

M. VAN DER PUT

Les courbes de Shimura

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2^e série, tome 1, n° 1 (1989),
p. 89-102

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1989__1_1_89_0

© Université Bordeaux 1, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Les courbes de Shimura.

par M. VAN DER PUT

Introduction

L'importance des courbes modulaires $X_0(N)$ pour l'arithmétique est bien connue depuis longtemps. La variété de Jacobi $J_0(N)$ de $X_0(N)$ possède également des propriétés arithmétiques.

On s'intéresse, par exemple, à la "réduction modulo p " (p étant un nombre premier) de $X_0(N)$. Dans le cas spécial $N = p$, la réduction modulo p de $X_0(p)$ est une courbe totalement dégénérée. Cette propriété implique que $X_0(p) \otimes \mathbb{Q}_p$ est une courbe de Mumford. Il existe alors un ouvert analytique Ω de $\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{Q}_p$ et un sous-groupe discret, sans torsion, de type fini, Γ de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ tel que :

$$\Gamma \backslash \Omega \simeq X_0(p) \otimes \mathbb{Q}_p.$$

Cette uniformisation p -adique n'est pas connue explicitement. Par contre l'uniformisation complexe $X_0(N) \otimes \mathbb{C} = \Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H} \cup \{\text{pointes}\}$ est explicite.

Cet exposé a pour but d'expliquer la situation analogue pour les courbes de Shimura $S_{d,f}$ (§2). L'idée de ces courbes est proche des courbes modulaires. $S_{d,f}$ est donnée par une uniformisation complexe. $S_{d,f}$ est l'espace des modules de certaines surfaces abéliennes. Pour un nombre premier p , $p \nmid d$, la réduction $S_{d,f} \otimes \mathbb{F}_p$ est une courbe totalement dégénérée. L'uniformisation p -adique de $S_{d,f} \otimes \mathbb{Q}_p$ est explicitement décrite par le théorème de Čerednik et Drinfeld (§3). On donne une indication de la démonstration.

Un lien entre la variété de Jacobi de $S_{d,f}$ et certains $J_0(N)$ a été découvert par K. Ribet (§4). Ce lien est une partie essentielle de sa démonstration de : "La conjecture de Taniyama-Weil implique le dernier théorème de P. de Fermat".

Finalement, rien dans cet exposé n'est original sauf peut-être les erreurs.

1. Algèbres de quaternions sur $\mathbb{Q}$.

Une algèbre de quaternions D sur un corps k est une algèbre simple (i.e. il n'existe pas d'idéaux bilatères différents de 0) avec centre $= k$ et

$\dim_k D = 4$. Dans le cas où car $k \neq 2$, D possède une base $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ sur k telle que la multiplication est donnée par les formules :

$$e_1 e_2 = e_3 ; e_2 e_1 = -e_3 ; e_1^2 = a ; e_2^2 = b ; e_3^2 = -ab \text{ avec } a, b \in k^* .$$

Exemples :

1.1 $k = \mathbf{R}$. Il existe deux possibilités : $D = M(2 \times 2, \mathbf{R})$ et $D =$ le corps des quaternions de Hamilton, donné par $a = b = -1$.

1.2 $k = \mathbf{Q}_p$. Il y a encore deux possibilités : $D = M(2 \times 2, \mathbf{Q}_p)$ et $D =$ le corps non commutatif qu'on peut décrire comme suit : $D = \mathbf{Q}_{p^2} 1 + \mathbf{Q}_{p^2} u$ avec règles de multiplication $u^2 = p$; $\lambda u = u Fr(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbf{Q}_{p^2}$. On a écrit ici $\mathbf{Q}_{p^2}$ pour l'unique extension non ramifiée de degré 2 de $\mathbf{Q}_p$ et Fr pour l'action de Frobenius sur $\mathbf{Q}_{p^2}$.

1.3 Soit D une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$ et v une place (alors v est un nombre premier ou bien $v = \infty$). On dit que D est ramifiée en v si $D \otimes \mathbf{Q}_v$ est un corps non commutatif. Le nombre des places ramifiées est pair. En outre, pour tout ensemble fini de places S de cardinalité paire, il existe une algèbre de quaternions unique (à isomorphisme près) avec S comme ensemble des places ramifiées. Le *discriminant* d d'une algèbre de quaternions $D/\mathbf{Q}$ est donné par :

$$d = \prod_{p \text{ ramifié}}^+ p$$

le signe $+$ équivaut à " D n'est pas ramifiée en ∞ ".

1.4 *Exemples.* Le discriminant de $M(2 \times 2, \mathbf{Q})$ est 1. Le discriminant du corps H des quaternions de Hamilton sur $\mathbf{Q}$ (avec $a = b = -1$) est égal à -2.

1.5 Soit $D/\mathbf{Q}$ une algèbre de quaternions avec discriminant d et soit $f \in \mathbf{Z}$, $f > 0$ et $(d, f) = 1$. Un ordre d'Eichler $\theta \subset D$ de niveau f est un sous-anneau de D , libre de rang 4 comme $\mathbf{Z}$ -module, tel que :

* pour $p|d$, $\theta \otimes \mathbf{Z}_p$ est l'unique ordre maximal $\mathbf{Z}_{p^2}[u]$ du corps non commutatif $\mathbf{Q}_{p^2}[u]$.

* pour $p \nmid d$, $\theta \otimes \mathbf{Z}_p$ est conjugué à

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ fc & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{Q}_p) \simeq D \otimes \mathbb{Q}_p.$$

On note que “ $f = 1$ ” est équivalent à “l’ordre d’Eichler est maximal.” Pour $d > 0$, il existe une seule classe de conjugaison d’ordres d’Eichler de niveau f dans D . Pour $d < 0$, les ordres d’Eichler de niveau f dans D forment un nombre fini de classes de conjugaison.

2. Définitions de la courbe de Shimura $S_{d,f}$

Soit $D/\mathbb{Q}$ une algèbre de quaternions indéfinie (i.e. $d > 0$) et soit $\theta \subset D$ un ordre d’Eichler de niveau f . Alors $\theta^* \subset (D \otimes \mathbb{R})^* \simeq GL(2, \mathbb{R})$ opère sur $\Omega = \mathbb{C} - \mathbb{R}$. La courbe de Shimura complexe $S_{d,f} \otimes \mathbb{C}$ est définie comme quotient $\theta^* \backslash \Omega$.

Pour $d > 1$, ce quotient est une surface de Riemann, connexe et compacte. Le groupe θ^* possède des éléments avec un déterminant négatif. Alors :

$$\theta^* \backslash \Omega = \theta_+^* \backslash \mathbf{H}, \text{ où}$$

$$\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im } z > 0\} \text{ et } \theta_+^* = \{\gamma \in \theta^* \mid \det \gamma > 0\}.$$

Pour $d = 1$, le quotient est égal à $\Gamma_0(f) \backslash \mathbf{H}$. Ce quotient n’est pas compact et la compactification est la courbe modulaire complexe $X_0(f) \otimes \mathbb{C}$. θ^* est associé au problème suivant de modules :

2.1 Les surfaces abéliennes A avec les structures supplémentaires :

- (1) $i : \theta \hookrightarrow \text{End}(A)$
- (2) un sous-groupe $B \subset A[f] := \{\text{les points d'ordre } f \text{ de } A\}$ tel que B est un θ -module cyclique d’ordre f .
- (3) l’application $\theta \xrightarrow{i} \text{End}(A) \longrightarrow \text{End}(T_e A) = M(2 \times 2, -)$ a la propriété

$$\text{Tr}(i(d)) = \text{Tr}_{D/\mathbb{Q}}(d) := \text{la trace réduite de } d := d + \bar{d}.$$

2.2 Remarques :

- 1) Pour $d = 1$ on retrouve le problème usuel de modules associé à $X_0(f)$. En effet

$$D = M(2 \times 2, \mathbf{Q}) \supset \theta = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ fc & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$$

Il s'ensuit que $A = E_1 \times E_2 =$ le produit de deux courbes elliptiques. En plus, E_1 et E_2 sont isogènes d'ordre f .

Dans la suite on supposera que $d > 1$.

2) La condition (2) de (2.1) est une structure de niveau f . La condition (3) de (2.1) est un peu technique. Cette condition est superflue en caractéristique 0.

3) On suppose $d > 1$. D'après un théorème de Drinfeld [1], le problème de modules (2.1) possède comme solution un schéma $S_{d,f}$ de type fini et projectif sur $\mathbf{Z}[1/f]$. Pour $f \geq 3$, le schéma $S_{d,f}$ représente le foncteur associé à (2.1).

2.3 Montrons maintenant que $\theta^* \backslash \Omega$ représente le problème de modules (2.1) sur $\mathbf{C}$. On fixe une immersion $\theta \hookrightarrow M(2 \times 2, \mathbf{R})$ et on associe à $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ le réseau

$$\Lambda(z) = \left\{ m \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2; m \in \theta \right\} \subset \mathbf{C}^2.$$

Le quotient $A(z) = \mathbf{C}^2 / \Lambda(z)$ est *a priori* un tore analytique. Utilisant la norme réduite de D on produit une polarisation sur $A(z)$. Alors $A(z)$ est une surface abélienne sur $\mathbf{C}$. L'immersion $i : \theta \hookrightarrow \text{End}(A(z))$ est évidente.

Le sous-groupe $B(z)$ de $A(z)$ est donné par $\theta \begin{pmatrix} f^{-1}z \\ 1 \end{pmatrix} / \Lambda(z)$.

On a construit ainsi une famille $(A(z), i(z), B(z))$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}$. Cette famille possède une θ^* -action naturelle et il n'est pas difficile de montrer que le quotient par θ^* est une famille universelle (pour les structures (2.1)) au-dessus de la courbe $\theta^* \backslash \Omega$. Cela justifie la notation $S_{d,f} \otimes \mathbf{C}$ pour $\theta^* \backslash \Omega$.

3. Le théorème de Čerednik et Drinfeld

D'abord on donne un énoncé faible (et légèrement faux) de ce théorème. Utilisons les notations suivantes :

$\mathbf{C}_p =$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$.

$$\Omega = C_p - \mathbb{Q}_p = \mathbb{P}^1(C_p) - \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$$

L'espace topologique Ω (pour la topologie induite par C_p) possède une structure d'espace analytique connexe sur C_p . Dans un autre langage Ω est un schéma formel sur $\mathbb{Z}_p$. Le groupe $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ opère sur Ω . Soit Γ un sous-groupe discret et co-compact de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$. Alors Le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ existe comme courbe analytique propre sur $\mathbb{Q}_p$ et $\Gamma \backslash \Omega$ est alors une courbe algébrique sur $\mathbb{Q}_p$. En d'autres termes $\Gamma \backslash \Omega$ est un schéma formel sur $\mathbb{Z}_p$, propre, de type fini, de dimension relative 1. Alors $\Gamma \backslash \Omega$ est le complété formel d'une courbe projective sur $\mathbb{Z}_p$ par rapport à la fibre spéciale " $p = 0$ ".

3.1 THÉORÈME (Čerednik, Drinfeld [1]). *Supposons $p \nmid d$. Alors $S_{d,f} \otimes \mathbb{F}_p =$ la réduction de $S_{d,f}$ modulo p est totalement dégénérée. Il existe un sous-groupe discret, co-compact Γ de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$, provenant d'une algèbre de quaternions D' , tel que $\Gamma \backslash \Omega$ est isomorphe à $S_{d,f} \otimes \mathbb{Z}_p$*

Dans les pages suivantes on précisera l'énoncé (3.1).

3.2 *L'algèbre de quaternions D' est obtenue de D en échangeant p et ∞ . Cela veut dire que le discriminant d' de D' est égal à $d' = -d/p$.*

Soit $\theta' \subset D'$ un ordre d'Eichler de niveau f (en général θ' n'est plus unique à conjugaison près). Alors le groupe Γ (comme sous-groupe de $GL(2, \mathbb{Q}_p)$) est égal à :

$$\theta' \left[\frac{1}{p} \right]^* \subset (D' \otimes \mathbb{Q}_p)^* \simeq GL(2, \mathbb{Q}_p)$$

Le théorème d'approximation pour les groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$ implique que Γ est discret et co-compact.

Posons $\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma \mid v_p(\det \gamma) \equiv 0 \pmod{2}\}$, où v_p est la valuation additive de $\mathbb{Q}_p$.

3.3 *Le schéma formel Ω est associé à l'immeuble de Bruhat-Tits Δ de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$. Cet immeuble est un arbre qu'on peut décrire comme suit. Les sommets de Δ sont les classes d'équivalence $[M]$ des $\mathbb{Z}_p$ -réseaux M de $\mathbb{Q}_{p^2}$ (i.e. $\mathbb{Q}_{p^2}$ est l'extension non ramifiée de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$ et $M \subset \mathbb{Q}_{p^2}$ est un $\mathbb{Z}_p$ -sous-module, libre de rang 2). L'équivalence $M_1 \sim M_2$ signifie $M_1 = p^n M_2$ pour certain $n \in \mathbb{Z}$. Les arêtes de Δ sont des paires $\{[M_1], [M_2]\}$ telles que $M_2 \subset M_1$ et $M_1/M_2 \simeq \mathbb{F}_p$. Pour $e_1, e_2 \in \mathbb{Q}_{p^2}$ bien choisis on a $M_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ et $M_2 = \langle e_1, p e_2 \rangle$. Alors Δ est un*

arbre régulier avec valence $p+1$. On associe à Δ un schéma formel Ω , localement de type fini. Soit $\delta = \{< e_1, e_2 >, < e_1, pe_2 >\}$ une arête de Δ . On écrit X_1, X_2 pour les coordonnées homogènes par rapport à $\{e_1, e_2\}$. Alors $\Omega(\delta)$ est le spectre formel d'un anneau complet pour la topologie p-adique :

$$\mathbb{Z}_p \left\langle \frac{X_2}{X_1}, p \frac{X_1}{X_2}, U \right\rangle \Big/ \left(U \left(\left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{p-1} - 1 \right) \left(\left(p \frac{X_1}{X_2} \right)^{p-1} - 1 \right) - 1 \right).$$

Cet anneau est le complété p-adique de l'anneau

$$\mathbb{Z}_p \left[\frac{X_2}{X_1}, p \frac{X_1}{X_2}, U \right] \Big/ \left(U \left(\left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{p-1} - 1 \right) \left(\left(p \frac{X_1}{X_2} \right)^{p-1} - 1 \right) - 1 \right).$$

A chaque sommet $v = [< e_1, e_2 >]$ on associe $\Omega(v)$ = le spectre formel de l'anneau complet

$$\mathbb{Z}_p \left\langle \frac{X_2}{X_1}, U \right\rangle \Big/ \left(U \left(\left(\frac{X_2}{X_1} \right)^p - \left(\frac{X_2}{X_1} \right) \right) - 1 \right).$$

Alors Ω est obtenu comme recollement des $\Omega(\delta)$ suivant l'arbre Δ . Pour deux arêtes δ_1, δ_2 ayant v comme sommet commun on recolle $\Omega(\delta_1)$ et $\Omega(\delta_2)$ sur l'ouvert commun $\Omega(v)$.

Les formules explicites ci-dessus montrent que

$$\Omega(\delta) \otimes \mathbb{F}_p = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad \text{et} \quad \Omega(v) \otimes \mathbb{F}_p = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

Il s'ensuit que $\Omega \otimes \mathbb{F}_p$ est un arbre de droites (i.e. des $\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{F}_p$). Le graphe dual de $\Omega \otimes \mathbb{F}_p$ est égal à Δ .

L'action de $PGL(2, \mathbf{Q}_p)$ sur Ω est évidente par la définition de Ω . Un sous-groupe Γ de $PGL(2, \mathbf{Q}_p)$ est discret et co-compact si et seulement si les stabilisateurs de Γ sur Δ sont finis et que $\Gamma \backslash \Delta$ est un graphe fini.

Pour un tel Γ il est facile de vérifier que le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est un schéma formel de type fini. De plus, $(\Gamma \backslash \Omega) \otimes \mathbf{F}_p$ est constitué de droites rationnelles sur $\mathbf{F}_p$ et les singularités de $(\Gamma \backslash \Omega) \otimes \mathbf{F}_p$ sont des points doubles ordinaires. Le graphe dual de $(\Gamma \backslash \Omega) \otimes \mathbf{F}_p$ s'identifie à $\Gamma \backslash \Delta$.

3.4 *Le "twist" de Frobenius.* Le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ n'est pas tout à fait ce qu'il faut dans le théorème (3.1). Il faut incorporer un "twist" de Frobenius. On utilise les notations suivantes :

$\mathbf{Z}_{p^2} = W(\mathbf{F}_{p^2})$ = l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}_{p^2}$

$\mathbf{Z}_{p^\infty} = W(\overline{\mathbf{F}}_p)$ = (le complété de) l'extension non ramifiée, maximale de $\mathbf{Z}_p$.

Fr = l'action de Frobenius sur $\mathbf{Z}_{p^2}$ et $\mathbf{Z}_{p^\infty}$.

$\Omega \hat{\otimes} \mathbf{Z}_{p^\infty}$ = le schéma formel déduit de Ω par l'extension de scalaires $\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Z}_{p^\infty}$.

Le groupe $\Gamma = \left(\theta' \left[\frac{1}{p} \right] \right)^*$ opère sur $\Omega \hat{\otimes} \mathbf{Z}_{p^\infty}$ par la formule (abus de langage !) :

$$\gamma(\omega \otimes \lambda) = ([\gamma]\omega) \otimes Fr^{n(\gamma)}(\lambda)$$

où " $\omega \in \Omega$ ", $\lambda \in \mathbf{Z}_{p^\infty}$, $[\gamma]$ = l'image de γ dans $PGL(2, \mathbf{Q}_p)$ et $n(\gamma) = v_p(\det \gamma)$.

3.5 *La version correcte de (3.1) est :*

Les schémas formels sur $\mathbf{Z}_p$, $S_{d,f} \otimes \mathbf{Z}_p$ et $\Gamma \backslash (\Omega \hat{\otimes} \mathbf{Z}_{p^\infty})$ sont isomorphes.

3.6 *Variation sur (3.5).*

On note que

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \in \Gamma_+$$

et alors

$$\Gamma_+ \backslash (\Omega \hat{\otimes} \mathbf{Z}_{p^\infty}) = ([\Gamma_+] \backslash \Omega) \otimes \mathbf{Z}_{p^2}$$

où

$$[\Gamma_+] = \Gamma_+ / \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}^n ; n \in \mathbf{Z} \right\}$$

est l'image de Γ_+ dans $PGL(2, \mathbf{Q}_p)$. Le groupe $\Gamma/\Gamma_+ = \{1, \omega\}$ opère sur $[\Gamma_+] \backslash \Omega$ par $[\omega]$ et sur $\mathbf{Z}_{p^2}$ par Fr .

Alors $S_{d,f} \otimes \mathbf{Z}_p$ est un twist de Frobenius de $[\Gamma_+] \backslash \Omega$ donné par

$$\{1, w\} \backslash ([\Gamma_+] \backslash \Omega) \otimes \mathbf{Z}_{p^2}.$$

En particulier $S_{d,f} \otimes \mathbf{Z}_{p^2} \simeq ([\Gamma_+] \backslash \Omega) \otimes \mathbf{Z}_{p^2}$. Cela corrige l'énoncé (3.1).

Soit G le graphe dual de $S_{d,f} \otimes \mathbf{F}_p$. Cela veut dire : les sommets de G sont les composantes irréductibles de $S_{d,f} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$ et les arêtes de G sont les points doubles de $S_{d,f} \otimes \overline{\mathbf{F}}_p$. Alors G est isomorphe à $\Gamma_+ \backslash \Delta$ et l'action de Frobenius sur G s'identifie à l'action de ω sur $\Gamma_+ \backslash \Delta$.

Utilisant cette description de G on peut déterminer les corps $K \supset \mathbf{Q}_p$ pour lesquels $S_{d,f}(K)$ n'est pas vide. ([2]).

3.7 Variation sur Ω . Le schéma formel Ω peut être vu comme éclatement de la façon suivante :

Soit Ω_1 l'éclatement de $\mathbf{P}^1 \otimes \mathbf{Z}_p$ en les $(p+1)$ points rationnels de la fibre spéciale $\mathbf{P}^1 \otimes \mathbf{F}_p$. Ensuite Ω_2 est l'éclatement de Ω_1 en les points rationnels de $\Omega_1 \otimes \mathbf{F}_p$ et ainsi de suite.

Soit $\Omega_n^* = \Omega_n - \{\text{les nouvelles droites exceptionnelles}\}$.

Alors $\Omega = \varinjlim \Omega_n^*$ comme schéma formel.

3.8 L'idée de la démonstration de (3.1) et (3.5).

$S_{d,f}(\overline{\mathbf{F}}_p) =$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des triplets (A, i, B) tels que:

- (1) A est une surface abélienne sur $\overline{\mathbf{F}}_p$
- (2) $i : \theta \hookrightarrow \text{End}(A)$
- (3) $B \subset A[f]$
- (4) les conditions de (2.1).

On prend un triplet (A, i, B) . Le module de Tate (usuel)

$$T_p(A) = \varprojlim A[p^n] \simeq \mathbf{Z}_p^r$$

avec $r \in \{0, 1, 2\}$. Le corps non commutatif $\theta \otimes \mathbb{Q}_p = D \otimes \mathbb{Q}_p$ opère sur $T_p(A) \otimes \mathbb{Q}_p$ et alors $r = 0$. On dit dans ce cas là que A est supersingulière.

Soit α_p le schéma en groupes fini donné par $\alpha_p = \text{Spec}(\mathbb{F}_p[t]/(t^p))$ et $t \mapsto t \otimes 1 + 1 \otimes t$ (la comultiplication). D'après F. Oort il y a deux possibilités pour une surface abélienne supersingulière.

- (i) $A \simeq E \times E$ avec E une courbe elliptique supersingulière fixée .
- (ii) $A \simeq E \times E / M$ où M est un sous-groupe de $E \times E$ isomorphe à α_p .

Les familles de surfaces abéliennes supersingulières sont étudiées dans [3].

On considère le groupe formel $\hat{A}$ de A . Comme A est supersingulière cela coïncide avec le groupe p -divisible de A . Ce qui précède montre que $\hat{A} \simeq G_{1,1} \times G_{1,1} / M$ où $G_{1,1}$ est le groupe formel standard de dimension 1 et hauteur 2 et où M est isomorphe à α_p .

On utilise maintenant la propriété fonctorielle de $S_{d,f} \otimes \mathbb{Z}_p$ vu comme schéma formel sur $\mathbb{Z}_p$. Cela représente les triplets (A, i, B) sur des schémas X où p est nilpotent. Pour un tel schéma on peut remplacer A par son groupe formel $\hat{A}$.

Utilisant un théorème de Serre et Tate, à savoir : "il existe une bijection entre l'ensemble des relèvements d'un schéma abélien et l'ensemble des relèvements de son groupe p -divisible", on constate que $S_{d,f} \otimes \mathbb{Z}_p$ représente les familles de groupes formels G avec θ -action et structure de niveau f (sur un X où p est nilpotent) telles que

$$G \otimes \bar{\mathbb{F}}_p \simeq G_{1,1} \times G_{1,1} / M$$

(*) On considère maintenant l'espace des déformations de $(\theta, G_{1,1} \times G_{1,1} / M)$. D'après Drinfeld cet espace de déformations est égal à $\Omega \hat{\otimes} \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Au dessus de cet espace il existe une famille (θ, G) . Le groupe $\Gamma = (\theta'[1/p])^*$ opère sur (θ, G) et $\Omega \hat{\otimes} \mathbb{Z}_{p^\infty}$. La famille, divisée par l'action de Γ , est une famille universelle sur $\Gamma \backslash \Omega \hat{\otimes} \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Cela montre que

$$S_{d,f} \otimes \mathbb{Z}_p \simeq \Gamma \backslash \Omega \hat{\otimes} \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

Pour la partie (*) il n'existe pas de référence explicite. Remarquons finalement que le lien entre θ et θ' (ou bien D et D') est donné par le suivant. Prenons le cas $A = E \times E$, alors

finalement que le lien entre θ et θ' (ou bien D et D') est donné par le suivant. Prenons le cas $A = E \times E$, alors

$$\text{End}_{\theta}(A) \subset \text{End}(E \times E) = M(2 \times 2, \theta_{-p})$$

où θ_{-p} est l'ordre maximal de l'algèbre de quaternions H_{-p} avec discriminant $-p$. Un calcul explicite montre alors que $\text{End}_{\theta}(A)$ s'identifie à θ' .

3.9 *Le graphe dual $\Gamma_+ \backslash \Delta$ de $S_{d,f} \otimes \mathbb{F}_p$ en termes de l'arithmétique de θ' et D' .*

La méthode est la suivante. L'immeuble de Bruhat-Tits Δ peut être identifié à l'arbre des θ' -idéaux à gauche de D' (modulo $p^{\mathbb{Z}}$). Un θ' -idéal à gauche M de D' est normalisé si $M \otimes \mathbb{Z}_{\ell} = \theta' \otimes \mathbb{Z}_{\ell}$ pour tout $\ell \neq p$. De plus $\{[M_1], [M_2]\}$ est une arête si l'ordre de M_1/M_2 est égal à p^2 .

Ensuite $\Gamma = (\theta'[1/p])^*$ opère par multiplication à gauche. L'ensemble $(\Gamma \backslash \Delta)_0$ des sommets de $\Gamma \backslash \Delta$ est fini et son cardinal $= h =$ le nombre des classes de θ' .

Alors $(\Gamma_+ \backslash \Delta)_0 = \{X_1, \dots, X_h, X'_1, \dots, X'_h\}$ et ω opère avec $\omega(X_i) = X'_i$; $\omega^2 = id$.

A chaque arête $y \in (\Gamma_+ \backslash \Delta)_1$ on peut donner une longueur $\ell(y) \geq 1$. Soit a le point double correspondant à y . Alors le complété de l'anneau local en a possède la forme $\mathbb{Z}_{p^\infty}[[X, Y]]/(XY - p^n)$. Par définition $\ell(y) = n$.

On peut montrer que $\ell(y) =$ l'ordre du stabilisateur de y .

Les nombres h et $\ell(y)$ sont connus par des formules d'Eichler.

3.10 *Un exemple.*

Soit p un nombre premier, $p \equiv 1 \pmod{12}$. On prend $d = 2p$ et $f = 1$. Alors $d' = -2$, $D' =$ l'algèbre des quaternions de Hamilton, $h(\theta') = 1$ et $|(\theta')^*| = 24$.

Alors $(\Gamma_+ \backslash \Delta)_0 = \{X, X'\}$. Un calcul montre que

$$(\Gamma_+ \backslash \Delta)_1 = \{y_0, y_1, \dots, y_g\}$$

avec $\ell(y_0) = 2$, $\ell(y_1) = \ell(y_2) = 3$, $\ell(y_3) = \dots = \ell(y_g) = 1$.

Le groupe $(\theta')^*/\{\pm 1\}$, stabilisateur du sommet $[\theta'] \in (\Delta)_0$, permute les $(p+1)$ arêtes avec sommet $(\Delta)_0$.

Alors :

$$p + 1 = \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{3} + (g - 2) \frac{12}{1}$$

et

$$g = \text{le genre de } S_{2p,1} = \frac{p + 11}{12} .$$

4. Le théorème de Ribet

4.1 La variété de Jacobi d'une courbe admissible

Soit $C/\mathbf{Z}_\ell$ (ℓ un nombre premier) une courbe admissible. Cela veut dire:

- (i) $C \otimes \mathbf{Q}_\ell$ est une courbe projective, connexe et non-singulière.
- (ii) Les singularités de $C \otimes \mathbf{F}_\ell$ sont des points doubles ordinaires.

Alors la variété de Jacobi de $C \otimes \mathbf{Q}_\ell$ possède un modèle minimal de Néron $J/\mathbf{Z}_\ell$. On sait que la condition " C admissible" implique que J possède une réduction stable. Cela veut dire que la composante $(J \otimes \mathbf{F}_\ell)^0$ de l'élément neutre de $J \otimes \mathbf{F}_\ell$ est une extension d'une variété abélienne $A/\mathbf{F}_\ell$ par un tore $T/\mathbf{F}_\ell$.

Il existe donc une suite exacte de groupes algébriques

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow (J \otimes \mathbf{F}_\ell)^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Le groupe des caractères de T sera appelé le groupe des caractères de $C \otimes \mathbf{Q}_\ell$. Soit G le graphe dual de $C \otimes \mathbf{F}_\ell$. On peut montrer que le groupe des caractères de $C \otimes \mathbf{Q}_\ell$ est canoniquement isomorphe à $H_1(G, \mathbf{Z})$.

Le théorème suivant, montré par Ribet, complète la démonstration (proposée par G. Frey et J.P. Serre) de :

"La conjecture de Taniyama-Weil implique le dernier théorème de Fermat".

4.2 THÉORÈME (K. Ribet 87/88). Soient $p \neq q$ des nombres premiers et $M \geq 1$ un entier avec $(M, pq) = 1$. Soient Y , L et X les groupes des caractères des courbes $S_{pq,M} \otimes \mathbf{Q}_p$, $X_0(M_{pq}) \otimes \mathbf{Q}_q$ et $X_0(M_q) \otimes \mathbf{Q}_q$.

Alors il existe une suite exacte naturelle :

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow L \longrightarrow X \oplus X \longrightarrow 0,$$

où naturelle veut dire que les morphismes commutent avec l'action des opérateurs de Hecke sur Y , L et X .

DÉMONSTRATION.

$Y \simeq H_1$ (graphe dual de $S_{pq,M} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$, $\mathbb{Z}$) et d'après Drinfeld-Čerednik ce graphe dual est $\Gamma_+ \backslash \Delta$ où

Δ = l'immeuble de Bruhat- Tits de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$;

$\Gamma_+ \subset_2 \Gamma = (\theta_{-q,M} [1/p])^* \subset GL(2, \mathbb{Q}_p)$;

$\theta_{-q,M}$ est un ordre d'Eichler de niveau dans

D_{-q} = l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{Q}$ ramifiée en $\{\infty, q\}$.

On fait maintenant une traduction de Δ et $\Gamma_+ \backslash \Delta$. Fixons $\mathcal{E}_0 = (E_0, B_0) \in X_0(M)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}$. C'est-à-dire, E_0 est une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ et B_0 est un sous-groupe cyclique de E_0 d'ordre M .

Alors $\text{End}(\mathcal{E}_0) = \theta_{-q,M}$.

On pose $V_p(\mathcal{E}_0) := T_p(E_0) \otimes \mathbb{Q}_p$; c'est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{Q}_p$.

On considère des paires $(\mathcal{E}, \alpha)$ avec $\mathcal{E} \in X_0(M)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}$ et $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_0) \otimes \mathbb{Q}$ tel que α induit un isomorphisme $T_\ell(\mathcal{E}) \longrightarrow T_\ell(\mathcal{E}_0)$ pour tout $\ell \neq p$. (Pour $\ell = q$ il faut lire pour T_q le module de Dieudonné de la courbe elliptique en question).

La condition sur α est équivalente à :

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_0) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right] = \alpha \theta_{-q,M} \left[\frac{1}{p} \right].$$

La paire $(\mathcal{E}, \alpha)$ induit un réseau $\alpha(T_p(\mathcal{E})) \subset V_p(\mathcal{E}_0)$ (modulo $p^{\mathbb{Z}}$), et donc un élément de $(\Delta)_0$. L'image dans $(\Gamma \backslash \Delta)_0$ ne dépend pas du choix de α . On obtient ainsi une bijection $X_0(M)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss} = \{ \text{classes des } \mathcal{E} \} \longrightarrow (\Gamma \backslash \Delta)_0$.

Le degré d'un α pour une paire $(\mathcal{E}, \alpha)$ est une puissance de p . En faisant la distinction entre les puissances paires et les puissances impaires on trouve une bijection entre $(\Gamma_+ \backslash \Delta)_0$ et

$$\{ \text{les paires}(\mathcal{E}, \alpha), \text{ degré } \alpha = p^{\text{pair}} \} / \sim \amalg \{ \text{idem}, p^{\text{impair}} \} / \sim.$$

Ensuite on donne une description de $(\Gamma_+ \backslash \Delta)_1$ = les arêtes de $\Gamma_+ \backslash \Delta$. Soit $M_1 \subsetneq M_2$ une arête de Δ . Pour un choix convenable des paires $(\mathcal{E}_1, \alpha_1)$, $(\mathcal{E}_2, \alpha_2)$ cela veut dire :

$$\alpha_1 T_p(\mathcal{E}_1) \subset_p \alpha_2 T_p(\mathcal{E}_2) \subset V_p(\mathcal{E}_0).$$

On peut supposer dans ce cas degré $\alpha_1 = p^{\text{pair}}$ et degré $\alpha_2 = p^{\text{impair}}$. Il s'ensuit qu'une arête (orientée) de $\Gamma_+ \backslash \Delta$ est une classe d'isomorphie d'une isogénie $\lambda : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ de degré p . Parce que $\mathcal{E}_1 = (E_1, B_1)$ et $\mathcal{E}_2 = (E_2, B_2)$, λ définit un élément $(E_1, \lambda^{-1}(B_2)) \in X_0(Mp)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}$. On trouve ainsi une bijection entre $(\Gamma_+ \backslash \Delta)_1$ et $X_0(Mp)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}$. De plus toutes les arêtes de $\Gamma_+ \backslash \Delta$ ont une orientation fixée.

Soit G un graphe fini, connexe où pour chaque arête z est donnée une orientation par l'ordre $z(0)$, $z(1)$ des sommets de z . Il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_1(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{a} \mathbb{Z}^{(G)_1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(G)_0} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où les morphismes sont :

$$\sum n_i z_i \mapsto \sum n_i (z_i(0) - z_i(1))$$

et

$$\sum m_i a_i \mapsto \sum m_i.$$

Dans notre cas spécial $Y = H_1(G, \mathbb{Z})$, $(G)_1 = X_0(Mp)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}$ et $(G)_0$ est la réunion disjointe de deux copies de $X_0(M)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}$.

Nous comparons cela avec la réduction $X_0(Mpq) \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$. Cette courbe a deux composantes, chacune isomorphe à $X_0(Mp) \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$. Les points doubles de la réduction sont obtenus en identifiant les points de $X_0(Mp)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}$ de deux composantes par la loi $x \leftrightarrow x^{(p)} = Fr(x)$.

Cette description de $X_0(Mp) \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ montre que $L := H_1$ (le graphe dual de $X_0(Mpq) \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Z}$) s'identifie au sous-groupe des éléments de degré 0 de $\mathbb{Z}^{X_0(M \times p)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}}$. De même, $X := H_1$ (le graphe dual de $X_0(Mq) \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Z}$) s'identifie au sous-groupe des éléments de degré 0 de $\mathbb{Z}^{X_0(M)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}}$. Le morphisme a ci-dessus satisfait $a(Y) \subset L$ et l'on trouve ainsi la suite exacte du théorème (4.2). L'action des opérateurs de Hecke sur Y , L et X se traduit facilement en termes de $\Gamma_+ \backslash \Delta$, $X_0(M)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}$, $X_0(Mp)(\overline{\mathbb{F}}_q)_{ss}$ et l'on peut vérifier que la suite exacte (4.2) est naturelle.

Finalement, il faut admettre une faiblesse dans la démonstration. Les composantes irréductibles de la courbe $S_{pq,M} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ sont définies sur $\mathbb{F}_{p^2}$ au lieu de $\mathbb{F}_p$. Cela ne semble pas trop gêner.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.G. DRINFELD. *Coverings of p -adic symmetric regions*, Funct. Analysis and its appl. **10** (1976) n° 2, 107-115.
- [2] B.W. JORDAN & R.A. LIVNÉ. *Local Diophantine Properties of Shimura curves*. Math. Ann. **270**, 235-248 (198).
- [3] T. KATSURA & F. OORT. *Families of supersingular abelian surfaces*. Compositio Math. **62**, 107-167 (1987).
- [4] K.A. RIBET. *On modular representations of $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ arising from modular forms*. (Preprint Sept. 19, 1988).
- [5] K.A. RIBET. *Bimodules and abelian surfaces*. (Preprint, August 10, 1988, PAM-423, Berkeley).

Mathematisch Instituut, Univ. Gröningen
Postbus 800
9700 AV Gröningen
PAYS-BAS