JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

J.-P. BOREL

Sur certains ensembles normaux

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2e série, tome 1, n° 1 (1989), p. 67-79

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1989__1_1_67_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux, **1**, *67–79 (1989)*

Sur certains ensembles normaux

par J-P. Borel

Résumé — Λ étant une suite de nombres réels, soit $B(\Lambda)$ l'ensemble normal associé. Pour $A \subset \mathbf{R}$, nous étudions la question : existe-t-il une suite Λ à valeurs dans un intervalle borné I telle que $A = B(\Lambda)$? Dans l'affirmative, nous cherchons alors à minimiser la longueur de l'intervalle I. Dans les cas les plus simples, où $A \subset \mathbf{Z}$, ce problème se ramène à minimiser le degré de $Q \in \mathbf{R}[X]$, avec la contrainte "PQ a tous ses coefficients positifs", pour des polynômes P de type très particulier associés aux ensembles A.

Abstract — Let Λ be a sequence of real numbers and $B(\Lambda)$ the associated normal set, i.e. the set of all real numbers x such that $x\Lambda$ is uniformely distributed modulo one. Our main problem is the following : for a given $A \subset \mathbf{R}$, does there exist a bounded sequence Λ such that $A = B(\Lambda)$? In some particular cases, when $A \subset \mathbf{Z}$, we give an estimate of the minimal length of a bounded subinterval I of $\mathbf{R}$ in which Λ can be taken. We prove that to obtain such an estimate, we have to study the following problem on polynomials : for a given polynomial P with no positive root, find the minimal degree δQ of those polynomials Q such that the product $P.Q$ has only positive coefficients.

1. Le problème considéré

1.1. Une suite Λ est équirépartie modulo 1 lorsque les propriétés si vantes équivalentes sont satisfaites ($\boldsymbol{\lambda}_1$ désigne la probabilité uniforme s l'intervalle $[0,1]$) :

$$\forall x \in [0,1[\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathcal{A}(N,x;\Lambda) = x \qquad \text{où} \qquad \mathcal{A}(N,x;\lambda) = \sum_{\substack{n\le N\\ \{\lambda_n\}<x}} 1$$

$$\forall t \in \mathbf{R}\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i t\{\lambda_n\}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_1(-t) = \frac{e^{2\pi i t}-1}{2\pi i t}$$

$$\text{où, si } \mu \in \mathcal{P},\ \hat{\mu}(t) = \int e^{-2\pi i t x}\, d\mu(x)$$

$$\forall k \in \mathbf{N}^*\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k\lambda_n} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_1(-k) = 0$$

Manuscrit reçu le 22 décembre 1988.

qui sont trois façons de traduire la convergence étroite vers $\boldsymbol{\lambda}_1$ de la suite de mesures $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta_{\{\lambda_n\}}$.

1.2. Mendès France a introduit en 1968 la notion d'ensemble normal associé à la suite Λ, donné par :

$$B(\Lambda) := \{x \in \mathbf{R} \ / \ x\Lambda \text{ équirépartie modulo } 1\}$$

Exemples

$\lambda_n = n$	$B(\Lambda) = \mathbf{R}^* - \mathbf{Q}$
$\lambda_n = n^2 + \sqrt{2}n$	$B(\Lambda) = \mathbf{R}^*$
$\lambda_n = \log n$	$B(\Lambda) = \emptyset$
suite de van der Corput	$B(\Lambda) = \mathbf{Z}^*$

1.3. $A \subset \mathbf{R}$ est appelé *ensemble normal* s'il existe une suite Λ telle que $A = B(\Lambda)$. Ces ensembles ont été caractérisés par Rauzy (1970, [12]) :

THÉORÈME (RAUZY). *$A \subset \mathbf{R}$ est ensemble normal si et seulement si :*
(i) $0 \notin A$
(ii) $\forall k \in \mathbf{Z}^*$, $kA \subset A$
(iii) *A est élémentaire.*

1.4. De façon similaire, $A \subset \mathbf{R}$ est appelé *ensemble b-normal* s'il existe une suite Λ bornée telle que $A = B(\Lambda)$. On pose alors :

$$M(A) := \inf\{M > 0 \ / \ \exists\Lambda,\ A = B(\Lambda) \text{ et } \Lambda \text{ à valeurs dans } [0, M]\}$$

Deux problèmes :

qualitatif $\quad$ A b-normal ?? $\quad (\iff M(A) < +\infty)$

quantitatif $\quad$ évaluer (encadrer ?) $M(A)$

que l'on peut affiner :

est-ce que $M(A)$ est atteinte ?

est-ce que toute suite Λ à valeurs dans $[0, M(A)]$, telle que $A = B(\Lambda)$, a une mesure de répartition (qui est alors déterminée par A...) ?

2. Les résultats obtenus

2.1. Quelques résultats sont déjà connus :

Dress, Mendès France (1970, [8])

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \mathbb{Z}^* \\ A \text{ vérifie (ii)} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad M(A) \le 1$$

Liardet, Rauzy (non publié, 19??)

$$M(A) < \infty \implies \overline{d}(A) < \infty \implies A = \bigcup_{i=1}^{k \text{ ou } \infty} \gamma_i \mathbb{Z}^*$$

où l'on note :

$$\mathcal{A}(x) := \frac{1}{2x} \sum_{\substack{|a|<x \\ a \in A}} 1 \qquad \text{et} \qquad \overline{d}(A) := \limsup_{x \to +\infty} \mathcal{A}(x)$$

qui conduit à la conjecture :

(version faible) A b-normal $\iff$ A vérifie (i) et (ii) et $\overline{d}(A) < \infty$

(version forte) A vérifie (i) et (ii) $\implies$ $M(A) \le C\overline{d}(A)$ avec une constante absolue C.

2.2. Il ressort des travaux effectués sur les ensembles normaux que l'on a :

Dress (1970, [7]) $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ b-normaux $\implies$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ b-normal ;

c'est le principe du "mixage de Dress", qui conduit à :

$$M\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sup_n M(A_n)$$

Mendès France (1970, [10]) A_1, A_2 b-normaux $\implies$ $A_1 \cup A_2$ b-normal ; il montre que si la série des inverses γ_i^{-1} converge :

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i \mathbb{Z}^* \quad \text{est } b\text{-normal}$$

2.3. Parmi la famille des parties de $\mathbb{R}$ satisfaisant (i) et (ii), la sous-famille des ensembles b-normaux est aussi stable par inclusion. Le théorème et ses corollaires sont montrés dans [3] :

THÉORÈME 1. *Si $A' \subset A$ vérifient (i) et (ii), on a : $M(A') \leq 2M(A)$.*

La constante 2 peut être enlevée dans certains "bons" cas, que l'on précisera. Question ouverte : M est-elle une fonction croissante ?

COROLLAIRE 1. $M(A_1 \cup A_2) \leq 2(M(A_1) + M(A_2))$

COROLLAIRE 2. *Soit $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i \mathbf{Z}^*$ et $A_n := \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{Z}^*$. Alors :*

(1) *tous les A_n sont b-normaux ;*
(2) *A est b-normal si et seulement si $M(A_n)$ est borné ;*
(3) *alors :*

$$\frac{1}{2} \sup_n M(A_n) \leq M(A) \leq 2 \liminf_{n\to\infty} M(A_n).$$

Résoudre le problème qualitatif pour A revient à résoudre le problème quantitatif pour les A_n.

COROLLAIRE 3. *A vérifiant (i) et (ii) est b-normal si et seulement si il existe une probabilité μ à support borné telle que $\hat{\mu}$ s'annule en tout point de A.*

2.4. Le second type de résultats concerne la comparaison de $M(A)$ avec les quantités $\overline{d}$, $\underline{d}$, d, s (respectivement lim sup, lim inf, lim, sup de $\mathcal{A}(x)$) associées à A. Il est à noter que $d(A)$ existe dès que la série des inverses γ_i^{-1} converge, mais que ce n'est pas le cas en général, même lorsque $A \subset \mathbf{Z}^*$ (Besicovitch, 1935, [1]). Il existe donc des ensembles b-normaux n'ayant pas de densité asymptotique $d(A)$.

THÉORÈME 2. *Soit A vérifiant (i) et (ii). Alors :*

(iv) $\underline{d}(A) \leq M(A)$
(v) $s(A) \leq 1{,}8\ M(A)$

et la constante dans (v) ne peut être inférieure à 1,1594...=80/69.

COROLLAIRE. *La conjecture forte est fausse.*

Cela provient de ce que l'on sait construire des ensembles de multiples $A_T := \bigcup_{t=T+1}^{2T} t\mathbf{Z}^*$ tels que l'on ait à la fois :

$$s(A_T) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{(en fait, } \geq \log 2)$$
$$\lim_{T\to\infty} d(A_T) = 0 \qquad \text{(Erdős, 1935, [9])}$$

(en fait, $d(A_T) = (\log T)^{-\delta+o(1)}$ avec $\delta = 0,0860\ldots$, Tenenbaum, 1987, [13]).

2.5. L'hypothèse $M(A_1 \cup A_2) = M(A_1) + M(A_2)$ lorsque A_1 et A_2 sont disjoints et vérifient (i) et (ii) permettrait alors de construire un contre exemple à la conjecture faible. Cependant, cette hypothèse est fausse.

2.6. Soient $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_k$ des entiers, et posons :

$$m := \operatorname{ppcm}(\gamma_i) \quad ; \quad \zeta := e^{2\pi i/m}$$

$$A := \bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i \mathbb{Z}^* \quad ; \quad \underline{A} := A \cap \{1, 2, \ldots, m-1\}$$

$$\text{(vi)} \qquad P := \prod_{a \in \underline{A}} (X - \zeta^a)$$

P est donc un polynôme de degré $d^\circ P = md(A) - 1$.

On notera :

$P \geq 0$ lorsque tous les coefficients de P sont positifs ou nuls ;

$P > 0$ lorsque tous les coefficients de X^d dans P, $0 \leq d \leq d^\circ P$, sont strictement positifs ;

et on pose :

$$\delta P := \inf\{d^\circ Q \ / \ Q \neq 0 \ \text{ et } PQ \geq 0\}$$
$$\delta^+ P := inf\{d^\circ Q \ / \ PQ > 0\}.$$

Théorème. *(Meissner, 1911, [11]) $\delta P \leq \delta^+ P < +\infty$ si et seulement si P n'a pas de racine réelle positive ou nulle, et le polynôme Q peut être choisi à coefficients positifs ou nuls.*

Théorème 3. *(voir [2]) Soit P associé à l'ensemble A (notations précédentes). On a alors :*

(1) *si $P \geq 0$, $M(A) = d(A)$*

(2) *dans le cas général,*

$$d(A) + \frac{\delta P}{m} \leq M(A) \leq d(A) + \frac{\delta^+ P}{m} \leq 1$$

($\delta^+ P$ peut être en fait remplacé par une quantité inférieure $\delta^* P$, plus difficile à évaluer d'un point de vue numérique).

Cela donne le bon ordre de grandeur de $M(A)$, puisque l'on a toujours :

$$d^\circ P + \delta P \leq d^\circ P + \delta^+ P \leq 2(d^\circ P + \delta P).$$

La constante 2 qui apparaît ici est de même nature que celle du théorème 1.

COROLLAIRE. *(voir [4]). Si les γ_i sont deux à deux premiers entre eux, on a :*

$$d(A) \leq M(A) \leq 2d(A)$$

2.7. D'un point de vue numérique, si les γ_i sont supposés premiers entre eux dans leur ensemble, on a :

si $k = 1$ ou 2, $P > 0$;

si $k = 3$, $P \geq 0$ et des coefficients nuls apparaissent ;

pour $k \geq 4$, des coefficients négatifs apparaissent (suivant les γ_i).

Par exemple, pour $k = 4,\ \gamma_1 = 2,\ \gamma_2 = 3,\ \gamma_3 = 5,\ \gamma_4 = 7$, le calcul montre que l'on a :

$$d^\circ P = 161 \quad ; \quad \delta P = \delta^* P = 6 \quad ; \quad \delta^+ P = 7 \ ;$$
$$M(A) = \frac{4}{5} \quad ; \quad d(A) = \frac{27}{35} \quad ; \quad s(A) = \frac{9}{10}$$

2.8. Il est possible de donner des estimations quantitatives de δP et $\delta^+ P$, générales ou spécifiques aux polynômes de la forme (vi) qui interviennent au théorème 3.

THÉORÈME 4. *(voir [4]). Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, et $\theta_1 \in]0,\pi]$ l'argument positif minimal des racines de P. On a alors :*

$$\frac{\pi}{\theta_1} \leq d^\circ P + \delta P \leq d^\circ P + \delta^+ P \leq \frac{3}{2} d^\circ P \frac{\pi}{\theta_1}$$

Pour les polynômes (vi), il ya plusieurs façons d'estimer δP et $\delta^+ P$. Je ne donnerai ici que des estimations ne faisant intervenir que le degré $d^\circ P$.

THÉORÈME 5. *(voir [4]). Pour des polynômes P de la forme (vi) :*

$$d^\circ P + \delta^+ P \ll (d^\circ P)^{3/2} (\log d^\circ P)^{-1/2}$$

et il existe des polynômes de degré aussi grand que l'on veut, tels que :

$$\delta^+ P \gg d^\circ P (\log\log d^\circ P)^{\delta + o(1)} \ , \ \delta = 0{,}0860\ldots$$

3. Le lien avec les mesures

3.1. On notera $\Pi(\Lambda)$ l'ensemble (non vide car Λ est bornée) des probabilités adhérentes au sens de la convergence étroite à la suite des mesures :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta_{\lambda_n}.$$

Si $\Pi(\Lambda) = \{\mu\}$, on dit que Λ est μ-répartie.

3.2. Toutes ces probabilités sont à support borné. Leur transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est donc une fonction entière. On notera :

$$\mathcal{O}[\mu] := \{x \in \mathbf{R},\ \hat{\mu}(x) = 0\};$$

$$B[\mu] := \{x \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z}^*\ \hat{\mu}(kx) = 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathcal{O}[\mu].$$

3.3. A l'aide du théorème de Paul Lévy, il est facile de montrer que :

LEMME 1. *Soit Λ une suite bornée. Alors* $B(\Lambda) = \bigcap_{\mu\in\Pi(\Lambda)} B[\mu]$.

Application 1. Soit A un ensemble b-normal. $A \subset \mathcal{O}[\mu]$ avec $\hat{\mu}$ entière, donc A est discret dans $\mathbf{R}$. D'où son écriture

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\gamma_i\mathbf{Z}^* \text{ ou } A = \bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i\mathbf{Z}^*\ ,\ \gamma_i \text{ croissant (vers } +\infty)$$

Application 2. $\mu \in \Pi(\Lambda)$ est à support dans $[0, M]$, ce qui entraîne :

$$|\hat{\mu}(Re^{i\theta})| \le e^{2\Pi RM|\sin\theta|}$$

En, utilisant le lemme de Jensen, on obtient alors :

$$s(A) \le s(\mathcal{O}[\mu]) \le 2eM,$$

d'où $s(A) \le 2eM(A)$. En centrant le support de μ en 0, on peut supprimer le facteur 2. Pour remplacer e par 1,8, il reste à tenir compte du fait que A vérifie la propriété (ii). La majoration annoncée de $\underline{d}(A)$ s'obtient à partir du lemme de Jensen, par une sommation à la Abel.

Application 3. Pour μ probabilité donnée, à support borné, il existe une suite Λ bornée et μ-répartie : prendre par exemple $\lambda_n := F^{-1}(\{n\sqrt{2}\})$, où

$$F^{-1}(x) = \sup\{y \in \mathbf{R},\ \mu(]-\infty, y[) \le x\}.$$

Alors $B(\Lambda) = B[\mu]$. Le lemme 1 permet d'obtenir le corollaire 3 du théorème 1.

3.4.

LEMME 2. *Soit μ une probabilité telle que $\alpha \in B[\mu]$. Alors μ est absolument continue, et sa densité f vérifie $0 \leq f \leq \alpha$ Lebesgue–presque sûrement.*

Si $B(\Lambda)$ est non vide, les probabilités adhérentes à Λ sont donc absolument continues, de densités majorées par $\alpha = \min(B(\Lambda) \cap \mathbf{R}_+^*)$

4. Stabilité par inclusion

4.1. L'ensemble b-normal A est donc dénombrable (si $A \neq \emptyset \dots$), donc il en est de même pour $A - A'$. L'idée générale de la démonstration du théorème 2 est donc de montrer que l'on peut légèrement perturber une mesure μ adhérente à Λ, de façon que le nouveau $B[\mu]$ soit égal à l'ancien, privé de $\{\pm t\}$. On recolle les $B[\mu_t]$ par un mixage de Dress, t décrivant l'ensemble $B[\mu] - A'$ qui est fini ou dénombrable.

4.2. Soit ν une probabilité à support borné, et $\mu := \boldsymbol{\lambda}_1 * \nu$ ($\boldsymbol{\lambda}_x$ désignant la probabilité uniforme sur l'intervalle $[0, x]$). Alors $1 \in B[\mu]$. La réciproque de ce résultat est "presque vraie", dans le sens suivant.

Posons, pour $N \in \mathbf{N}^*$:

$$\omega_N := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{\frac{n}{N}}$$

PROPOSITION 1. *Soit μ une probabilité à support borné, telle que $1 \in B[\mu]$. Alors, pour tout $N \geq 1$, ω_N est facteur de convolution de μ.*

Si μ est à support dans l'intervalle $[0, M]$, on peut donc écrire $\mu = \omega_N * \nu_N$, où ν_N est absolument continue, de densité bornée presque sûrement, concentrée dans l'intervalle $\left[0, M - 1 + \frac{1}{N}\right]$. Deux remarques importantes :

- ν_N n'a pas de raison d'être positive : cela interdit donc un passage à la limite sur N ;
- la densité de ν_N est positive sur les intervalles

$$\left[0, \frac{1}{N}\right] \text{ et } \left[M - 1, M - 1 + \frac{1}{N}\right].$$

4.3. Lorsque $\mu = \boldsymbol{\lambda}_1$ et $t = 1$, la perturbation de μ indiquée au 4.1 est facile à réaliser.

PROPOSITION 2. *Soit C une partie discrète de $\mathbf{R} - \mathbf{Z}, A := \mathbf{Z}^* - \{\pm 1\}$, et*

$\epsilon > 0$. *Il existe une probabilité* $\mu = g\boldsymbol{\lambda}_1$, g *continue sur [0,1], telle que :*

$$\begin{cases} B[\mu] = A \\ \|1 - g\|_\infty \leq \epsilon \\ \mathcal{O}[\mu] = A \cup \{\pm t'\} \quad \text{avec } \frac{3}{4} < t' < 1 \text{ et } t' \notin C \end{cases}$$

Il suffit de prendre $g(x) = 1 + 2a\cos(2\pi x)$, *avec :*

$$a := \min\left\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{7}{19}, \frac{1-c^2}{2c^2}\right\} \text{ avec } c := \max\{C \cap]0,1[\}$$

4.4. Une probabilité μ absolument continue sera dite vraiment positive s'il existe $M_1 < M_2$ tels que la densité f de μ vérifie (Lebesgue-presque sûrement) :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \qquad \text{si } x \notin [M_1, M_2] \\ \forall \eta > 0,\ \exists \epsilon > 0, \qquad f(x) \geq \epsilon \qquad \text{si } x \in [M_1 + \eta, M_2 - \eta] \end{cases}$$

PROPOSITION 3. *Soit* μ *une probabilité vraiment positive, concentrée sur [0,M], telle que* $1 \in B[\mu]$. *Soit* $\eta > 0$ *quelconque. Alors il existe une probabilité* ν *vraiment positive telle que :*

$$B[\nu] = B[\mu] - 1/\mathbb{Z}^* \quad \text{et} \quad \nu([0, M + \eta]) = 1$$

($1/\mathbb{Z}^*$ désigne l'ensemble des inverses des entiers non nuls). La technique de construction de ν est la suivante :

• d'après la proposition 1, $\mu = \omega_N * \mu_1$ (N fixé, $N > \frac{K}{\eta}$ où K est l'ordre du zéro 1 de la fonction entière $\hat{\mu}$) ;

• $\mu_2 := \boldsymbol{\lambda}_1 * \mu_1 = \boldsymbol{\lambda}_{1/N} * \mu$ est vraiment positive ;

• $\mu_3 := (g\boldsymbol{\lambda}_1) * \mu_1$ où g est définie dans la Proposition 2, associée au ϵ associé à $\frac{1}{N}$ dans la définition de μ vraiment positive.

La proposition provient de l'étude des zéros de $\widehat{\mu}_3$. Le principal problème est de montrer que μ_3 est vraiment positive. Si $K = 1$, on peut prendre $\nu = \mu_3$; sinon, on itère K fois ce mécanisme.

4.5. Soit A un ensemble b-normal, $\epsilon > 0$ quelconque. Il existe alors μ vraiment positive, à support dans $[0, 2M(A) + \epsilon]$, telle que $A \subset B[\mu]$. Si

$t \in B[\mu] - A'$, il existe (proposition 3) μ_t vraiment positive, concentrée dans $[0, 2M(A) + 2\epsilon]$, telle que :

$$B[\mu_t] = B[\mu] - t/\mathbb{Z}^*$$

Le principe du mixage de Dress, appliqué aux suites Λ^t (t décrivant l'ensemble fini ou dénombrable $B[\mu] - A', \Lambda^t$ étant une suite arbitraire μ_t-répartie), donne une suite Λ à valeurs dans $[0, 2M(A) + 2\epsilon]$, telle que

$$B(\Lambda) = \bigcap_t B[\mu_t] = B[\mu_t] - (B[\mu_t] - A') = A'$$

Cela montre le théorème 1.

Les résultats annoncés dans ce paragraphe sont établis dans [3].

5. Le cas $A \subset \mathbb{Z}$

5.1. En reprenant les notations introduites en 2.6, soit μ la probabilité :

$$\mu := \boldsymbol{\lambda}_{\frac{1}{m}} * \mathop{*}_{a \in \underline{A}} (\delta_{\frac{1}{m}} - \zeta^a \delta_0)$$

Alors $\mathcal{O}[\mu] = A$, et μ est concentrée sur l'intervalle [0,d(A)]. Si μ est positive (i.e.$P \geq 0$), on en déduit que $M(A) \leq d(A)$. Sinon, il suffit de convoler μ avec une autre probabilité, pourvu qu'il n'apparaisse pas de zéro supplémentaire "mal placé". Cela est possible dès que $PQ > 0$, car alors on peut placer les zéros de Q en dehors du cercle unité. D'où la majoration du théorème 3.

5.2. La minoration provient du résultat suivant. Soit μ une probabilité concentrée sur l'intervalle [0,M]. On considère alors les probabilités :

$$\mu'[x] := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu([nx, (n+1)x[)\delta_{nx}$$

$$\mu[x] := \mu'[x] * \boldsymbol{\lambda}_x$$

et le polynôme :

$$Q_x := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu([rx, (n+1)x[)X^n, \quad d^\circ Q_x = [mM], \quad Q_x \geq 0$$

THÉORÈME 6. *(voir [2]) Soit $b|m$ deux entiers, Λ une suite à valeurs dans [0,M] et $\mu \in \Pi(\Lambda)$. On a alors :*

$$b \in B(\Lambda) \Rightarrow b \in B\left[\mu[\frac{1}{m}]\right].$$

Ce résultat provient essentiellement du fait que si X est une variable aléatoire réelle de loi μ, alors $\mu\left[\frac{1}{m}\right]$ est la loi de la variable $Y := \frac{1}{m}[mX]$.

En apppliquant ce théorème avec $b = \gamma_i (1 \leq i \leq k)$ et $m = ppcm(\gamma_i)$, on obtient donc :

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B(\Lambda) \\ \mu \in \Pi(\Lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow A \subset B\left[\mu\left[\frac{1}{m}\right]\right] \Rightarrow P \mid Q_{\frac{1}{m}}$$
$$\Rightarrow M \geq \frac{1}{m} d^\circ Q_{\frac{1}{m}} \geq \frac{1}{m}(d^\circ P + \delta P)$$

Cela donne (presque) la minoration du théorème 3.

6. Evaluations des quantités δ et δ^+

6.1. Il est clair que si P a une racine dans $\mathbf{R}_+^*$ (resp $\mathbf{R}_+$), alors $\delta P = +\infty$ (resp. $\delta^+ P = +\infty$). Les réciproques de ces résultats sont vraies. La démonstration, ainsi que les majorations de δP et $\delta^+ P$ connues, reposent sur la factorisation :

$$P = \pm d X^n \prod (X + c_j) \prod (X^2 + e_k X + f_k) \prod (X^2 - a_i\, X + b_i)$$

où tous les coefficients sont positifs, et avec $4b_i > a_i^2$. On a alors :

$$\delta^+ P \leq \sum_i \delta^+ (X^2 - a_i X + b_i) \qquad (\text{ si } n = 0)$$

Il est alors possible de préciser exactement la plus petite valeur de n telle que $(1 + X)^n (X^2 - aX + b) > 0$; la meilleure majoration de δ^+ que je connaisse provient d'une autre méthode :

LEMME 3. *($0 < \theta \leq \pi$, $\rho > 0$) si $n := \left[Log \frac{\pi}{\theta} / Log 2\right]$, et si on pose :*

$$P_n := X^{2^{n+1}} - 2\rho^{2^n} \cos 2^n \theta\, X^{2^n} + \rho^{2^{n+1}}$$

alors $P_n \geq 0$, et P_n est multiple de $X^2 - 2\rho \cos \theta X + \rho^2$.

On en déduit que si $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_r \leq \pi$ est la suite des arguments des racines de P dans le demi-plan $\Re(z) \geq 0$, on a :

$$d^\circ P + \delta P \leq 2\pi \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{|\theta_i|}$$

$$d^\circ P + \delta^+ P \leq 3\pi \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{|\theta_i|}$$

6.2. Dans le cas étudié en 2.6, si on note $P_k := P$ et P_{k+1} le polynôme associé à $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}$, on a une relation (cf. [2]) :

$$P_{k+1}(X) = P_k(X^\alpha)\phi_\alpha(X) \cdot \frac{\phi_q(X)}{P'(X)}$$

où $\phi_n(X) := (X^n - 1)/(X - 1)$, P' est analogue au polynôme P, et α et q sont définis par :

$$m_{k+1} = m_k.\alpha = \gamma_{k+1} q.$$

C'est cette relation qui est à la base du corollaire du théorème 3, des estimations numériques citées en 2.7, et du théorème 5.

Additif (décembre 88)

Le théorème de Meissner cité en 2.6 permet de donner une forme plus générale au corollaire 3 du théorème 1. Une mesure μ finie à support borné sera dite "positive aux bords" s'il existe des réels M, M' et $\eta > 0$ tels que :

μ est concentrée sur l'intervalle $[M, M']$;

μ est positive, non nulle, sur chacun des intervalles $[M, M + \eta]$ et $[M' - \eta, M']$.

Corollaire 3'. *A vérifiant (i) et (ii) est b-normal si et seulement si il existe une mesure μ finie, à support borné, positive aux bords, telle que :*

$\hat{\mu}$ s'annule en tout point de A

$\hat{\mu}$ n'a pas de zéro imaginaire pur.

Il suffit en effet de trouver une mesure finie à support borné ν telle que $\mu * \nu$ soit positive. On peut donc se ramener au cas où μ est absolument continue, de densité f continue. Dans ce cas, la positivité aux bords est alors équivalente (cf. [5]) à l'existence d'un polynôme $P = \sum a_n X^n$ et de $T > 0$ tels que :

$$\begin{cases} P \text{ n'a pas de racine sur }]0, +\infty[\\ \text{la mesure } \mu - (\sum a_n \delta_{nT} * \lambda_T) \text{ est positive} \end{cases}$$

Il existe donc un polynôme à coefficients positifs $Q = \sum b_n X^n$ tels que $PQ \geq 0$, et donc la mesure suivante est positive :

$$\mu * (\sum b_n \delta_{nT})$$

(l'existence de ν peut aussi s'obtenir à partir d'un résultat de Diamond et Essen, [6]).

Références

[1] A.S. Besicovitch, *On the density of certain sequences of integers*, Math. Annalen **110** (1934), 336–341.

[2] J.-P. Borel, *Suites de longueur minimale associées à un ensemble normal donné*, Israel J. of Math. **64** (1988), 229–250.

[3] J.-P. Borel, *Parties d'ensembles b-normaux*, Manuscripta Math. **62** (1988), 317–335.

[4] J.-P. Borel, *Polynômes à coefficients positifs multiples d'un polynôme donné*, exposé au colloque 50 ans sur les polynômes, (mai 1988, I.H.P.). à paraître.

[5] J.-P. Borel, *Produits de convolution positifs*, Publ. du dép. de Math. Université de Limoges **11** (1989). à paraître

[6] H.G. Diamond et M. Essen, *Functions with non-négative convolutions*, J. of Math. Analysis and Applications **63** (1978), 463–489.

[7] F. Dress, *Intersection d'ensembles normaux*, J. of Number Theory **2** (1970), 352–362.

[8] F. Dress et M. Mendès France, *Caractérisation des ensembles normaux dans* $\mathbb{Z}$, Acta Arith. **17** (1970), 115-120.

[9] P. Erdős, *Note on a sequence of integers none of which is divisible by anyother*, J. London Math. Soc. **10** (1935), 126–128.

[10] M. Mendès France, *La réunion des ensembles normaux*, J. of Number Theory **2** (1970), 345–351.

[11] E. Meissner, *Über positive Darstellung von Polynomen*, Math. Annalen **70** (1911), 223–235.

[12] G. Rauzy, *Caractérisation des ensembles normaux*, Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 401–414.

[13] G. Tenenbaum, *Un problème de probabilité conditionnnelle en arithmétique*, Acta Arith. **49** (1987), 165-187.

Mots clefs : Ensembles normaux, Répartition modulo 1

1980 *Mathematics subject classifications*: 11K06.

Université de Limoges
123, avenue Albert Thomas
87060 Limoges cedex, France.