$ et $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq 1$ si $k \geq k_0$.

Le produit de convolution de deux suites de réels positifs ou nuls $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in J}$ est la suite $(w_k)_{k\in I+J}$ définie par

$$w_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i\in I, j\in J}} u_i v_j,$$

si la série du second membre converge pour tout $k \in I + J$. On note $w = u * v$.

Nous énonçons maintenant une suite de propositions concernant les relations entre unimodalité, log-concavité et produit de convolution.

1) Le produit de convolution de deux suites log-concaves est log-concave.
2) Le produit de convolution de deux suites unimodales n'est pas nécessairement unimodal (prendre $u = v$ avec $u_0 = \frac{2}{3}$, $u_1 = u_2 = \frac{1}{6}$ et $u_k = 0$ si $k \neq 0, 1, 2$).
3) Une loi de probabilité $(p_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est log-concave si et seulement si $p * q$ est unimodale pour toute loi de probabilité $(q_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unimodale (Keilson et Gerber 1971, cf. [10]).
4) Si $(p_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une loi de probabilité telle que $p_n = 0$ pour $n < 0$ et $n > d$, $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_{d-1} > 0$, $p_d > 0$, alors il existe un entier m_0 tel que pour $m \geq m_0$ la puissance m-ème de convolution $(p_n)^{*m}$ soit log-concave (Odlyzko et Richmond 1985, cf. [17]).
5) Le produit de convolution de deux suites unimodales symétriques (par rapport à leurs modes respectifs), s'il est défini, est unimodal et symétrique.

Si $a_1, \ldots, a_n$ sont n nombres réels positifs, la suite des fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_0 = 1;\ \sigma_1 = a_1 + \cdots + a_n;\ \sigma_2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j;\ \ldots;\ \sigma_n = a_1 \ldots a_n$$

est unimodale. Elle est en effet log-concave, étant le produit de convolution $u^1 * \cdots * u^n$, où $u_0^j = 1$, $u_1^j = a_j$ et $u_k^j = 0$ si $k \neq 0, 1$. Si tout les a_i valent

1, on retrouve l'unimodalité bien connue des coefficients du binôme. Si $a_i = i-1$, on obtient l'unimodalité de $k \mapsto |s(n,k)|$, où les $s(n,k)$ sont les nombres de Stirling de première espèce (cf. [6], chapitre 7).

Ce résultat a aussi une intéressante conséquence arithmétique. Soit $\lambda_k(p)$ la densité asymptotique de la suite des entiers dont le k-ème diviseur premier (par ordre croissant) est égal à p. Le crible d'Eratosthene-Legendre permet de montrer que $\lambda_k(p)$ existe et vaut $p^{-1}\prod_{q<p}(1-\frac{1}{q})\sum_m \frac{1}{m}$, où le produit porte sur les nombres premiers $q<p$ et la somme sur les entiers $m \geq 1$, ayant exactement $k-1$ diviseurs premiers, tous inférieurs à p. Cette somme est évidemment la $(k-1)$-ème fonction symétrique élementaire des nombres $\frac{1}{q-1}$, $q<p$, q premier et on obtient donc l'unimodalité de la suite $k \mapsto \lambda_k(p)$. Erdös et Tenenbaum ont étudié en détail le comportement asymptotique de $\lambda_k(p)$ et ont en particulier montré que pour chaque p, le mode k_0 de la suite $\lambda_k(p)$ vérifie $k_0 = \log\log p + O(1)$ (cf.[9]). On peut d'ailleurs généraliser ce résultat de manière élémentaire. Si S_k désigne la somme de Newton $\sum_{i=1}^{n} a_i^k$, il est clair que

$$S_1\sigma_k - S_2\sigma_{k-1} \leq (k+1)\sigma_{k+1} \leq S_1\sigma_k,$$

donc le mode k_0 de la suite (σ_k) vérifie :

$$[S_1 - S_2] \leq k_0 \leq [S_1].$$

3 - Partitions

A la frontière entre la théorie des nombres et l'analyse combinatoire, la théorie des partitions est riche en exemples de suites unimodales. Rappelons qu'une partition de l'entier positif n est une suite d'entiers $1 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r$ telle que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = n$; les λ_i sont les parts de la partition.

Nous commençons par une liste de résultats, puis nous donnerons, à titre d'illustration, quelques détails sur le théorème de Hughes déja cité au paragraphe 1.

1) Soit $p(n,k)$ (resp.$q(n,k)$) le nombre de partitions de n en k parts (resp. k parts distinctes). Pour n assez grand, les suites $k \mapsto p(n,k)$ et $k \mapsto q(n,k)$ sont unimodales (Szekeres 1953, cf. [23]).
2) Une composition de n est une suite quelconque d'entiers positifs $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ telle que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = n$; les λ_i sont les parts de la composition. Soit $a(n,m)$ le nombre de compositions de n dont la

plus grande part est égale à m. Pour $n \geq 1$, la suite $m \mapsto a(n,m)$ est unimodale (Odlyzko et Richmond 1979, cf. [15]).

3) Soit $p(N,M,n)$ le nombre de partitions de n en exactement M parts, toutes $\leq N$. Pour $N,M \geq 1$, la suite $n \mapsto p(N,M,n)$ est unimodale (Andrews 1975, cf. [2], theorem 3.10).

4) Soit $c(N,M,n)$ le nombre de compositions de n en exactement M parts, toutes $\leq N$. Pour $N,M \geq 1$, la suite $n \mapsto c(N,M,n)$ est unimodale (Star 1976, cf. [2], theorem 4.2). quad Intéressons-nous maintenant au nombre $j(n,k)$ de partitions de k en parts distinctes, toutes $\leq n$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} j(n,k)x^k = \prod_{l=1}^{n}(1+x^l).$$

Nous dirons qu'un polynôme est unimodal si la suite de ses coefficients l'est.

THÉORÈME A (Hughes 1977, cf.[13]). *Pour tout n, le polynôme $\prod_{l=1}^{n}(1+x^l)$ est unimodal.*

Ce théorème peut être vu comme corollaire de l'un ou l'autre des deux suivants :

THÉORÈME B (Stanley 1980, cf. [21]). *Soit R un système de racines de rang n, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ une base de R, R_+ l'ensemble des racines positives de R relativement à cette base. Soient $x_1,\dots,x_n$ n indéterminées indépendantes. Pour tout $\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \in R_+$, où les a_i sont des entiers naturels, on pose $x^\beta = x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$. On définit enfin*

$$P(R;x_1,\dots,x_n) = \prod_{\beta\in R_+}(1-x^\beta)$$

Alors, si $m_1,\dots,m_\iota$ sont des entiers positifs, le polynôme en t

$$\frac{P(R;t^{m_1},\dots,t^{m_n})}{P(R;t,\dots,t)}$$

est unimodal et symétrique.

THÉORÈME C (Odlyzko et Richmond 1982, cf. [16]). *Soit $(a_i)_{i\geq 1}$ une suite non-décroissante d'entiers positifs vérifiant les hypothèses :*

$$\text{(I)} \qquad \lim_{k\to+\infty}\frac{\log a_k}{\log k} = s \qquad \textit{existe}\ , s>0$$

$$\text{(II)} \qquad \inf_{1/2a_k \leq \alpha \leq 1/2} (\log k)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \|\alpha a_i\|^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

où $\| \quad \|$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Alors il existe une constante A (dépendant de la suite (a_i), mais pas de n) telle que si $\sum_{k=0}^{N} b_k x_k = \prod_{i=1}^{n}(1+x^{a_i})$, $N = \sum_{i=1}^{n} a_i$, on ait $b_{k-1} < b_k$ pour $A \leq k \leq N/2$ (donc $b_k > b_{k-1}$ pour $N/2 \leq k \leq N-A$).

Notre seul commentaire concernant le théorème B sera de le rendre intelligible au lecteur ignorant la théorie des algèbres de Lie. Un système de racines de rang n est un sous-ensemble fini R de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ tel que :

1) R engendre $\mathbf{R}^n$ et ne contient pas 0 ;
2) si $\alpha \in R$, $\lambda\alpha \in R$ équivaut à $\lambda = \pm 1$;
3) si $\alpha \in R$, R est invariant par la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à α ;
4) si $\alpha, \beta \in R$, alors $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ est entier, où (,) désigne le produit scalaire.

Une base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de R est une famille d'éléments de R qui est une base de $\mathbf{R}^n$ telle que tout $\beta \in R$ puisse s'écrire $\beta = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i$, où les k_i sont des entiers tous ≥ 0 ou tous ≤ 0. On peut montrer que tout système de racines admet une base. L'ensemble R_+ des racines positives de R relativement à la base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est alors l'ensemble des $\beta \in R$ tels que les k_i soient positifs ou nuls dans l'égalité $\beta = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i$.

Pour retrouver le résultat de Hughes, on prend

$$R = C_n = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \neq 0; 1 \leq i \leq j \leq n\},$$

où $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$. On vérifie que C_n est un système de racines dont une base est $\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, 2\epsilon_n$, et que les racines positives de C_n ont pour coordonnées dans cette base :

- soit $(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ a zéros, suivis de b "1" et de c zéros (avec $a \geq 0, b \geq 1$ et $c \geq 1$)
- soit $(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2, 1)$ a zéros, suivis de b "1", de c "2" et d'un "1" (avec $a, b, c \geq 0$)

On choisit $m_1 = m_2 = \cdots = m_{n-1} = 1$ et $m_n = 2$; dans $\dfrac{P(R; t, \ldots, t, t^2)}{P(R; t, \ldots, t)}$ n'interviennent que les racines positives du second type et ce polynôme vaut $\prod_{b+c\leq n-1}(1-t^{b+2c+2})/(1-t^{b+2c+1}) = (1+t)(1+t^2)\dots(1+t^n)$, comme on le voit facilement par récurrence sur n.

Quant au théorème C, observons d'abord que les conditions (I) et (II) sont celles introduites par Roth et Szekeres dans leur important article [19] ; elles sont vérifiées entre autres par les suites $a_i = f(i)$ ou $a_i = f(p_i)$, p_i désignant le i-ème nombre premier et $f(x)$ un polynôme ne prenant que des valeurs entières pour x entier et tel que pour tout nombre premier p il existe un entier x tel que p ne divise pas $f(x)$.

La méthode de démonstration du théorème C peut être adaptée dans le cas particulier du théorème d'Hughes pour supprimer la restriction $A \leq k$. Nous donnons maintenant une esquisse de la démonstration d'Odlyzko et Richmond du théorème d'Hughes.

Nous allons procéder par récurrence en posant

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x^k) = \sum_{k=0}^{n(n+1)/2} b_{n,k}x^k = (1+x^n)\sum_{k=0}^{n(n-1)/2} b_{n-1,k}\, x^k$$

d'où $b_{n,k} = b_{n-1,k} + b_{n-1,k-n}$.

Supposons que $b_{n-1,k}$ croisse avec k pour $k \leq n(n-1)/4$ puis décroisse. Il en résulte que $b_{n,k}$ croît pour $k \leq n(n-1)/4$ et décroît pour $k \geq n(n-1)/4 + n$. Il nous suffit donc de considérer l'intervalle

$$|k - \frac{n(n+1)}{4}| \leq \frac{n}{2}.$$

Nous partons de la formule intégrale :

$$\begin{aligned} b_{n,k} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{n}(1+\exp(2i\pi j\theta))e^{-2i\pi k\theta}d\theta \\ &= 2^n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(\pi i N\theta - 2\pi i k\theta)\prod_{j=1}^{n}\cos(\pi j\theta)d\theta \end{aligned}$$

où $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Ainsi, nous obtenons

$$b(m) := b_{n,\ N/2+m} = 2^{n+1}\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi m\theta)\prod_{j=1}^{n}\cos(\pi j\theta)d\theta$$

Pour montrer que $b(m)$ décroît quand $0 \leq m \leq \frac{n}{2}$, il suffit de montrer que la dérivée $b'(m)$ est négative, m étant maintenant considéré comme une variable continue. Or

$$\begin{aligned} b'(m) &= -2^{n+2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \theta sin(2\pi m\theta) \prod_{j=1}^{n} cos(\pi j\theta) d\theta \\ &= -2^{n+2}\pi \ I \end{aligned}$$

et l'intégrale I peut s'évaluer par la méthode de Laplace.

Au voisinage de 0, on a :

$$\theta \sin(2\pi m\theta) \prod_{j=1}^{n} \cos(\pi j\theta) \sim 2\pi m\theta^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{12}\theta^2 n(n+1)(2n+1)\right)$$

et cette fonction "décroît suffisamment" quand θ s'éloigne de 0, d'où

$$I \sim 2\pi m \int_0^{+\infty} \theta^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{12}\theta^2 n(n+1)(2n+1)\right) d\theta \sim Cmn^{-9/2}$$

quand n tend vers l'infini et $0 \leq m \leq \frac{n}{2}$, où $C = 2^{1/2}.3^{1/2}\pi^{-3/2}$.

En utilisant des versions numériques explicites des approximations que nous venons d'indiquer, Odlyzko et Richmond prouvent que, pour $n \geq 60$ et $0 \leq m \leq n$, $I \geq 0,368\, mn^{-9/2}$, donc $b'(m) < 0$. Ils terminent la démonstration par une vérification sur ordinateur de l'unimodalité de $\prod_{k=1}^{n} (1 + x^k)$ pour $n \leq 59$.

Terminons ce paragraphe par une conjecture dûe à Almkvist (cf. [1], où la conjecture est vérifiée pour $3 \leq n \leq 20$ et n=100, 101).

CONJECTURE. *Le polynôme* $\prod_{\nu=1}^{r} \frac{1 - t^{n\nu}}{1 - t^{\nu}}$ *est unimodal si*

a) *n est pair et $r \geq 1$;*
b) *n est impair et $r \geq 11$.*

Pour $n = 2$ on retrouve le théorème de Hughes. Notons que le coefficient de t^j dans le polynôme $\prod_{\nu=1}^{r} \frac{1 - t^{n\nu}}{1 - t^{\nu}}$ est le nombre de partitions de j en parts $\leq r$, chacune répétée moins de n fois.

4 - Solution d'une conjecture d'Erdös

Il y a deux façons naturelles de compter le nombre de facteurs premiers de l'entier positif n : avec ou sans multiplicités. On définit ainsi deux fonctions arithmétiques additives :

$$\Omega(n) = \sum_{p^\nu \| n} \nu \,;\; \omega(n) = \sum_{p | n} 1.$$

Pour étudier le comportement statistique de ces fonctions quand n décrit la suite des entiers ou la suite des entiers sans facteur carré, on introduit les lois locales :

$$\pi(x,k) := \sum_{\substack{n \le x \\ \omega(n)=k}} 1;\; \rho(x,k) := \sum_{\substack{n \le x \\ \omega(n)=k}} \mu(n)^2;\; \sigma(x,k) := \sum_{\substack{n \le x \\ \Omega(n)=k}} 1$$

et l'on observe que $\sigma(x,k) = 0$ si $k > \dfrac{\log x}{\log 2}$ et que $\pi(x,k) = \rho(x,k) = 0$ si $k > K(x)$, où $K = K(x)$ est défini par $p_1 \dots p_K \le x < p_1 \dots p_K p_{K+1}$, p_j désignant le j-ème nombre premier. On a $K(x) \sim \log x / \log\log x$ quand $x \to +\infty$, d'après le théorème des nombres premiers.

L'étude locale des fonctions "nombre de facteurs premiers" a progressé au cours du vingtième siècle, et n'est d'ailleurs pas terminée. Ainsi Landau démontrait en 1900, comme corollaire du théorème des nombres premiers :

$$\pi(x,k) \sim \rho(x,k) \sim \sigma(x,k) \sim \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!},$$

pour k fixé et x tendant vers l'infini, mettant ainsi en évidence une loi de Poisson de paramètre $\log\log x$. En 1917, Hardy et Ramanujan s'interessaient aux valeurs normales de $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ et prouvaient :

$$\sum \pi(x,k) \sim \frac{\pi^2}{6} \sum \rho(x,k) \sim \sum \sigma(x,k) \sim x,$$

x tendant vers l'infini, où les trois sommes portent sur les entiers k tels que $|k - \log\log x| \le \psi(x)\sqrt{\log\log x}$, $\psi(x)$ tendant vers l'infini avec x, arbitrairement lentement. En 1939, Erdös et Kac prouvaient le théorème central limite correspondant à cette loi des grands nombres :

$$\sum \pi(x,k) \sim \frac{\pi^2}{6} \sum \rho(x,k) \sim \sum \sigma(x,k) \sim \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

x tendant vers l'infini, où les trois sommes portent sur les entiers $k \leq \log\log x + t\sqrt{\log\log x}$, t étant un nombre réel arbitraire fixé. En 1948, Erdös démontrait la version locale de ce théorème central limite :

$$\pi(x,k) \sim \frac{\pi^2}{6}\rho(x,k) \sim \sigma(x,k) \sim \frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$\sim \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}((k-\log\log x)/\sqrt{\log\log x})^2\right),$$

x tendant vers l'infini, uniformément pour $|k - \log\log x| \leq B\sqrt{\log\log x}$, B désignant une constante positive arbitraire. Dans le même article, il démontrait le

THÉORÈME D (Erdös 1948, cf. [8]). *Pour x assez grand, les trois suites*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n)=k}} \frac{1}{n}\ ;\ \sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n)=k}} \frac{\mu(n)^2}{n} \ \textit{et} \ \sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)=k}} \frac{1}{n}$$

sont unimodales en k.

Enfin, il conjecturait l'unimodalité pour x assez grand des trois lois locales $\pi(x,k)$, $\rho(x,k)$ et $\sigma(x,k)$.

En 1953, Sathe donnait des formules asymptotiques pour ces lois locales, uniformes pour $k = O(\log\log x)$. La longueur et la complication de l'article de Sathe motivaient alors Selberg en 1954 à redémontrer ces formules plus simplement, en introduisant une méthode d'une grande fécondité (cf.[20]). L'idée est d'écrire, par exemple :

$$\pi(x,k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\left(\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)}\right) z^{-k-1}dz, \quad r>0, \tag{0}$$

le cercle $|z| = r$ étant parcouru une fois dans le sens positif. Selberg remarque alors que le polynôme générateur $\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)}$ est la fonction sommatoire de $n \mapsto z^{\omega(n)}$, fonction multiplicative de n dont la série de Dirichlet est "proche" de $\zeta(s)^z$. La méthode classique d'intégration dans le plan complexe, utilisant la formule de Perron et les propriétés connues de $\zeta(s)$, permet d'obtenir une bonne approximation de $\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)}$ puis, par un choix convenable de r, d'estimer précisément $\pi(x,k)$.

On obtient ainsi :

$$\sum_{n\le x} z^{\omega(n)} = \frac{x}{\log x}\left(zF(z)(\log x)^z + O_B((\log x)^{\mathrm{Re}\,z-1})\right) \tag{1}$$

$$\sum_{n\le x} \mu(n)^2 z^{\omega(n)} = \frac{x}{\log x}\left(zG(z)(\log x)^z + O_B((\log x)^{\mathrm{Re}\,z-1})\right) \tag{2}$$

$$\sum_{n\le x} z^{\Omega(n)} = \frac{x}{\log x}\left(zH(z)(\log x)^z + O_B((\log x)^{\mathrm{Re}\,z-1})\right) \tag{3}$$

uniformément pour $x \ge 2$ et $|z| \le B$, puis

$$\pi(x,k) = \frac{x}{\log x} F\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right)\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left(1 + \mathrm{O}_B\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right) \tag{4}$$

$$\rho(x,k) = \frac{x}{\log x} G\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right)\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left(1 + \mathrm{O}_B\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right) \tag{5}$$

$$\sigma(x,k) = \frac{x}{\log x} H\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right)\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left(1 + \mathrm{O}_B\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right) \tag{6}$$

uniformément pour $x \ge 3$ et $1 \le k \le B\ \log\log x$, où B est une constante positive arbitraire, soumise à la condition supplémentaire $B < 2$ dans le cas de (3) et (6), et

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^z \left(1+\frac{z}{p-1}\right);$$

$$G(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^z \left(1+\frac{z}{p}\right);$$

$$H(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^z \left(1+\frac{z}{p}\right)^{-1},$$

les produits portant sur l'ensemble des nombres premiers.

En 1984, Nicolas achevait pratiquement l'étude locale de $\Omega(n)$ en démontrant la formule (cf.[14]) :

$$\sigma(x,k) = C\frac{x}{2^k}\log\frac{x}{2^k} + 0\left(\frac{x}{2^k}\log^{b(\epsilon)}\left(3\frac{x}{2^k}\right)\right) \tag{7}$$

uniformément pour $(2+\epsilon)\log\log x \leq k \leq \dfrac{\log x}{\log 2}$, où

$$C = \frac{1}{4}\prod_{p\geq 3}\left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right),$$

ϵ étant un nombre positif fixé mais quelconque et $0 < b(\epsilon) < 1$.

Il faut remarquer ici la différence entre la formule (6), montrant un comportement statistique proche d'une loi de Poisson, et la formule (7), essentiellement géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En 1988, l'auteur, Delange et Nicolas montraient que (6) et (7) étaient en fait deux aspects d'une formule unique dont le terme principal est, de façon approchée, le produit de convolution d'une loi géométrique et d'une loi de Poisson. En particulier, leur résultat entraîne que :

$$\frac{\sigma(x,k+1)}{\sigma(x,k)} \sim \max\left(\frac{1}{2}, (\log\log y)/k\right) \tag{8}$$

uniformément quand $y = x2^{-k} \to +\infty$ (cf.[3]).

Dans [4], nous donnons la démonstration complète de l'unimodalité de $k \mapsto \sigma(x,k)$ pour x assez grand, en nous appuyant sur (8), sur un raffinement de la formule (6) de Sathe-Selberg (on explicite le terme $O_B\left(\dfrac{1}{\log\log x}\right)$ nous revenons plus bas sur ce point, à propos de $\pi(x,k)$), enfin sur l'argument suivant : si $k > \dfrac{\log x}{\log 3}$, tout entier n compté dans $\sigma(x,k)$ est pair et la correspondance $n \mapsto \dfrac{n}{2}$ prouve que $\sigma(x,k) \leq \sigma(x,k-1)$.

Le comportement de $\pi(x,k)$ et $\rho(x,k)$ pour les grandes valeurs de k ($\log\log x = O(k)$) s'est avéré plus difficile à appréhender. Après les travaux de Pomerance (1984, cf. [18]) et Hensley (1987, cf. [11]), Hildebrand et Tenenbaum adoptaient une nouvelle approche de la formule (0), fondée sur la méthode du col en deux variables complexes, et démontraient une formule asymptotique pour $\pi(x,k)$ dont un corollaire est (cf.[12]) :

$$\frac{\pi(x,k+1)}{\pi(x,k)} = \frac{L}{k}\left(1 + O_B\left(\frac{\log L}{L}\right)\right) \tag{9}$$

uniformément pour $1 \leq k \leq B \log x.(\log\log x)^{-2}$, $L = \log\left(\dfrac{\log x}{k\log(k+1)}\right)$.

En combinant cette formule et le résultat (4) de Sathe-Selberg, on voit qu'il existe $x_0(B)$ et une constante absolue $C > 0$ tels que, si $x \geq x_0(B)$, on ait $\pi(x,k+1) > \pi(x,k)$ pour $k \leq \log\log x - C$ et $\pi(x,k+1) < \pi(x,k)$ pour $\log\log x + C \leq k \leq B \log x.(\log\log x)^{-2}$.

Nous avons récemment pu lever les incertitudes sur le sens de variation de $\pi(x,k)$ et démontrer ainsi la conjecture d'Erdös.

THÉORÈME E(1989, cf.[5]). *Si x est assez grand, les trois suites $\pi(x,k), \rho(x,k)$ et $\sigma(x,k)$ sont unimodales en k.*

Indications sur la démonstration : L'idée essentielle est de considérer $\pi(x,k)$ comme cas particulier de la quantité $\pi(x,t,k)$, nombre des entiers $\leq x$ ayant k diviseurs premiers, tous $> t$; on a $\pi(x,k) = \pi(x, 2-\epsilon, k)$ pour tout $\epsilon > 0$. On définit de même $\rho(x,t,k)$. Ces généralisations de $\pi(x,k)$ et $\rho(x,k)$ ont l'intérêt de vérifier des équations fonctionnelles :

$$\pi(x,t,k+1) = \sum_{p>t,\alpha\geq 1} \pi\left(\frac{x}{p^\alpha}, p, k\right)$$

$$\rho(x,t,k+1) = \sum_{p>t} \rho\left(\frac{x}{p}, p, k\right)$$

qui se prêtent à un raisonnement par récurrence. Dans le cas de $\pi(x,t,k)$, ce raisonnement est compliqué par la présence des exposants $\alpha \geq 2$ (cf.[5]), c'est pourquoi nous le présentons ici pour $\rho(x,t,k)$.

Pour montrer que $\rho(x,k+1) \leq \rho(x,k)$ si $k \geq 2\log\log x + 2$ (par exemple) et x assez grand, il nous suffit de montrer l'existence d'une constante absolue positive x_0 telle que :

$$\rho(x,t,k+1) \leq \rho(x,t,k) \text{ si } x \geq x_0^{k+1},\ t \geq \exp(\exp(-1)) \text{ et } k \geq 2\log u, \tag{10}$$

où $u = \dfrac{\log x}{\log t}$.

Cette dernière assertion est elle-même une conséquence de

$$\rho(x,t,k+1) \leq \rho(x,t,k) \text{ si } x \geq x_0^{k+1},\ t \geq \exp(\exp(-1)) \text{ et } 2\log u \leq k < 2\log u + 1. \tag{11}$$

Supposons en effet (11) vérifiée et démontrons (10) par récurrence sur k. Pour $k = 0$, c'est une évidence ; si maintenant c'est vrai pour un entier $k \geq 0$, supposons $x \geq x_0^{k+2}$, $t \geq \exp(\exp(-1))$ et $k+1 \geq 2\log u$. Observons que tout terme non nul $\rho(\frac{x}{p}, p, k+1)$ de la somme

$$\rho(x,t,k+2) = \sum_{p>t} \rho(\frac{x}{p}, p, k+1)$$

doit vérifier $p^{k+1} < \frac{x}{p}$, donc $\frac{x}{p} > x^{\frac{k+1}{k+2}} \geq x_0^{k+1}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : si $k \geq 2\log u \geq 2\log\left(\frac{\log(x/p)}{\log p}\right)$, et $p > t$, on a $\rho(\frac{x}{p}, p, k+1) \leq \rho(\frac{x}{p}, p, k)$ donc

$$\rho(x,t,k+2) = \sum_{p>t} \rho(\frac{x}{p}, p, k+1) \leq \sum_{p>t} \rho(\frac{x}{p}, p, k) = \rho(x,t,k+1).$$

Il reste donc le cas où $2\log u \leq k+1 < 2\log u + 1$, cas auquel l'assertion (11) s'applique directement.

Pour démontrer (11), on utilise des travaux d'Alladi sur le comportement asymptotique de $\rho(x,t,k)$ quand $k = O(\log u)$. Par la méthode de Selberg quand t est "petit" et par la méthode de l'équation fonctionnelle quand t est "grand", on obtient :

$$\rho(x,t,k) \sim g(r,t)\frac{x}{\log x}\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{12}$$

quand x tend vers l'infini, uniformément pour $\exp(-1) \leq \log t \leq (\log x)^{C_1}$ et $k << \log u$, où $r = \frac{k-1}{\log u}$, et

$$g(r,t) = \frac{1}{\Gamma(r+1)}\left\{(\log t)^r \prod_{p\leq t}\left(1-\frac{1}{p}\right)^r\right\}\prod_{p>t}\left(1-\frac{1}{p}\right)^r\left(1+\frac{r}{p}\right),$$

C_1 étant une constante positive absolue ;

$$\rho(x,t,k) \sim \frac{x}{\log x} f_k(u) \quad \text{quand } x \text{ tend vers l'infini,} \tag{13}$$

uniformément pour $(\log x)^{C_1} < \log t < \frac{1}{k}\log x$ et $k << \log u$, où $f_k(u)$ est définie par récurrence :

- $f_1(u) = 1$ pour $u > 1$
- $f_{k+1}(u) = \int_k^{u-1} f_k(v)\frac{dv}{v}$ pour $u > k+1$.

Une démonstration élémentaire montre que $(\log u) f_k(u) \geq k f_{k+1}(u)$ et on déduit alors de (12) et (13) que

$$\limsup_{x \mapsto +\infty} \frac{\rho(x,t,k+1)}{\rho(x,t,k)} \leq \frac{1}{2},$$

uniformément pour $\exp(\exp(-1)) < t < x^{\frac{1}{k+1}}, 2\log u \leq k < 2\log u + 1$, ce qui prouve (11).

Pour supprimer l'incertitude sur le sens de variation de $\pi(x,k)$ dans l'intervalle $|k - \log\log x| < C$, on procède comme dans [4]. Le lemme principal est le suivant :

LEMME. *Soit $J(z)$ une fonction holomorphe pour $|z| \leq R$. Posons*

$$J(z)e^{tz} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t) z^k \; pour |z| \leq R.$$

Nous avons alors :

$$a_k(t) = \frac{t^k}{k!}\left\{H(\rho) - \frac{1}{2}\frac{\rho H"(\rho)}{t} + O\left(\frac{M}{t^2}\right)\right\}$$

uniformément pour $t > 0$ et $0 \leq k \leq Rt$, où $\rho = \dfrac{k}{t}$ et

$$M = \max_{|s| \leq R}(|sH'''(s)|) + \max_{|s| \leq R}(|s^2 H^{(4)}(s)|).$$

On en déduit, comme dans [4], l'existence d'une constante absolue D telle que, si

$$A_x = \log\log x + F'(1) - \frac{D}{\log\log x}$$

$$\text{et} \qquad B_x = \log\log x + F'(1) + \frac{D}{\log\log x},$$

alors $\pi(x,k+1) > \pi(x,k)$ si $k < A_x$

et $\pi(x,k+1) > \pi(x,k)$ si $k > B_x$, $|k - \log\log x| \leq C$.

Si x est assez grand, l'intervalle $[A_x, B_x]$ contient au plus un entier et cela suffit à assurer l'unimodalité de $\pi(x,k)$.

Remarquons ici que

$$\frac{F'(1)}{F(1)} = -\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} + \sum_p \left\{\log\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right\}$$

donc

$$F'(1) = \gamma - 1 + \sum_p \left\{\log\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right\} = B_1 - 1.$$

Or on sait que $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + B_1 + O(\frac{1}{\log x})$, donc il existe une constante absolue D_1 telle que

$$A_x \geq \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} - \frac{D_1}{\log\log x} - 1, \quad B_x \leq \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} + \frac{D_1}{\log\log x} - 1$$

En particulier, si la distance de $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}$ à l'entier le plus proche est supérieure à $\frac{D_1}{\log\log x}$, l'intervalle $[A_x, B_x]$ ne contient aucun entier et $\pi(x,k)$ atteint son maximum en $k_0 = [A_x] + 1 = \left[\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}\right]$, résultat que nous pouvons énoncer de la manière suivante :

PROPOSITION. *Il existe une constante absolue E telle que, si*

$$(\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}) \cdot \| \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} \| \geq E,$$

alors la suite $k \mapsto \pi(x,k)$ atteint son maximum en $k_0 = \left[\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}\right]$.

Terminons ce paragraphe par une liste de questions.

1. Des expériences sur ordinateur semblent indiquer que $\pi(x,k), \rho(x,k)$ et $\sigma(x,k)$ sont unimodales dès que $x \geq 1$: est-ce vrai ?

2. Ces trois suites sont-elles log-concaves ?

3. Notons

$$\Pi(x,k) = \{n; 1 \leq n \leq x \text{ et } \omega(n) = k\};$$
$$P(x,k) = \{n; 1 \leq n \leq x, n \text{ sans facteur carré, et } \omega(n) = k\}$$
$$\Sigma(x,k) = \{n; 1 \leq n \leq x \text{ et } \Omega(n) = k\}.$$

Pour k assez grand relativement à x, les inégalités $\sigma(x,k) \leq \sigma(x,k-1), \pi(x,k) \leq \pi(x,k-1)$, et $\rho(x,k) \leq \rho(x,k-1)$ ont des interprétations combinatoires : on peut construire une injection i_k de $\Pi(x,k)$ dans $\Pi(x,k-1)$ (resp. de $P(x,k)$ dans $P(x,k-1)$, resp. de $\Sigma(x,k)$ dans $\Sigma(x,k-1)$) telle que $i_k(n)$ soit toujours un diviseur de n.

Quelle est la valeur $K_1(x)$ (resp. $K_2(x)$, resp. $K_3(x)$) de plus petit k tel qu'une injection i_k existe ? On a vu que $K_3(x) \leq \left[\frac{\log x}{\log 3}\right] + 1$ et on peut montrer que $K_1(x)$ et $K_2(x)$ sont $\leq \frac{\log x}{\log\log x}\left(1 + \frac{1 - \log 2 + o(1)}{\log\log x}\right)$ (cf. [5]).

4. Peut-on étendre le domaine de validité de la relation (9) de Hildebrand et Tenenbaum ?

5. Les suites $\pi(x,t,k)$, $\rho(x,t,k)$ et $\sigma(x,t,k)$ (définie par $\sigma(x,t,k) = \sharp\{n; 1 \leq n \leq x,\ \Omega(n) = k \text{ et } (p|n) \Rightarrow (p \geq t)\}$) sont-elles unimodales pour tout x et tout t ? Dans ce contexte, signalons comme exercice pour le lecteur que pour tout $u > 1$, la suite $k \longmapsto f_k(u), 1 \leq k < u$, est log-concave.

6. Le calcul que nous avons présenté pour $|k - \log\log x| << 1$ prouve que si x est assez grand $\pi(x,k)$ atteint son maximum en une ou deux valeurs de k ; nous dirons qu'il y a un pic ou un plateau. Pour combien d'entiers $y \leq x$, $\pi(y,k)$ a-t-elle un plateau ? Existe-t-il pour tout entier $\ell \geq 0$ un entier x_ℓ tel que $\pi(x_\ell + j, k)$ ait un plateau pour $j = 0, \ldots, \ell$? Les mêmes questions peuvent être posées à propos de $\rho(x,k)$ et de $\sigma(x,k)$.

7. Comparer la ou les valeurs de k rendant $\pi(x,k)$ maximum avec la valeur de ℓ rendant $\sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) = \ell}} \frac{1}{n}$ maximum (cf. [8]).

Bibliographie

1. G. ALMKVIST, *Proof of a conjecture about unimodal polynomials*, J. of Number Theory **32** (1989), 43–57.

2. G.E. ANDREWS, *The theory of partitions*, Addison-Wesley (1976), Reading.

3. M. BALAZARD, H. DELANGE et J.-L. NICOLAS, *Sur le nombre de facteurs premiers des entiers*, C.R.A.S. **306 série I** (1988), 511–514.

4. M. BALAZARD, *Comportement statistique du nombre de facteurs premiers des entiers*, Séminaire de Th. des Nombres, Paris 1987-1988, (1990), 1–21, Birkhaüser.

5. M. BALAZARD, *Unimodalité de la distribution du nombre des diviseurs premiers d'un entier*. A paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

6. L. COMTET, Analyse combinatoire (1970), P.U.F, Paris.

7. S. DHARMADIKARI et K. JOAG-DEV, Unimodality, convexity and applications (1988), Academic Press, New-York.

8. P. ERDŐS, *On the integers having exactly k prime factors*, Annals of Math. **49** (1948), 53–66.

9. P. ERDŐS et G. TENENBAUM, *Sur les densités de certaines suites d'entiers*, Proc. London Math. Soc. **(3)59** (1989), 417–438.

10. H. GERBER et J. KEILSON, *Some results for discrete unimodality*, J. Amer. Statist. Assoc. **66** (1971), 386-389.

11. D. HENSLEY, *The distribution of round numbers*, Proc. London Math. Soc. (3) **54** (1987), 412-444.

12. A. HILDEBRAND et G. TENENBAUM, *On the number of prime factors of an integer*, Duke Math. J. **56** (1988), 471–501.

13. J.W. HUGHES, *Lie algebraic proofs of some theorems on partitions*, Number Theory and Algebra (H. Zassenhaus, ed.) (1977), Academic Press, New-York.

14. J.-L. NICOLAS, *Sur la distribution des entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers*, Acta Arith. **44** (1984), 191–200.

15. A.M. ODLYZKO et L.B. RICHMOND, *On the compositions of an integer*, Combinatorial Mathematics VII. Proceedings (1979), 199–210, (R.W. Robinson et al. ed.). Springer Lecture Notes 829.

16. A.M. ODLYZKO et L.B. RICHMOND, *On the unimodality of some partition polynomials*, Europ. J. Combinatorics **2** (1982), 69–84.

17. A.M. ODLYZKO et L.B. RICHMOND, *On the unimodality of high powers of discrete distributions*, Annals of Probability **13** (1985), 299–306.

18. C. POMERANCE, *On the distribution of round numbers*, Number Theory (K. Alladi ed.), (Proc. Ootacamund, India, 1984), 173–200, Springer Lecture Notes 1122.

19. K.F. ROTH et G. SZEKERES, *Some asymptotic formulae in the theory of partitions*, Quart. J. Math. Oxford (2) **5** (1954), 241–259.

20. A. SELBERG, *Note on a paper by L.G. Sathe*, J. Indian Math. Soc. **18** (1954), 83–87.

21. R.P. STANLEY, *Unimodal sequences arising from Lie algebras*, Alfred Young Day Proceedings (T.V. Narayona, R.M. Mathsen and J.G. Williams eds.) (1980), Marcel Dekker, New-York.

22. R.P. STANLEY, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatories*

and geometry, Prépublication.

23. G. SZEKERES, *Some asymptotic formulae in the theory of partitions (II)*, Quart. J. Math. Oxford (2) **4** (1953), 96–111.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences,
123, avenue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex, FRANCE.