JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN-PAUL ALLOUCHE

Sur la transcendance de la série formelle Π

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2^e série, tome 2, n^o 1 (1990), p. 103-117

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1990__2_1_103_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **2** *(1990), 103-117*

Sur la transcendance de la série formelle Π.

par JEAN-PAUL ALLOUCHE

Résumé — *En utilisant le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, nous donnons une démonstration élémentaire de la transcendance de la série formelle* Π *ainsi que d'autres séries formelles à coefficients dans un corps fini*

Abstract — *Using the theorem of Christol, Kamae, Mendès France and Rauzy, we give an elementary proof of the transcendence of the formal power series* Π *as well as the transcendence of other formal power series with coefficients in a finite field.*

En 1935 Carlitz introduisit dans [5] (voir aussi [6]) deux fonctions définies pour des séries formelles sur un corps fini et notées ψ et λ. Ces fonctions ressemblent un peu à l'exponentielle et au logarithme. Il introduisit aussi une fonction définie pour des arguments entiers naturels, et à valeurs dans les séries formelles sur un corps fini. Cette troisième fonction est aujourd'hui notée ζ et appelée fontion zéta de Carlitz.

On peut se demander pour quelles valeurs des arguments ces fonctions prennent des valeurs transcendantes (transcendant signifie ici transcendant sur le corps des fractions rationnelles sur le corps fini de base) ; cette question a été abordée par plusieurs auteurs (Wade [15], [16], [19], Damamme [11], Hellegouarch [12], Yu [20], [21] et [22]). L'une des quantités intéressantes, notée ξ_∞ ou Π, qui intervient à la fois dans l'étude de la fonction ψ et de la fonction ζ, est transcendante (voir [15] ou [16]). Pour démontrer la transcendance de Π, ou celle d'autres séries formelles étudiées dans ce contexte, la méthode utilisée est de supposer la série algébrique, d'en déduire (un peu comme dans le cas de la transcendance sur $\mathbf{Q}$) une égalité du type $I + Q = 0$, où I est "entier" (ici cela signifie I est un polynôme), et Q "très petit" (ici cela signifie de degré négatif) ; on a donc $I = Q = 0$, et il reste à prouver que I est non nul pour arriver à une contradiction... Notons aussi que des mesures d'irrationalité de valeurs de la fonction zéta de Carlitz sur $\mathbf{F}_2[T]$ (et en particulier de Π) sont données par Chérif dans [7].

Nous nous proposons dans cet article, en utilisant le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [8], de donner une preuve élémentaire de

Manuscrit reçu le 10 avril 1989.

la transcendance de la série formelle Π, ainsi que de certaines autres séries étudiées par les auteurs précités.

1. Rappels :

Dans ce qui suit on note $\mathbf{F}_q$ le corps de cardinal q, où $q = p^s$ et p est la caractéristique du corps. On note $\mathbf{F}_q[x]$ l'anneau des polynômes en x sur $\mathbf{F}_q$, et $\mathbf{F}_q(x)$ le corps des fractions rationnelles en x. Enfin on pose $\mathbf{F}_q[[\frac{1}{x}]] = \{\sum_{k\geq 0} a_k x^{-k} ; a_k \in \mathbf{F}_q\}$, $\mathbf{F}_q((\frac{1}{x})) = \{\sum_{k\geq k_0} a_k x^{-k} ; a_k \in \mathbf{F}_q ; k_0 \in \mathbb{Z}\}$, et $\mathcal{F} = \bigcup_{m\geq 1} \mathbf{F}_q\left(\left(\frac{1}{x^{1/m}}\right)\right)$. Pour plus de détails sur ce qui suit le lecteur pourra se reporter à [5] et [6] (ou [15] et [16]).

1) Définitions :

On note avec Carlitz [5] pour k entier naturel :

$$[k] = x^{q^k} - x$$
$$F_k = [k][k-1]^q[k-2]^{q^2}\ldots[1]^{q^{k-1}}$$
$$L_k = [k][k-1]\ldots[1]$$
$$F_0 = L_0 = 1.$$

DÉFINITION 1. *On définit deux fonctions ψ et λ par*

$\psi(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{F_j} t^{q^j}$ *pour t élément de $\mathcal{F}$,*

$\lambda(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^{q^j}}{L_j}$ *pour t élément de $\mathcal{F}$ de degré inférieur ou égal à 1*

(si $t = \sum_{k\geq k_0} a_k x^{-k/m}$, avec $a_{k_0} \neq 0$, on appelle degré de t le nombre $-k_0/m$).

On a les propriétés suivantes, [5] et [6] :

* ψ est linéaire, c'est-à-dire $\psi(t + cu) = \psi(t) + c\psi(u)$, $\forall t, u \in \mathcal{F}$, $\forall c \in \mathbf{F}_q$,

* $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = E\xi$ où $E \in \mathbf{F}_q[x]$,

la quantité ξ est définie par

$$\xi = (x^q - x)^{1/q-1}\xi_\infty, \text{ avec } \xi_\infty = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\right),$$

(ξ_∞ est notée aussi Π par analogie avec le réel $\Pi = 3,14159...$, ψ jouant un peu le rôle de l'exponentielle),

* $\psi(t + \xi E) = \psi(t)$, $\forall t \in \mathcal{F}$, $\forall E \in \mathbf{F}_q[x]$,
* λ peut être défini pout tout u dans $\mathcal{F}$, et l'on a
- λ est linéaire,
- λ est l'inverse de ψ.

DÉFINITION 2. *On définit la fonction ζ par : pour tout entier $m \geq 1$, $\zeta(m) = \sum_{P \in \mathbf{F}_q[x]}{}' \frac{1}{P^m}$, où $\sum'$ signifie que la somme est restreinte aux polynômes de coefficient directeur égal à 1.*

on a la propriété ([5] et [6]) :

⋆ si $q - 1$ divise m, alors $\zeta(m) = \xi^m r_m$, où $r_m \in \mathbf{F}_q(x)$.

2) Propriétés de transcendance :

Wade a donné dans [16], [17] et [19] plusieurs propriétés de transcendance que nous résumons ci-dessous :

⋆ Si α est un élément de $\mathcal{F}$ algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$, et $\alpha \neq 0$, alors $\psi(\alpha)$ et $\lambda(\alpha)$ sont transcendants.

⋆ Si α est non nul et β un élément de $\mathcal{F}$ qui n'appartient pas à $\mathbf{F}_q(x)$, alors l'un des trois nombres $\alpha, \beta, \psi(\beta\lambda(\alpha))$ est transcendant. Si α est nul et si l'on remplace $\lambda(0)$ par $E\xi$ (avec $E \in \mathbf{F}_q[x] - \{0\}$), alors la conclusion reste vraie.

Il résulte de la première assertion que ξ est transcendant, ce qui implique que $\zeta(m)$ est transcendant si $q - 1$ divise m. Récemment Damamme a montré l'irrationalité de $\zeta(m)$ pour $1 \leq m \leq q$, ([11]), puis Damamme et Hellegouarch ont montré la transcendance de $\zeta(m)$ pour $1 \leq m \leq q^2$, ([12]). Enfin Yu (voir [20], [21] et [22]) a prouvé :

⋆ $\zeta(m)$ est transcendant quel que soit l'entier $m \geq 1$; de plus, si $q - 1$ ne divise pas m, alors $\zeta(m)\xi^{-m}$ est transcendant.

2. Une preuve élémentaire de la transcendance des séries ξ et Π :

Nous nous proposons de prouver la transcendance des séries formelles ξ et Π de façon élémentaire en utilisant le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [8]. L'une des manières d'énoncer ce théorème est de dire que la série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n x^{-n}$, à coefficients dans $\mathbf{F}_q$, est algébrique

sur $\mathbf{F}_q(x)$ si et seulement si l'ensemble des sous-suites

$$\{n \to a_{q^k n+r}; k \geq 0; 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est fini (voir [8], ou [2]).

Comme $\xi = (x^q - x)^{1/q-1}\xi_\infty = (x^q - x)^{1/q-1}\Pi$, il suffit de montrer la transcendance de

$$\xi_\infty = \Pi = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\right) = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^{q^j} - x}{x^{q^{j+1}} - x}\right)$$
$$= \prod_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^{q^j} - x}{x^{q^{j+1}} - x}\right).$$

Posons $\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}\right)$. Il est clair que α est un élément de $\mathbf{F}_q[[\frac{1}{x}]]$, algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$ car

$$\alpha^q = \prod_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}\right)^q = \prod_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^{q^{j+1}}}{x^{q^{j+2}}}\right) = \alpha\left(1 - \frac{x}{x^q}\right)^{-1}.$$

Pour montrer la transcendance de Π, il suffit donc de montrer la transcendance de $\frac{\alpha}{\Pi}$. Mais l'on a

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^{q^{j+1}-1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n)x^{-n},$$

où $a(n) = 0$ si n n'est pas de la forme $\sum_{j\in J}(q^j - 1)$ pour un ensemble d'indices J fini, et $a(n) = (-1)^{cardJ}$ si $n = \sum_{j\in J}(q^j - 1)$, (si une telle décomposition existe, elle est unique). Il suffit donc de montrer que l'ensemble de suites $\{a(q^k n + r); k \geq 0; 0 \leq r \leq q^k - 1\}$ est infini ; il suffit même de montrer que l'ensemble des suites

$$\{|a(q^k n + r)|; k \geq 0; 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est infini. On remarque alors que $b(n) = |a(n)|$ est la fonction caractéristique de l'ensemble d'entiers

$$W = \{n \in \mathbf{N}; n = \sum_{k=0}^{+\infty} \epsilon_k(q^k - 1); \epsilon_k = 0 \text{ ou } 1; \epsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand}\}$$

Dans le cas où $q = 2$, on a déjà montré dans [4] que la fonction indicatrice de W n'est pas q-automatique, en prouvant que l'ensemble des sous-suites $\{|a(q^k n + r)|; k \geq 0; 0 \leq r \leq q^k - 1\}$ est infini. Nous allons reprendre l'idée de Shallit utilisée dans [4], en en donnant une généralisation un peu différente de celles proposées dans [4].

1) LEMME. *Soit $s_q(n)$ la somme des chiffres de l'entier n écrit en base q, soit g la fonction définie par $g(m) = m - s_q(m)$. Alors*

- ⋆ $\forall n \in \mathbf{N} \quad s_q(n+1) - s_q(n) \leq 1$,
- ⋆ *la fonction g est croissante au sens large,*
- ⋆ *quel que soit l'entier m, on a $g(m) \geq 0$.*

- la première assertion se montre en prouvant par récurrence sur l que l'on a

$$s_q(n+1) - s_q(n) \leq 1, \text{ pour } n \in [0, q^l - 1].$$

Pour $l = 0$, c'est clair ; supposons le résultat vrai pour l, et soit $n \in [q^l, q^{l+1} - 1]$, alors on écrit $n = qu + v$, $0 \leq v \leq q - 1$, d'où $u \leq q^l - 1$.

On distingue deux cas :

$$\begin{aligned}
\text{si } v \leq q-2, \text{ alors } s_q(n+1) - s_q(n) &= s_q(qu + (v+1)) - s_q(qu+v) \\
&= s_q(u) + v + 1 - s_q(u) - v \\
&= 1, \\
\text{si } v \leq q-1, \text{ alors } s_q(n+1) - s_q(n) &= s_q(q(u+1)) - s_q(qu + (q-1)) \\
&= s_q(u+1) - s_q(u) - (q-1) \\
&\leq s_q(u+1) - s_q(u) \leq 1 \\
&\text{(d'après l'hypothèse de récurrence).}
\end{aligned}$$

- Pour démontrer la seconde assertion, on remarque que, si $0 \leq y \leq q-1$, alors :

$$g(qx + y) = qx + y - s_q(qx + y) = qx + y - s_q(qx) - y = g(qx).$$

Il suffit donc de prouver que :

$$\forall x \geq 0 \text{ on a } g(q(x+1)) - g(qx) \geq 0.$$

Mais

$$\begin{aligned}
g(q(x+1)) - g(qx) &= q(x+1) - s_q(x+1) - qx - s_q(x) \\
&= q - (s_q(x+1) - s_q(x)) \\
&\geq q - 1 > 0.
\end{aligned}$$

- La dernière assertion résulte de la seconde et de ce que $g(0) = 0$.

2) PROPOSITION. *Soit*

$$W = \{n \in \mathbf{N}; n = \sum_0^\infty \epsilon_k(q^k - 1); \epsilon_k = 0 \text{ ou } 1; \epsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand}\},$$

et soit b la fonction indicatrice de W ($b(n) = 1$ si $n \in W$, $b(n) = 0$ si $n \notin W$). Soit b_k la suite définie par $b_k(n) = b(q^k n + q^k - k)$. Alors

$$\forall k \geq 2 \qquad b_k(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq n < \dfrac{q^k - 1}{q - 1} - 1, \\ 1 \text{ si } n = \dfrac{q^k - 1}{q - 1} - 1. \end{cases}$$

On remarque d'abord que

$n \in W \Leftrightarrow \exists m \in \mathbf{N}$ tel que $n = g(m)$ et m n'a que des 0 et des 1 en base q.

(si $n = \sum_0^\infty \epsilon_k(q^k - 1)$, on prend $m = \sum_0^\infty \epsilon_k q^k$) ;

on remarque aussi que $k \geq 2 \Rightarrow q^k > k$.

- Soit $n = \dfrac{q^k - 1}{q - 1} - 1 = (1 + q + \cdots + q^{k-1}) - 1$.

On a $b_k(n) = b(q^k(n+1) - k) = b(q^k + q^{k+1} + \ldots q^{2k-1} - k)$. Si on pose $m = q^k + q^{k+1} + \cdots + q^{2k-1}$, alors m n'a que des 0 et des 1 en base q et $g(m) = m - k$, ce qui montre que $q^k(n+1) - k$ est dans W donc que $b_k(n) = b(q^k(n+1) - k) = 1$.

- Soit $0 \leq n < \frac{q^k - 1}{q-1} - 1$. Nous allons montrer que $q^k(n+1) - k$ n'est pas de la forme $n = g(m)$ pour un m n'ayant que des 0 ou des 1 en base q, ce qui impliquera $b_k(n) = b(q^k(n+1) - k) = 0$.

Supposons au contraire qu'il existe un tel m, et écrivons

$$m = q^k u + v, \ 0 \leq v \leq q^k - 1.$$

Remarquons que u et v n'ont que des 0 et des 1 en base q.

On distingue alors trois cas :

$\star$ si $u \leq n < \frac{q^k - 1}{q-1} - 1$, on a :

$$g(m) = g(q^k u + v) = q^k u + v - s_q(u) - s_q(v) \leq q^k u + v - s_q(v) = q^k u + g(v)$$

d'où

$g(m) \leq q^k u + g(q^k - 1) \leq q^k n + q^k - 1 - k(q-1) \leq q^k n + q^k - 1 - k$

et donc

$g(m) < q^k n + q^k - k,$

$\star$ si $n+1 \leq u < \frac{q^k-1}{q-1} = 1 + q + \cdots + q^{k-1}$, alors :

$s_q(u) < k$ (rappelons que u n'a que des 0 ou des 1 en base q),

d'où

$g(m) = q^k u + v - s_q(u) - s_q(v) = q^k u - s_q(u) + g(v) > q^k(n+1) - k,$

$\star$ si $u \geq \frac{q^k-1}{q-1}$, alors on a :

$g(m) = g(q^k u + v) \geq g(q^k u) \geq g\left(q^k\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right)$. Mais

$g\left(q^k\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)\right) = q^k\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right) - k > q^k(n+1) - k,$

et donc

$g(m) > q^k(n+1) - k.$

3) fin de la preuve de la transcendance de la série formelle Π :

Il résulte de la proposition ci-dessus que l'ensemble de suites

$$\{n \to b(q^k n + q^k - k); k \geq 2\}$$

est infini puisque toutes les suites $(b_k(n))$ sont distinctes. L'ensemble de suites $\{n \to b(q^k n + r); k \geq 0; 0 \leq r \leq q^k - 1\}$ est a fortiori infini, ce qui achève la démonstration.

Remarque :

Dans le cas où q est égal à 2, la suite $(b(n))$, indicatrice de l'ensemble W, a été étudiée dans [4], où il est montré qu'elle est liée à la définition de Von Neumann des entiers naturels. Il est aussi prouvé que cette suite est engendrée par la substitution $1 \to 110$, $0 \to 0$. Dans le cas où q est quelconque, nous n'avons pas trouvé de substitution qui engendre la suite b.

3. Une preuve élémentaire de la transcendance de la "série des crochets" :

Dans [15] Wade s'intéresse aussi à la "série des crochets", ("bracket series"), $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{[k]}$, et montre qu'elle est transcendante sur $\mathbf{F}_q(x)$. Nous nous

proposons de donner ici une preuve élémentaire d'un résultat légèrement plus général :

THÉORÈME. *Soit* $(\alpha(k))$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{F}_q$ *telle que*

$\exists N \in \mathbf{N}$, $\forall \bar{\omega}$ *premier,* $\bar{\omega} \geq N$, $\exists j = j(\bar{\omega}) \geq 2$ *tel que* $\alpha(\bar{\omega}^j) \neq 0$ *(c'est par exemple le cas si* $(\alpha(k))$ *est une suite à valeurs dans* $\mathbf{F}_q^*$*). La série :* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(k)}{[k]}$ *est transcendante sur* $\mathbf{F}_q(x)$.

En effet, on a successivement :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(k)}{[k]} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(k)}{x^{q^k} - x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(k)}{x^{q^k}} \frac{1}{1 - (\frac{1}{x})^{q^k - 1}} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(k)}{x^{q^k}} \sum_{m=0}^{+\infty} (\frac{1}{x})^{m(q^k-1)} \\
&= \sum_{\substack{k \geq 1 \\ m \geq 0}} \alpha(k) (\frac{1}{x})^{m(q^k-1)+q^k} \\
&= (\frac{1}{x}) \sum_{\substack{k \geq 1 \\ m \geq 1}} \alpha(k) (\frac{1}{x})^{m(q^k-1)}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(k)}{[k]} &= (\frac{1}{x}) \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{x})^n \sum_{\substack{k,m \geq 1 \\ m(q^k-1)=n}} \alpha(k) \\
&= (\frac{1}{x}) \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{x})^n \sum_{(q^k-1)|n} \alpha(k).
\end{aligned}$$

Si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(k)}{[k]}$ était algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$, la suite $c(n) = \sum_{(q^k-1)|n} \alpha(k)$ serait q-automatique ([8]), et donc la sous-suite $(c(q^n-1))$ serait ultimement périodique (voir par exemple [1]).

Mais $c(q^n - 1) = \sum_{(q^k-1)|(q^n-1)} \alpha(k)$, et il est bien connu que $q^k - 1$ divise $q^n - 1$ si et seulement si k divise n, on a donc

$$c(q^n - 1) = \sum_{k|n} \alpha(k).$$

Si cette suite était ultimement périodique, on aurait :

$$\exists T \geq 1 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \sum_{k|n} \alpha(k) = \sum_{k|n+T} \alpha(k),$$

d'où

$$\exists T \geq 1 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall r \geq 1 \sum_{k|n} \alpha(k) = \sum_{k|n+rT} \alpha(k),$$

mais ceci implique

$$\exists T \geq 1 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall r \geq 1 \sum_{k|n} \alpha(k) = \sum_{k|n(1+rT)} \alpha(k).$$

Prenons r tel que $1 + rT = \bar{\omega}$ soit un nombre premier supérieur ou égal à $sup(n_0, N)$, (c'est possible car il y a une infinité de nombres premiers de la forme $1 + rT$), soit $j = j(\bar{\omega})$ donné par l'hypothèse sur la suite $(\alpha(k))$; prenons $n = (1 + rT)^{j-1}$, on a donc :

$$\sum_{k|\bar{\omega}^{j-1}} \alpha(k) = \sum_{k|\bar{\omega}^{j}} \alpha(k),$$

autrement dit

$$\sum_{i=0}^{j-1} \alpha(\bar{\omega}^i) = \sum_{i=0}^{j} \alpha(\bar{\omega}^i),$$

d'où $\alpha(\bar{\omega}^j) = 0$ ce qui n'est pas.

Remarques :

- On arrive à la même conclusion si l'on suppose que la suite $(\alpha(k))$ vérifie la condition :

$\exists P \in \mathbb{N}, \quad \forall a \geq P, \forall b \geq P \quad a \neq b$ et a et b premiers $\Rightarrow \alpha(b) + \alpha(ab) \neq 0$.

En effet, si la suite $c(q^n - 1)$ est ultimement périodique, on arrge comme précédemment à :

$$\exists T \geq 1 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall r \geq 1 \quad \sum_{k|n} \alpha(k) = \sum_{k|n(1+rT)} \alpha(k).$$

On prend alors r tel que $1 + rT = b$ soit un nombre premier supérieur ou égal à N et $n = a$ un nombre premier supérieur à $\sup(n_0, N, b + 1)$. On a donc :

$$\sum_{k|a} \alpha(k) = \sum_{k|ab} \alpha(k),$$

c'est-à-dire

$$\alpha(1) + \alpha(a) = \alpha(1) + \alpha(a) + \alpha(b) + \alpha(ab)$$

d'où

$\alpha(b) + \alpha(ab) = 0$, ce qui n'est pas.

- Si l'on prend pour α des fonctions arithmétiques classiques, réduites modulo p, le théorème ou la remarque ci-dessus s'applique le plus souvent, par exemple :

Si $\alpha(n) = card\{d; d|n\}$ la remarque s'applique si la caractéristique p du corps $\mathbf{F}_q$ est différente de 2 et 3.

Si $(\alpha(n))$ est la fonction indicatrice des n premiers, la remarque s'applique aussi.

En revanche, si l'on prend $\alpha(n) = (\mu(n))$ (la fonction de Möbius) la suite $\sum_{k|n} \alpha(k) = \sum_{k|n} \mu(k)$ est ultimement périodique (c'est 0 dès que $n \geq 2$) et on ne peut pas conclure.

- Il apparaît néanmoins raisonnable de conjecturer que le théorème reste vrai si une infinité de $\alpha(k)$ sont non nuls.

4. Complément :

Dans un article datant de 1944, Wade établit la transcendance d'autres séries formelles [17] : si G est un polynôme dans $\mathbf{F}_q[x_1, \ldots, x_e]$, non constant, alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{G^{r^k}}$ est transcendante (sur $\mathbf{F}_q(x_1, \ldots, x_e)$) si et seulement si r n'est pas une puissance de p (rappelons que $q = p^s$). De plus la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{G^{k^r}}$ est toujours transcendante pour $r \geq 2$.

Nous nous proposons de démontrer ici de façon différente un résultat un peu plus général : nous allons utiliser à nouveau le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [8], ainsi que des résultats de Cobham (voir [9] et [10]), et finalement une remarque déjà faite dans [3].

1) PROPOSITION. *Soit $q = p^s$, où p est un nombre premier ; soit $r \geq 2$ un entier. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^{r^k}}$ est transcendante sur $\mathbf{F}_q(x)$ si et seulement si r*

n'est pas une puissance de p. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^{k^r}}$ *est transcendante sur* $\mathbf{F}_q(x)$.

On écrit en effet : $\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{x})^{r^k} = \sum_{n\geq 1} u(n)x^{-n}$, où $u(n)$ est la fonction caractéristique des entiers qui sont une puissance entière de r. Cette série est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$ si et seulement si la suite $(u(n))$ est q-automatique ([8]). Mais la suite $(u(n))$ est r-automatique et non ultimement périodique (voir [10]), elle ne peut être aussi q-automatique que si q et r sont multiplicativement dépendants ([9]), c'est-à-dire si $(Logq)/(Logr)$ est rationnel, et ceci équivaut au fait que r est une puissance de p. Pour la seconde série, on écrit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{x})^{k^r} = \sum_{n\geq 1} v(n)x^{-n}$$

où $v(n)$ est la fonction caractéristique des entiers qui sont des puissances $r^{\text{èmes}}$. La suite $(v(n))$ n'est pas automatique pour $r \geq 2$, d'après [10] (le résultat y est énoncé pour $r = 2$, mais la démonstration est valable pour r quelconque supérieur ou égal à 2), et donc ([8]) la série $\sum_{n\geq 1} v(n)x^{-n}$ est transcendante sur $\mathbf{F}_q(x)$.

2) THÉORÈME. *Soit* $G(x_1,\ldots,x_e)$ *un élément de* $\mathbf{F}_q((x_1^{-1},\ldots,x_e^{-1}))$, *de partie polynomiale en les* x_j *non constante. Si* G *est algébrique sur* $\mathbf{F}_q(x_1,\ldots,x_e)$, *et si* r *est un entier supérieur ou égal à 2, on a :*

-la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{G})^{r^k}$ *est transcendante sur* $\mathbf{F}_q(x_1,\ldots,x_e)$ *si et seulement si* r *n'est pas une puissance de p.*

- la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{G})^{k^r}$ *est transcendante sur* $\mathbf{F}_q(x_1,\ldots,x_e)$.

Si r est une puissance de p, la première série est clairement algébrique sur $\mathbf{F}_q(x_1,\ldots,x_e)$ (l'élever à la puissance q^d pour d convenable et comparer à la série initiale).

Pour montrer que la première série est transcendante dans le cas où r n'est pas une puissance de p, et que la seconde est transcendante, nous allons montrer qu'on peut passer de X à G par des considérations purement algébriques, en reprenant une idée utilisée dans [3].

Soit I le sous-ensemble de $\{1,\ldots,e\}$ des indices des variables x_i qui figurent effectivement dans G. Alors G est algébrique sur le corps $\mathbf{F}_q((x_i)_{i\in I})$.

Comme G est non constante, le cardinal de I est au moins égal à 1. Soit $\widehat{I}$ un sous-ensemble de I obtenu en enlevant à I un élément k. Par construction de I, G est transcendante sur $\mathbf{F}_q((x_i)_{i\in\widehat{I}})$ car elle est non constante sur ce corps. Posons $L = \mathbf{F}_q((x_i)_{i\in\widehat{I}})$, de sorte que $\mathbf{F}_q((x_i)_{i\in I}) = L(x_k)$.

Notons

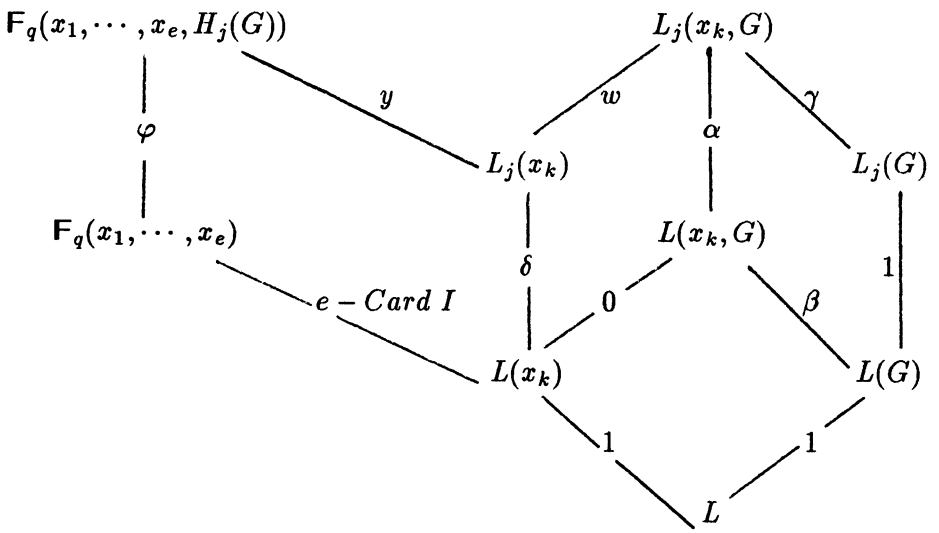
$$H_1(X) = \sum_{k\geq 0}(\frac{1}{X})^{r^k}$$

et

$$H_2(X) = \sum_{k\geq 0}(\frac{1}{X})^{k^r}$$

Il est clair que $H_j(G)$ est algébrique sur $L(G)$ si et seulement si $H_j(x)$ est algébrique sur $L(x)$, et cette dernière condition équivaut à l'algébricité de $H_j(x)$ sur $\mathbf{F}_q(x)$ (car $H_j(x)$ appartient à $\mathbf{F}_q((x^{-1}))$, voir par exemple la proposition 2 de [3]). Dorénavant, nous supposons que $j = 1$ et que r n'est pas une puissance de p, ou que $j = 2$, donc le degré de transcendance de $H_j(G)$ sur $L(G)$ est égal à 1.

On a alors les degrés de transcendance suivants en posant $L_j = L(H_j(G))$:



puis on écrit les relations suivantes entre les différents degrés de transcendance ci-dessus :

- ⋆ $\beta + 1 = 0 + 1$, d'où $\beta = 0$,
- ⋆ $\gamma \leq \beta$, d'où $\gamma = 0$,

- $\alpha + \beta = \gamma + 1$, d'où $\alpha = 1$,
- $w = 0$, car G est algébrique sur $L(x_k)$, donc sur $L(x_k, H_j(G))$,
- $w + \delta = \alpha + 0$, d'où $\delta = 1$,
- $y = e - Card\ I$, car les variables x_t ne figurent pas dans G ni dans $H_j(G)$ pour $t \notin \{1, \ldots, e\}$
- $y + \delta = \varphi + e - Card\ I$,

et donc $\varphi = \delta = 1$, ce qui signifie précisément que $H_j(G)$ est transcendant sur le corps $\mathbf{F}_q(x_1, \ldots, x_e)$.

Conclusion : Nous avons donné ci-dessus des démonstrations élémentaires "combinatoires" de la transcendance de certaines séries formelles. Il serait intéressant de prouver de la même façon tous les résultats de transcendance indiqués au paragraphe I 2 ci-dessus. On voit que la difficulté réside dans la nécessité de connaître (explicitement ou au moins "assez bien") le développement en série formelle des quantités en question : pour les valeurs $\zeta(m)$ par exemple ce développement est bien compliqué, et nous ne savons pas pour le moment utiliser le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy pour démontrer la transcendance de toutes les valeurs de ζ (la démonstration élémentaire de la transcendance de la série formelle Π ne donne la transcendance de $\zeta(m)$ que pour les entiers m divisibles par $q - 1$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. ALLOUCHE *Somme des chiffres et transcendance*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 279–285.

[2] J.-P. ALLOUCHE *Automates finis en théorie des nombres*, Expo. Math. **5** (1987), 239–266.

[3] J.-P. ALLOUCHE *Note sur un article de Sharif et Woodcock*, Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux **1,1** $2^{\text{ème}}$ **série** (1989), 163–187.

[4] J.-P. ALLOUCHE, J. BÉTRÉMA et J. SHALLIT *Sur des points fixes de morphismes d'un monoïde libre*, R.A.I.R.O, Informatique théorique et applications **23,3** (1989), 235–249..

[5] L. CARLITZ *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J., **1** (1935), 137–168.

[6] L. CARLITZ *Some topics in the arithmetic of polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 679–691.

[7] H. CHÉRIF *Mesure d'irrationalité des valeurs de la fonction zéta de Carlitz sur* $\mathbf{F}_2[T]$, Thèse (1987), Bordeaux. Voir aussi H. CHÉRIF et B. de MATHAN, *Mesure d'irrationalité de la valeur en 1 de la fonction zéta de Carlitz relative à* $\mathbf{F}_2[T]$, C.R. Acad. Sci. Paris **305, Série I** (1987), 761–763.

[8] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 401–419.

[9] A. COBHAM *On the base dependence of sets of numbers recognisable by finite automata*, Math. Systems Theory **3** (1969), 186–192.

[10] A. COBHAM *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164–192.

[11] G. DAMAMME *Irrationalité de $\zeta(s)$ dans le corps des séries formelles $\mathbf{F}_q((\frac{1}{t}))$*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **9,5** (1987), 207–212.

[12] G. DAMAMME et Y. HELLEGOUARCH *Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zéta de Carlitz*, C.R. Acad. Sci. Paris **307, Série I** (1988), 635–637.

[13] Y. HELLEGOUARCH *Propriétés arithmétiques des séries formelles à coefficients dans un corps fini*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **8,2** (1986), 115–120.

[14] Y. HELLEGOUARCH *Notions de base pour l'arithmétique de $\mathbf{F}_q((\frac{1}{t}))$*, Can. J. Math. **40,4** (1988), 817–832.

[15] L.I. WADE *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$*, Duke Math. J., **8** (1941), 701–720.

[16] L.I. WADE *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, II*, Duke Math. J., **10** (1943), 587–591.

[17] L.I. WADE *Two types of function fields transcendental numbers*, Duke Math. J., **11** (1944), 755–758.

[18] L.I. WADE *Remarks on the Carlitz ψ-function*, Duke Math. J., **13** (1946), 71–78.

[19] L.I. WADE *Transcendence properties of the Carlitz ψ-function*, Duke Math. J., **13** (1946), 79–85.

[20] J. YU *Transcendence and Drinfeld modules*, Inv. Math. **83** (1986), 507-517.

[21] J. YU *Transcendence and Drinfeld modules, II*, Math. Res. Cent. Rep. (1986), 172–181, Symp. Taipei/Taiwan.

[22] J. YU . in Zbl. Math. 644.12005

Note ajoutée en mars 1990 - Indiquons cinq références supplémentaires sur les problèmes évoqués ici (dans la seconde d'entre elles G. Damamme vient de donner une démonstration "élémentaire" de la transcendance des valeurs de la fonction zéta de Carlitz ; cette preuve généralise les méthodes de Wade, mais n'utilise pas le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy) :

H. CHÉRIF *Mesure d'irrationalité de valeurs de la fonction zéta de Carlitz sur $\mathbf{F}_q[T]$*, C.R. Acad. Sci. Paris **310, Série I** (1990), 23–26.

G. DAMAMME *Transcendance de la fonction zéta de Carlitz par la méthode de Wade*, Thèse (1990), Caen.

J.M. GEIJSEL *Transcendence in fields of positive characteristic*, Thesis (1978), Amsterdam.

E.-U. GEKELER *On power sums of polynomials over finite fields*, J. Numb. Theory **30,1** (1988), 11–26.

D.S. THAKUR *Number fields and function fields (zeta and gamma functions at all primes)*, p-adic analysis, Proc. Conf. Houthalen/Belg (1986), 149–157.

Mots clefs: Carlitz zeta function, formal series Π, transcendence, finite automata.

C.N.R.S. U.A. 226
Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux,
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, FRANCE.