

LAURENCE DIEULLE

CHRISTOPHE BÉRENGUER

ANTOINE GRALL

## **Une politique de maintenance conditionnelle à temps continu pour un système à détérioration graduelle**

*Journal de la société française de statistique*, tome 141, n° 3 (2000), p. 69-84

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_2000\\_\\_141\\_3\\_69\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2000__141_3_69_0)

© Société française de statistique, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UNE POLITIQUE DE MAINTENANCE CONDITIONNELLE À TEMPS CONTINU POUR UN SYSTÈME À DÉTÉRIORATION GRADUELLE

Laurence DIEULLE<sup>1</sup>, Christophe BÉRENGUER<sup>1</sup>,  
Antoine GRALL<sup>1</sup>

## RÉSUMÉ

Cet article concerne un système à détérioration continue et soumis à des inspections choisies séquentiellement. La dégradation du système au cours du temps est modélisée par un processus Gamma. Deux types de réparations peuvent avoir lieu selon l'état du système courant. Le but de ce travail est d'optimiser la politique de maintenance appliquée en minimisant le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini engendré par les inspections, réparations et arrêts du système. L'étude du processus stochastique d'évolution du système permet de déterminer l'expression du coût et de se livrer à une optimisation numérique.

*Mots-clés* : Maintenance; Processus régénératif; Théorie du renouvellement; Remplacement.

## ABSTRACT

This paper deals with a continuously deteriorating system which is inspected at random times sequentially chosen by a maintenance function. The degradation is modeled by a Gamma process. Two types of restoration can take place in function of the current system state. The main aim of the paper is to find the optimal maintenance strategy in sense of the minimum of the long-time average cost engaged by the inspections, the preventive and corrective repairs and breakdowns. A probabilistic study is made on the system evolution process and properties of the cost are derived. We show that a numerical optimization can be performed.

*Key words* : Maintenance; Regenerative process; Renewal theorem; Replacement.

## 1. INTRODUCTION

La sûreté de fonctionnement regroupe un ensemble de techniques et de modèles visant à calculer ou estimer la probabilité de survie d'un système, sa

---

1. Laboratoire de Modélisation et Sûreté des systèmes, Université de Technologie de Troyes, 12 rue Marie Curie, BP 2060, F 10000 Troyes cedex; e-mail . {dieulle,berenguer,grall}@utt.fr

durée de vie moyenne, la probabilité qu'il soit en marche à un instant donné. . . Un système désigne ici une entité destinée à assurer une tâche précise, cette entité peut être constituée de plusieurs sous-systèmes eux-même constitués de plusieurs composants. Par exemple, on peut étudier les caractéristiques d'une voiture de tourisme, une chaîne de production, un barrage hydraulique, un réacteur d'avion . . .

Au cours du temps, le système subit des dégradations de manière aléatoire, il continue alors d'assurer sa fonction mais dans un mode dit dégradé jusqu'à ce que cette dégradation conduise à la panne (un exemple trivial est un système de trois composants en parallèle qui fonctionne tant qu'au moins un des trois composants est en marche). La panne d'un système est caractérisée de différentes manières selon sa nature : refus de démarrage (moteur diesel, contacteurs électriques collés), rupture d'une structure (pont, digue), usure (système de freinage d'une voiture). . .

C'est sur ce dernier mode de défaillance que porte ce travail. En effet, beaucoup de processus industriels ou de structures souffrent d'usure au cours de leur vie qui est due à l'âge et à l'utilisation. Cette usure engendre alors des pannes de manière aléatoire. Outils coupants [14], structures hydrauliques [30], circuits de freinage, pales de compresseur des moteurs d'avion [13], pipelines [11], équipement rotatif, sont autant d'exemples de systèmes soumis à l'usure parmi lesquels divers processus physiques de dégradation peuvent être observés comme l'usure cumulative, l'usure de contact, la propagation de fissure, l'érosion, la corrosion. . .

La dégradation et la panne de tels systèmes peuvent induire des coûts élevés (dus à la perte de production et aux délais, aux interventions non prévues) ainsi que des risques de sécurité (si le stress subi dépasse la résistance du matériau). C'est pourquoi une maintenance préventive est nécessaire pour remplacer le matériel détérioré avant que la panne ne survienne. Collecter l'information sur l'état du système au cours de son fonctionnement permet d'éviter les arrêts système mais induit un coût de surveillance. C'est pourquoi une étude est nécessaire pour déterminer la fréquence de ces inspections. L'intérêt croissant pour la maintenance préventive a suscité de nombreux travaux [16, 22, 27].

Les critères de réglage peuvent être de nature différente selon le contexte (assurer une disponibilité ou fiabilité minimum à chaque instant, maximiser la disponibilité asymptotique, minimiser le coût de la maintenance ou minimiser un coût global de fonctionnement. . .).

Dans le cas où la panne du système survient lorsque la dégradation franchit un seuil limite et si cette dégradation peut être mesurée (par des analyse de vibrations, témoin d'usure, taux d'érosion/corrosion. . .) alors il est plus judicieux de prendre pour critère de décision la variable décrivant la dégradation subie plutôt que l'âge du système : ceci mène à une politique de maintenance conditionnelle. De telles politiques fournissent une estimation de l'état du système grâce aux données collectées par surveillance continue ou lors d'inspections dans le but de prédire la défaillance. La maintenance conditionnelle réduit le

coût de maintenance, augmente la sûreté du matériel et réduit le nombre et la gravité des arrêts système [23].

Dans ce papier, nous considérons un système qui se dégrade aléatoirement de manière continue et qui est surveillé par des inspections révélant l'état exact du système. Lorsque la dégradation du système dépasse le seuil  $L$ , le système passe dans un état de panne et il y reste jusqu'à l'inspection suivante. Une remise à neuf (ou remplacement) corrective est alors immédiatement effectuée. Lorsqu'une inspection révèle que l'état du système est au-dessus d'un seuil critique  $M$  ( $M < L$ ), le système est alors considéré comme suffisamment dégradé pour nécessiter un remplacement préventif. Le choix des dates d'inspection et du seuil critique  $M$  a une influence évidente sur les performances économiques de la politique de maintenance. Par exemple, un seuil critique trop faible conduit à des remplacements préventifs fréquents et empêche l'exploitation du matériel dégradé mais « valide » jusqu'à sa durée de vie maximale. A l'inverse un seuil critique trop élevé tend à laisser le système fonctionner dans un état très dégradé et accroît le risque de panne. Dans la pratique, les inspections ont souvent lieu à intervalles réguliers. Néanmoins, inspecter systématiquement le système peut se révéler ne pas être le plus rentable en particulier si l'inspection est onéreuse. C'est pourquoi les dates d'inspections conjointement au seuil préventif sont les principales variables de décision pour l'optimisation d'une politique de maintenance conditionnelle. Une approche conservatrice peut amener à choisir un seuil préventif trop faible et à inspecter plus souvent que nécessaire conduisant ainsi à une politique non optimale. Le calcul de performances d'une politique de maintenance ainsi que la détermination des paramètres optimaux nécessitent la mise en place d'un modèle.

L'analyse des modèles de maintenance conditionnelle existants qui est présentée dans [24] ou [25] constate que beaucoup d'entre eux ont pour but de déterminer les variables d'intérêt à surveiller, implémenter des données et diagnostiquer le système, mais peu de travaux prennent en compte le coût pour optimiser le choix des dates et le seuil préventif  $M$ .

Les modèles d'inspection/remplacement, très étroitement liés à la maintenance conditionnelle, sont généralement basés sur un processus de dégradation à temps continu et états discrets (semi)-Markovien et ont pour but d'identifier les états conduisant à une remise à neuf afin de minimiser un coût de maintenance moyen. Le choix des dates d'inspection (périodiques ou séquentielles) et des états critiques résulte d'optimisation utilisant les méthodes classiques pour les processus de décision Markoviens [10, 12, 15, 17, 18, 26, 28, 33].

D'autres travaux sont concernés par les processus d'usure continue [2, 3, 5, 6, 13, 19-21, 31]. Dans ce contexte, le but est de deux types : soit déterminer le plan de surveillance optimal pour un seuil préventif fixé, soit optimiser le seuil préventif pour un plan d'inspections prédéterminé. L'approche la plus utilisée est de modéliser la durée de vie résiduelle conditionnellement à son état courant et de l'intégrer dans un modèle de décision conjointement à des informations sur le coût des actions de maintenance.

Des travaux plus récents [7, 32] sur les systèmes dynamiques tendent à exploiter l'histoire entière du processus de dégradation pour estimer l'état courant du système et optimiser soit le plan de surveillance [7] soit l'action de maintenance [32]. Le concept de défaillance latente (entre l'apparition d'un défaut et la date effective de défaillance, il existe un délai durant lequel il est possible de détecter l'arrivée de la panne) a été étendu pour rejoindre la maintenance conditionnelle [4, 34]. Pour analyser les politiques de remplacement conditionnelles sur des systèmes surveillés quasi-continuellement (ce qui est possible seulement si la surveillance est peu coûteuse) une approche utilisant un processus de comptage est proposée dans [1] et une approche basée sur une structure faiblement stochastique est développée dans [9].

Dans le cadre de processus d'usure continu et de surveillance par inspections, nous proposons dans ce papier deux nouveaux apports au regard des travaux précédents. Premièrement, nous développons un modèle qui permet de mesurer l'influence conjointe du seuil critique  $M$  et du choix des dates d'inspection sur le coût global du système maintenu. Nous montrons que le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini peut être minimisé par un choix approprié de ces deux variables de décision. Deuxièmement, nous n'imposons pas de plan de surveillance périodique (inspections à intervalles fixes et choisis à l'avance) mais nous autorisons des inspections irrégulières : le choix de l'inspection suivante est basé sur l'information révélée par l'inspection courante.

Le plan adopté dans ce papier est le suivant : le paragraphe 2 est dédié à la description du système. Puis une étude probabiliste de l'évolution du système est menée dans le paragraphe 3 et nous terminons par les calculs d'optimisation de la politique de maintenance dans la partie 4.

## 2. DESCRIPTION DU SYSTÈME

Nous considérons un système qui se détériore de manière aléatoire et qui peut prendre n'importe quel état (espace d'états continu). Ce système est surveillé par le biais d'inspections qui ont lieu à des instants aléatoires (donc irrégulières) choisies au fur et à mesure de l'évolution du système en fonction de son état courant. Lors de chaque inspection le système est susceptible d'être remis à neuf si son état a franchi le seuil critique  $M$ . Nous énonçons en premier lieu les hypothèses faites sur le mode d'évolution du système et sur le plan de maintenance puis nous détaillons la modélisation du processus de dégradation et du plan de surveillance.

### 2.1 Hypothèses générales

Nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

- (1) L'état du système à l'instant  $t$  est traduit par une variable d'âge  $X_t$ . Cette variable aléatoire croît lorsque le système se détériore.

- (2) L'état initial  $X_0$  est égal à 0. Le système est en panne lorsque la variable d'âge est supérieure ou égale au seuil de panne  $L$ .
- (3) Le système n'est pas surveillé en permanence mais son état est observé lors des inspections. Chaque inspection révèle de manière exacte l'état précis du système.
- (4) Une panne n'est détectée que lors d'une inspection. Si le système tombe en panne, il le reste donc jusqu'à l'inspection suivante.
- (5) La remise en état du système est immédiate.

## 2.2 Modèle de dégradation

Entre deux inspections, l'état du système se dégrade aléatoirement, ce qui correspond à une augmentation de la variable d'âge  $X_t$ . La dégradation subie par le système sur cet intervalle peut prendre n'importe quelle valeur positive, c'est donc un variable aléatoire continue.

Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  décrit l'état du système à chaque instant, nous étudierons ce processus dans le paragraphe suivant. Nous nous intéressons ici au processus  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  décrivant l'évolution du système entre deux inspections. Les deux processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  coïncident entre  $t = 0$  et la première remise à neuf du système. Après cet instant, le processus  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  continue à croître au contraire de  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

Le processus  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  est un processus croissant caractérisé par :

- 1)  $\tilde{X}_0 = 0$
- 2) les accroissements de  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  sont indépendants et stationnaires
- 3) pour tous  $0 \leq s < t$ , la variable aléatoire  $\tilde{X}_t - \tilde{X}_s$  suit la loi Gamma de paramètre de forme  $\alpha(t - s)$  et de paramètre d'échelle  $\beta$  :

$$f_{\beta, \alpha(t-s)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(t-s))} \beta^{\alpha(t-s)} x^{\alpha(t-s)-1} e^{-\beta x} \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels positifs.

Un tel processus porte le nom de processus Gamma, c'est un processus de sauts à temps continu dont une trajectoire est illustrée en figure 1. Son évolution dépend de deux paramètres :  $\alpha$  et  $\beta$ . Ces deux paramètres sont des données du problème.

Parmi les processus croissants à accroissements indépendants et stationnaires, le processus Gamma offre l'avantage de disposer d'une loi explicite des accroissements. De plus, une autre caractérisation du processus Gamma est la propriété d'isotropie de ses accroissements, c'est pourquoi il est utilisé pour modéliser l'érosion due au vent ou à l'eau [29, 30].

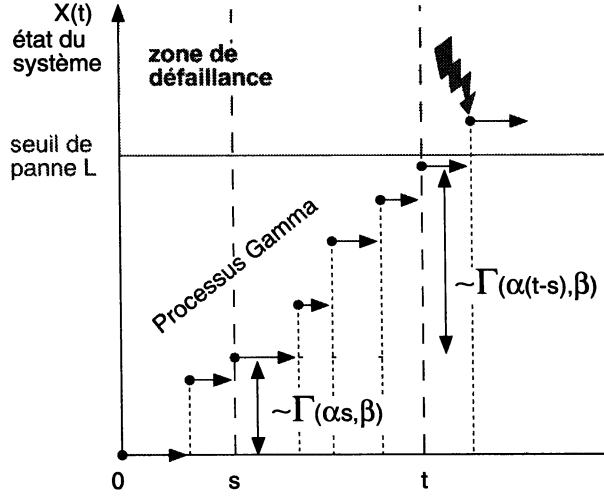


FIG 1. — Processus de dégradation du système

### 2.3 Modélisation du plan de maintenance

La procédure de maintenance regroupe deux prises de décision : le choix de la prochaine inspection et la décision d'intervenir ou non sur le système.

Appelons  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les dates d'inspection ( $T_0 = 0$ ). Lors de chaque inspection  $T_n$ , trois scénarii peuvent se produire :

- le système est trouvé en panne (la variable  $X_{T_n^-}$  est supérieure ou égale à  $L$ ). Une action corrective est alors menée pour remettre le système à neuf. Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est réinitialisé à zéro ( $X_{T_n} = 0$ ),
- le système est trouvé dans un état de marche (en-dessous du seuil  $L$ ) mais au-dessus du seuil critique  $M$ . Une action préventive est alors menée pour remettre le système à neuf. Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est réinitialisé à zéro ( $X_{T_n} = 0$ ),
- le système est trouvé dans un état de marche en-dessous du seuil critique  $M$ . Aucune action n'est lancée.

Notons que la durée de remise à neuf du système étant supposée négligeable,  $X_{T_n^-}$  représente l'état du système avant réparation et  $X_{T_n}$  l'état après réparation. Dans ces trois cas, il faut décider la date de la prochaine inspection.

Nous utilisons pour cela une fonction  $m$  définie de  $[0, M[$  dans  $\mathbb{R}_+$  dans la procédure de décision. Nous supposons que :

- la fonction  $m$  est décroissante
- $\inf_{0 \leq x < M} m(x) = m_{\min} > 0$ .

## UNE POLITIQUE DE MAINTENANCE CONDITIONNELLE CONTINUE

Nous n'avons besoin de définir cette fonction que sur l'intervalle  $[0, M[$  car, au delà du seuil critique  $M$ , le système est remis à neuf et son état est réinitialisé à zéro. La première hypothèse signifie simplement que plus l'état du système lors d'une inspection est dégradé et plus rapidement la prochaine inspection est programmée. La deuxième est une hypothèse technique assurant que le nombre d'inspections sur tout intervalle de temps borné est fini (le processus ponctuel  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de point d'accumulation).

La règle de décision est illustrée par la figure 2.

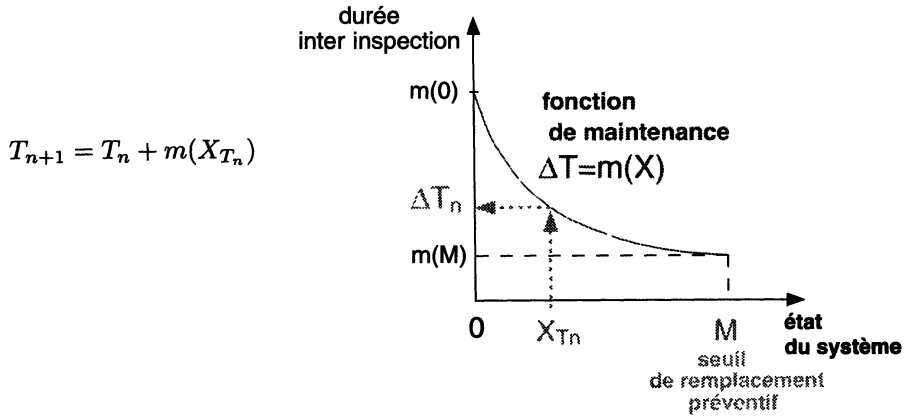


FIG 2. — Règle de décision des dates d'inspection

*En résumé : lors de chaque inspection, si le système se trouve en dessous du seuil critique  $M$  alors l'inspection suivante est programmée par le calcul de la fonction  $m$  en l'état courant du système, sinon le système est remis à neuf et l'inspection suivante est programmée au bout de  $m(0)$ . Les deux actions de maintenance corrective et préventive diffèrent uniquement par leur coût. L'évolution du système maintenu est illustrée sur la figure 3.*

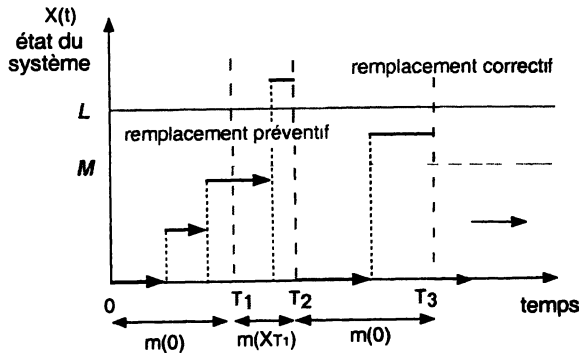


FIG 3. — Evolution du système maintenu



Le choix des dates d'inspection est assujéti à la fonction  $m$ , c'est cette fonction qui devient le « paramètre » d'optimisation.

## 2.4 Construction de la fonction de coût

Pour ce système, nous voulons déterminer le seuil critique  $M$  et la fonction de maintenance  $m$  qui conduisent à un coût global du système le plus faible possible. Le critère retenu est un coût moyen par unité de temps sur un horizon infini. Afin de calculer ce critère, nous introduisons une fonction de coût incluant les coûts d'une inspection  $C_i$ , d'un remplacement préventif  $C_p$ , d'un remplacement correctif  $C_c$  et du coût d'inactivité du système par unité de temps  $C_d$ . Nous définissons les variables aléatoires suivantes :

- $N_i(t)$  le nombre d'inspections sur  $[0, t]$ ,
- $N_p(t)$  le nombre de remplacements préventifs sur  $[0, t]$ ,
- $N_c(t)$  le nombre de remplacements correctifs sur  $[0, t]$ ,
- $d(t) = \int_0^t \mathbb{I}_{\{X_s \geq L\}} ds$  le temps passé en panne  $[0, t]$ .

La fonction de coût global  $C(t)$  est définie comme la somme de tous les coûts induits par le système :

$$C(t) = C_i N_i(t) + C_p N_p(t) + C_c N_c(t) + C_d d(t).$$

Ce coût dépend du seuil critique  $M$  et de la fonction de maintenance  $m(\cdot)$ . Le critère à minimiser est le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini

$$EC_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_0(C(t))}{t}. \quad (1)$$

L'évaluation de ce critère nécessite une étude probabiliste du comportement du système maintenu.

## 3. ÉTUDE DE L'ÉVOLUTION DU SYSTÈME

Nous énonçons dans cette partie des propriétés du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  que nous appliquons ensuite au calcul du critère d'optimisation défini ci-dessus.

### 3.1 Propriétés du processus $(X_t)_{t \geq 0}$

Les trajectoires du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  ne sont pas monotones, au contraire de celles de  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ , puisque l'état du système est réinitialisé lors de chaque remplacement. Elles sont néanmoins monotones croissantes par morceaux entre deux remises à neuf. Ce processus n'est pas markovien car le futur du système après un instant  $t_0$  dépend de la date de l'inspection suivant  $t_0$ . Or, selon la règle de décision adoptée, cette date est choisie en fonction de l'état du système lors de la dernière inspection précédant  $t_0$  donc elle dépend du passé antérieur à  $t_0$  du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Néanmoins, si l'on regarde  $(X_t)_{t \geq 0}$  uniquement aux instants  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut dégager deux propriétés.

1) En premier lieu, on voit qu'aux instants de remise à neuf (corrective ou préventive), il y a oubli du passé : l'état du système est réinitialisé et son évolution après cet instant suit la même loi que l'évolution du système à partir de  $t = 0$  (si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont les instants de remise à neuf, alors les processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(X_{t+S_n})_{t \geq 0}$  ont même loi). On dit que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est régénératif, les instants de remise à neuf  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont appelés instant de régénération.

2) Deuxièmement, on peut voir que l'évolution du système après une inspection ne dépend que de l'état du système lors de cette inspection (conditionnellement à  $X_{T_n}$ , le processus  $(X_{t+T_n})_{t \geq 0}$  a même loi que  $(X_t)_{t \geq 0}$ ). Les instants  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont appelés instants de *semi-régénération* du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Cette propriété se traduit par l'existence d'une chaîne de Markov sous-jacente. Le processus à temps discret décrivant l'état du système lors des inspections  $(Y_n = X_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov à espace d'états continu  $[0, M[$ . Sa densité de transition est

$$P(dy/x) = \bar{F}_{\beta, \alpha m(x)}(M - x) \delta_0(dy) + f_{\beta, \alpha m(x)}(y - x) \mathbb{I}_{\{x \leq y < M\}} dy \quad (2)$$

où

$$\bar{F}_{\beta, \alpha m(x)}(y) = \int_y^{+\infty} f_{\beta, \alpha m(x)}(x) dx.$$

C'est une combinaison convexe d'une densité sur l'intervalle  $[0, M[$  et d'une masse de Dirac en zéro, ce qui traduit le fait qu'à chaque inspection il existe une probabilité non nulle de retour en zéro (probabilité que l'état ait franchi le seuil critique).

La propriété 1 est très intéressante car elle permet de montrer que notre critère d'optimisation est égal à

$$EC_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_0(C(t))}{t} = \frac{\mathbb{E}_0(C(S_1))}{\mathbb{E}_0(S_1)}. \quad (3)$$

Ce résultat permet de restreindre l'étude à un intervalle de temps compris entre deux remises à neuf. Malgré tout, le calcul de  $\mathbb{E}_0(S_1)$  et  $\mathbb{E}_0(C(S_1))$  reste non trivial car l'évolution des processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est imbriquée. Nous aimerions montrer un résultat similaire mais sur un intervalle de temps

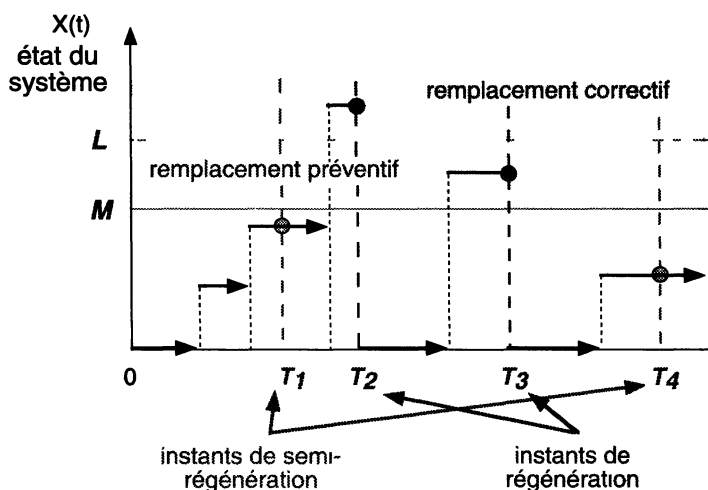


FIG 4. — Instants de régénération et de semi-régénération

plus « simple ». C'est à ce moment que la propriété 2 s'applique. Elle permet en effet de ramener l'étude à un intervalle entre deux inspections (au lieu de deux remplacements) mais en régime stationnaire. Pour établir ce résultat, après nous être assurés de l'existence de la loi stationnaire  $\pi$  de la chaîne  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , nous l'identifions en résolvant l'équation d'invariance

$$\pi(\cdot) = \int_{[0, M[} P(\cdot/x) \pi(dx). \quad (4)$$

Nous exhibons une solution de cette équation sous la forme d'une somme infinie d'intégrales de densités Gamma sur des domaines imbriqués. Pour le calcul pratique de la loi  $\pi$  nous avons recours à un schéma d'intégration numérique.

#### 4. OPTIMISATION DE LA POLITIQUE DE MAINTENANCE

A ce stade du travail, il reste à exploiter les propriétés du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  énoncées dans la partie précédente afin de simplifier l'expression du critère d'optimisation, puis à effectuer les calculs. L'optimisation consiste ici à trouver le couple  $(m, M)$  qui minimise  $EC_\infty$ .

#### 4.1 Calcul de la fonction de coût

Le résultat énoncé dans ce paragraphe pour notre modèle s'applique dans un cadre plus général, il est démontré dans [8].

PROPOSITION 4.1. — *On a :*

$$EC_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_0(C(t))}{t} = \frac{\mathbb{E}_\pi(C(T_1))}{\mathbb{E}_\pi(T_1)}.$$

On obtient pour le calcul des différentes actions :

$$1) \mathbb{E}_\pi(N_i(T_1)) = 1.$$

$$\begin{aligned} 2) \mathbb{E}_\pi(N_p(T_1)) &= \mathbb{P}_\pi(M \leq X_{T_1^-} < L) \\ &= \int_{[0, M[} (\bar{F}_{\beta, \alpha m(x)}(M - x) - \bar{F}_{\beta, \alpha m(x)}(L - x)) \pi(dx). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \mathbb{E}_\pi(N_c(T_1)) &= \mathbb{P}_\pi(X_{T_1^-} \geq L) \\ &= \int_{[0, M[} \bar{F}_{\beta, \alpha m(x)}(L - x) \pi(dx). \end{aligned}$$

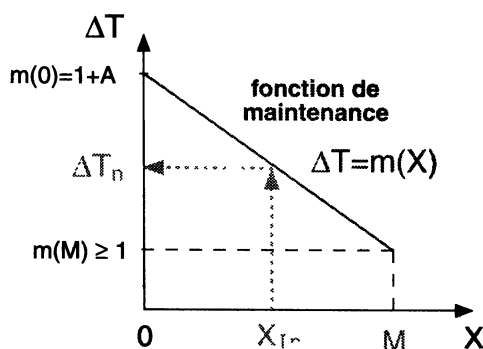
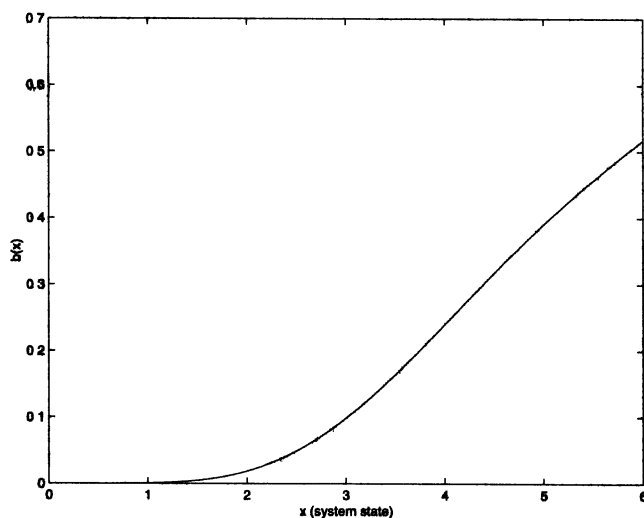
$$\begin{aligned} 4) \mathbb{E}_\pi(d(T_1)) &= \int_{[0, M[} \mathbb{E}_x \left( \int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{X_s \geq L\}} ds \right) \pi(dx) \\ &= \int_{[0, M[} \left( \int_0^{m(x)} \mathbb{P}_x(X_s \geq L) ds \right) \pi(dx) \\ &= \int_{[0, M[} \left( \int_0^{m(x)} \bar{F}_{\beta, \alpha s}(L - x) ds \right) \pi(dx). \end{aligned}$$

$$5) \mathbb{E}_\pi(T_1) = \int_{[0, M[} m(x) \pi(dx).$$

#### 4.2 Résultats numériques

Nous présentons le cas d'un système de paramètres de détérioration  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$  ce qui correspond à une dégradation moyenne de un par unité de temps. Nous avons choisi une fonction de maintenance sous la forme  $m(x) = 1 + n(x)$  avec  $n(\cdot)$  une fonction linéaire. Les paramètres à optimiser sont le seuil critique  $M$  et les deux paramètres caractérisant la fonction  $m$  :  $A$  l'ordonnée à l'origine et  $B$  tel que  $n(B) = 0$ .

La figure 6 représente le comportement de la partie densité  $b$  de la loi stationnaire de la chaîne  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .


 FIG 5. — Fonction  $m$ 

 FIG 6. — Partie densité  $b$  de la loi stationnaire

Nous avons mené les calculs avec  $L = 12$ ,  $C_i = 2$ ,  $C_c = 2$ ,  $C_p = 4$  et  $C_d = 10$ . Une procédure d'optimisation numérique donne pour valeurs optimales :  $A^* = 6.56$ ,  $B^* = 10$  et  $M^* = 5.8$  pour un coût minimal de 0.4895.

La figure 7(a) représente les courbes iso-coût lorsque le seuil critique  $M$  est fixé à 4. Le coût optimal est alors de 0.4996, il est réalisé pour  $A = 6$  et presque indépendamment de la valeur de  $B$ . Avec cette politique, la première inspection a lieu à  $T_1 = 7$ , à cette date, la probabilité d'avoir franchi le seuil critique  $M$  est de 90 %. Ainsi, presque chaque inspection conduit à un remplacement préventif. La simulation du comportement du système dans ce cas illustre ce phénomène en figure 8. Les croix y représentent les inspections sans remplacement, les losanges les remplacements préventifs et les ronds les remplacements correctifs.

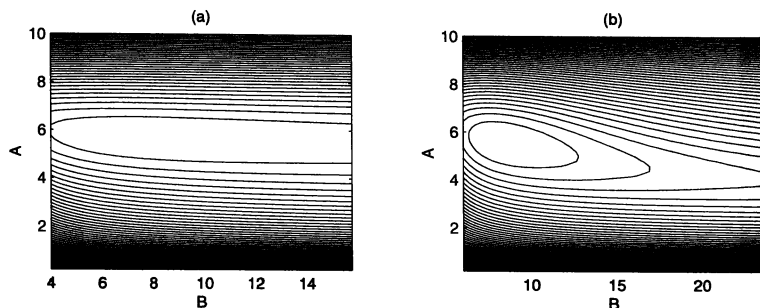
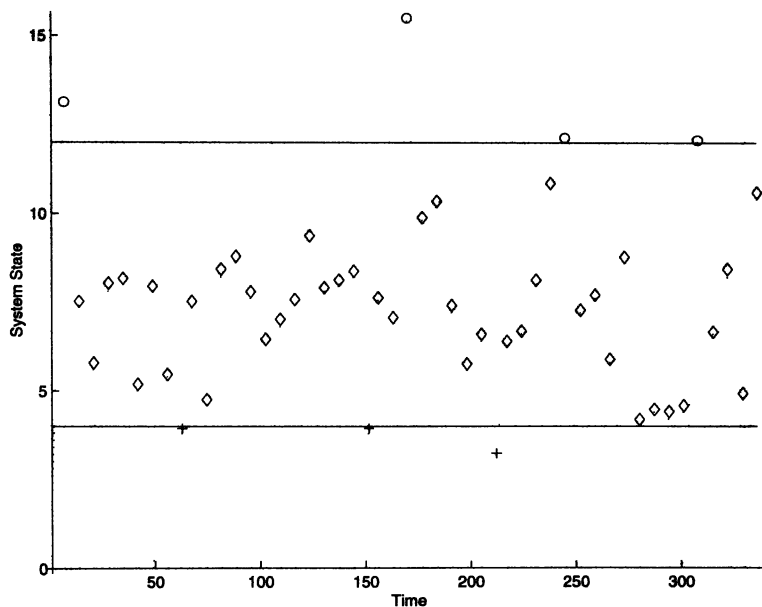


FIG 7. — Courbes iso-coût


 FIG 8. — Simulation du comportement du système lorsque  $M = 4$ 

Dans ce cas, la politique optimale (sous contrainte  $M = 4$ ) tend à être une politique de remplacement systématique. L'optimisation a alors uniquement pour but de régler la période de remplacement (qui correspond à  $A$ ). Cette configuration correspond à un seuil critique trop bas. Ceci montre que la politique de remplacement systématique n'est pas le meilleur choix.

La figure 7(b) représente les courbes iso-coût lorsque le seuil critique  $M$  est fixé à 6 c'est-à-dire proche de la valeur optimale. Le coût minimal sous cette contrainte est de 0.4896. On peut voir qu'il est atteint pour des valeurs de  $A$  et  $B$  proches de  $A^*$  et  $B^*$ . Cette fois-ci, la politique autorise plusieurs

inspections avant le premier remplacement. On peut voir sur la figure 9 que plusieurs inspections ne mènent à aucun remplacement.

La dégradation du système est surveillée par les inspections afin de prendre la décision au meilleur moment. Le coût optimal sous  $M = 6$  est plus faible que le coût optimal sous  $M = 4$ .

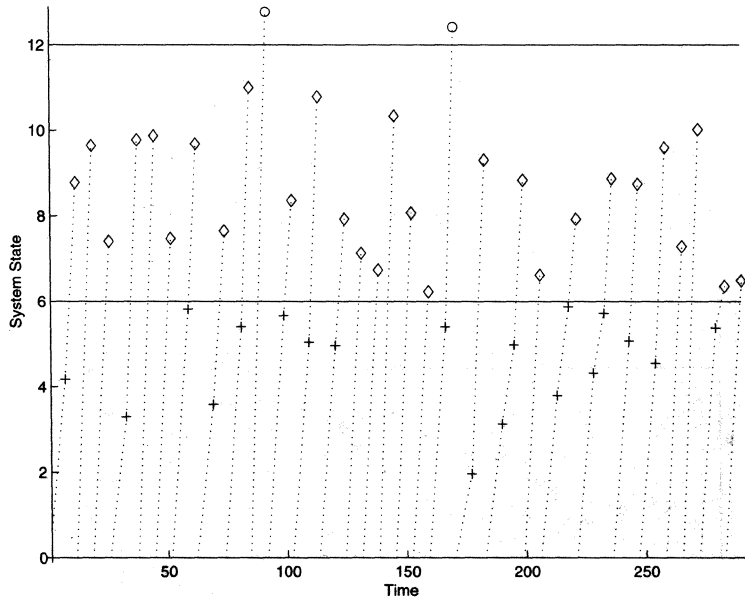


FIG 9. — Simulation du comportement du système lorsque  $M = 6$

## 5. CONCLUSION

Nous proposons dans ce papier un modèle qui permet de mesurer les effets d'une politique de maintenance à intervalles irréguliers en tenant compte de l'état courant du système dans le choix de l'inspection suivante. Nous exhibons une expression du coût en fonction de la loi stationnaire du processus décrivant l'état du système. Nous montrons l'applicabilité de notre modèle sur un exemple.

## RÉFÉRENCES

- [1] AVEN T., Condition Based Replacement Policies - A Counting Process Approach, *Reliability Engineering and System Safety*, 51, 275-281, 1996.

- [2] BARBERA F. and SCHNEIDER H. and KELLE P., A Condition Based Maintenance Model with Exponential Failures and Fixed Inspection Intervals, *Journal of the Operational Research Equipment*, 47, 8 :1037–1045, 1996.
- [3] MCCALL J.J., Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment :A Survey, *Management Science*, 11, 5, 493–524, 1965.
- [4] CHELBI A. and AIT-KADI D., An Optimal Inspection Strategy for Randomly Failing Equipment, *Reliability Engineering and System Safety*, 63, 127–131, 1999.
- [5] CHRISTER A.H. and WANG W., A Model of Condition Monitoring of a Production Plant, *International Journal of Production Research*, 30, 9, 2199–2211, 1992.
- [6] CHRISTER A. H., Prototype Modelling of Irregular Condition Monitoring of Production Plant, *IMA*, 3, 219–232, 1992.
- [7] CHRISTER A.H. and WANG W., A Simple Condition Monitoring Model for a Direct Monitoring Process, *European Journal of Operational Research*, 82, 258–269, 1995.
- [8] CHRISTER A.H. and WANG W. and SHARP J.M., A State Space Condition Monitoring Model for Furnace Erosion Prediction and Replacement, *European Journal of Operational Research*, 101, 1–14, 1997.
- [9] COCOZZA-THIVENT C., Convergence de fonctionnelle de processus semi-régénératifs, Prépublications de l'Université de Marne la Vallée 02/2000, March, 2000.
- [10] COOLEN F.P.A. and DEKKER R., Analysis of a 2-Phase Model for Optimization of Condition-Monitoring Intervals, *TRANSRELIA*, 44, 3, 505–511, sep, 1995.
- [11] COOLEN F.P.A. and COOLEN-SCHRIJNER P., Condition Monitoring : aNew Perspective, *Journal of the Operational Research Equipment*, 51, 3, 311–319, 2000.
- [12] HONG H.P., Inspection and Maintenance Planning of Pipeline under External Corrosion Considering Generation of New Defects, *Structural Safety*, 21, 203–222, 1999.
- [13] HONTELEZ J.A.M. and BURGER H.H. and WIJNMALEN J.D., Optimum Condition-Based Maintenance Policies for Deteriorating Systems with Partial Information, *Reliability Engineering and System Safety*, 51, 267–274, 1996.
- [13] HOPP W.J. and KUO Yar-Lin, An Optimal Structured Policy for Maintenance of Partially Observable Aircraft Engine Components, *Naval Research Logistics*, 45, 335–352, 1998.
- [14] JEANG A., Tool Replacement Policy for Probabilistic Tool Life and Random Wear Process, *QREI*, 15, 205–212, 1999.
- [15] LAM C.T. and YEH R.H., Optimal Maintenance Policies for Deteriorating Systems Under Various Maintenance Strategies, *IEEE Transactions on Reliability*, 43, 423–430, 1994, sep.
- [16] MINE H. and KAWAI H., An Optimal Inspection and Replacement Policy, *IEEE Transactions on Reliability*, R-24, 5, 305–309, 1975.
- [17] van NOORTWIJK J. and COOKE R. and MISIEWICZ J.K., A Characterization of Generalized Gamma Processes in Terms of Isotropy, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1994,
- [18] van NOORTWIJK J. and KLATTER H.E., Optimal Inspection Decisions for the Block Mats of the Eastern-Scheldt Barrier, *Reliability Engineering and System Safety*, 65, 203–211, 1999.
- [19] OHNISHI M. and KAWAI H. and MINE H., An Optimal Inspection and Replacement Policy for a Deteriorating System, *Journal of Applied Probability*, 23, 973–988, 1986.



- [18] PARK K.S., Optimal Continuous-Wear Limit Replacement under Periodic Inspections, *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 1, 97–102, 1988.
- [20] PARK K.S., Optimal Wear-Limit Replacement with Wear-Dependent Failures, *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 1, 293–294, 1988.
- [21] PELLEGRIN C., Choice of a Periodic On-Condition Maintenance Policy, *International Journal Production Research*, 30, 5, 1153–1173, 1992.
- [22] PIERSKALLA W.P. and VOELKER J.A., A Survey of Maintenance Models : The Control and Surveillance of Deteriorating Systems, *Naval Research Logistics Quarterly*, 23, 353–388, 1979.
- [23] RAO B.K.N., *Handbook of Condition Monitoring*, Elsevier, 1996.
- [24] SCARF P.A., On the Modelling of Condition Based Maintenance, *Advances in Safety and Reliability - Proceedings of the ESREL'97 International Conference on Safety and Reliability - 17-20 june, 1997, Lisbon, Portugal - Vol. 3*, Guedes Soares, C., Pergamon, 1701–1708, 1997.
- [25] SCARF P.A., On the Application of Mathematical Models in Maintenance, *European Journal of Operational Research*, 99, 3, jun, 493–506, 1997.
- [26] TIJMS H.C. and van der DUYN SCHOUTEN F.A., A Markov Decision Algorithm for Optimal Inspections and Revisions in a Maintenance System with Partial Information, *European Journal of Operational Research*, 21, 245–253, 1984.
- [27] VALDEZ-FLORES C. and FELDMAN R.M., A Survey of Preventive Maintenance Models for Stochastically Deteriorating Single-Unit Systems, *Naval Research Logistics*, 36 :419–446, 1989.
- [28] VALDEZ-FLORES C. and FELDMAN R.M., An Improved Policy Iteration Algorithm for Semi-Markov Maintenance Problem, *IIE Transactions*, 24, 55–63, March, 1992.
- [29] WANG W., A Model to Determine the Optimal Critical Level and the Monitoring Intervals in Condition-Based Maintenance, *International Journal of Production Research*, 38, 6, 1425–1436, 2000.
- [30] WANG W. and CHRISTER A.H., Towards a General Condition Based Maintenance Model for a Stochastic Dynamic System, *Journal of the Operational Research Equipment*, 51, 2, 145–155, 2000.
- [31] WIJNMALEN D.J.D. and HONTELEZ J.A.M., Review of a Markov Decision Algorithm for Optimal Inspections and Revisions in a Maintenance System with Partial Information, *European Journal of Operational Research*, 62, 96–104, 1992.
- [32] WILLIAMS G.B. and HIRANI R.S., A Delay Time Multi-Level On-Condition Preventive Maintenance Inspection Model Based On Constant Base Interval Risk When Inspection Detects Pending Failure, *Int. J. Mach. Manufact.*, 37(6), 823–836, 1997.