

JACQUES ISTAS

Identification des paramètres d'un processus gaussien fractionnaire

Journal de la société française de statistique, tome 141, n° 1-2 (2000), p. 149-166

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2000__141_1-2_149_0

© Société française de statistique, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES D'UN PROCESSUS GAUSSIEN FRACTIONNAIRE

Jacques ISTAS¹

Table des matières

1	Introduction.....	149
2	Processus gaussiens unifractionnaires	151
2.1	Modèle	151
2.1.1	Mouvements browniens fractionnaires.....	151
2.1.2	Bruits blancs filtrés.....	153
2.2	Identification.....	154
3	Processus gaussiens multifractionnaires	157
3.1	Introduction	157
3.2	Mouvements browniens multifractionnaires	158
3.2.1	Cas d'une fonction C^1	158
3.2.2	Cas d'une fonction constante par morceaux	159
A	Longue portée et auto-similarité	160
A.1	Auto-similarité locale et auto-similarité.....	160
A.2	Auto-similarité locale et longue portée.....	161
A.2.1	Deux exemples	161

1. INTRODUCTION

[Bachelier (1900)] avait proposé dès 1900 de modéliser les cours de la Bourse par un mouvement brownien. Rappelons que le mouvement brownien est l'unique² processus gaussien centré auto-similaire, à accroissements stationnaires, et dont la variance des accroissements est proportionnelle au pas de cet accroissement : $\text{var}(B(t+h) - B(t))^2 = C|h|$. A partir de cette modélisation

1. Département IMSS BSHM UPMF F-38000 Grenoble

2. A une constante multiplicative près.

historique de L. Bachelier ont été proposés des modèles fondés sur l'utilisation d'équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien. Le plus célèbre de ces modèles est celui de [Black et Scholes (1973)] qui valut à Merton et Scholes le prix Nobel en 1997. Sous certaines conditions de régularité, une équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement brownien a des accroissements dont la variance est proportionnelle au pas de ces accroissements lorsque ce pas tend vers zéro. Comme le montre J-M Bardet dans ce même numéro à partir de données boursières, cette condition sur la variance des accroissements est rarement réalisée en pratique. Notant $X(t)$ un cours boursier, il semble plus réaliste de supposer que la variance des accroissements de X suit approximativement une loi en puissance : $\text{var}(X(t+h) - X(t))^2 \sim C|h|^{2\alpha}$, quand $h \rightarrow 0$, et avec $0 < \alpha \leq 1$. Le cas $\alpha = 1/2$ ne serait donc qu'un cas particulier.

Pour un $0 < \alpha \leq 1$ donné, il existe un unique³ processus gaussien centré auto-similaire, à accroissements stationnaires, et dont la variance des accroissements suit exactement une loi de puissance α : $\text{var}(B_\alpha(t+h) - B_\alpha(t))^2 = C|h|^{2\alpha}$. Il s'agit du mouvement brownien fractionnaire introduit par [Kolmogorov (1940)] et popularisé par [Mandelbrot et Van Ness (1968)].

Notre article propose de faire une synthèse de l'identification des processus gaussiens fractionnaires. Nous commencerons donc par des rappels sur les mouvements browniens fractionnaires et l'estimation du paramètre α d'un mouvement brownien fractionnaire. Nous étudierons une première classe de processus, les bruits blancs filtrés. Ces processus ont la particularité de ressembler localement en tout point à un brownien fractionnaire : ils sont localement auto-similaires et admettent un brownien fractionnaire comme processus tangent. L'estimation du paramètre α peut être effectuée dans un cadre semi-paramétrique à partir de l'observation d'une unique trajectoire discrétisée, et la vitesse d'estimation atteint asymptotiquement la borne de Cramer-Rao du modèle paramétrique associé au mouvement brownien fractionnaire. Nous renvoyons à l'article [Cœurjolly (2000b)] pour tout ce qui concerne les simulations des processus gaussiens fractionnaires ainsi que les études numériques des estimateurs.

En imposant à l'exposant α d'être constant le long de la trajectoire, on impose en fait une condition de stationnarité qui n'a pas lieu d'être, que ce soit d'un point de vue théorique ou d'un point de vue appliqué. Nous construisons donc des processus gaussiens où l'exposant α est une fonction qui varie d'un point à un autre. Deux types de variations, usuelles mais néanmoins opposées dans l'esprit, seront étudiées. Dans le premier cas, nous considérons une variation régulière : l'exposant α variera de façon continûment différentiable. Dans le second cas, nous considérons une variation avec des changements de régime brusques : l'exposant α sera une fonction constante par morceaux. Dans les deux cas, nous indiquons comment estimer la fonction α .

3. A une constante multiplicative près.

2. PROCESSUS GAUSSIENS UNIFRACTIONNAIRES

2.1 Modèles

2.1.1. Mouvements browniens fractionnaires

Rappelons que la donnée d'une fonction de covariance $R(t, s)$ permet de définir un unique processus gaussien centré tel qu'il admette cette fonction $R(t, s)$ comme fonction de covariance. Ainsi, pour toute fonction (éventuellement complexe) $f(t, \lambda)$ de carré intégrable, on peut associer un unique processus gaussien centré par la donnée de la fonction de covariance suivante :

$$R(t, s) = \int_{\mathbf{R}} f(t, \lambda) \overline{f(s, \lambda)} d\lambda. \quad (1)$$

En particulier, le choix $f(t, \lambda) = \mathbf{1}_{[0, t]}(\lambda)$, $t \geq 0$ permet de définir le mouvement brownien sur $\mathbf{R}^+$. En effet :

$$\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{[0, t]}(\lambda) \mathbf{1}_{[0, s]}(\lambda) d\lambda = \inf(t, s).$$

Le processus X défini par la fonction $f(t, \lambda)$ via la fonction de covariance (1) admet une représentation sous forme d'intégrale stochastique par rapport à une mesure brownienne W ⁴ :

$$X(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t, \lambda) dW(\lambda). \quad (2)$$

Nous pouvons définir la transformée de Fourier $\widehat{W}$ de la mesure brownienne par :

$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\lambda) dW(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}} f(\lambda) d\widehat{W}(\lambda),$$

où $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier d'une fonction f arbitraire dans $L^2(\mathbf{R})$. L'identité de Parseval montre alors que $\widehat{W}$ et W ont même loi et que la représentation (2) peut être vue dans le domaine de Fourier :

$$X(t) = \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(t, \lambda) dW(\lambda). \quad (3)$$

Remarquons alors qu'il existe une constante $C(\alpha)$ telle que, pour $0 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 1/2$ ⁵ :

$$\frac{e^{it\lambda} - 1}{|\lambda|^{\frac{1}{2} + \alpha}}(s) = C(\alpha) \left(|t - s|^{\alpha - \frac{1}{2}} - |s|^{\alpha - \frac{1}{2}} \right). \quad (4)$$

4. Pour être précis, il faut dire que le brownien sur $\mathbf{R}^-$ est une copie indépendante du brownien sur $\mathbf{R}^+$.

5. Pour $\alpha = 1/2$, cette transformée de Fourier vaut $\mathbf{1}_{[0, t]}$.

Pour tout $0 < \alpha < 1$, nous en déduisons ([Mandelbrot et Van Ness (1968)]) la représentation « moyenne mobile » du mouvement brownien fractionnaire⁶ :

$$B_\alpha(t) = C \int_{\mathbf{R}} \left(|t-s|^{\alpha-\frac{1}{2}} - |s|^{\alpha-\frac{1}{2}} \right) dW(s), \quad (5)$$

et la représentation harmonique :

$$B_\alpha(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} C' \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{it\lambda} - 1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}+\alpha}} d\widehat{W}(\lambda). \quad (6)$$

Dans la version que nous donnons, il existe donc seulement une égalité en loi entre ces deux représentations du brownien fractionnaire (à condition bien sûr d'avoir choisi correctement C et C' en fonction de (4)). Un résultat de [Cohen (1999)] montre qu'il existe en fait une égalité p.s.. Notons qu'il existe un certain flou dans la définition du brownien fractionnaire. Ainsi, nous parlerons de brownien fractionnaire lorsque les constantes C et C' sont libres, et de brownien fractionnaire standard⁷ lorsque la constante C vaut 1. Pour être exhaustif, il faut mentionner le cas $\alpha = 1$:

$$B_1(t) \stackrel{def}{=} V t,$$

où V est une variable gaussienne centrée. Nous pouvons alors affirmer que les browniens fractionnaires sont les seuls processus gaussiens centrés auto-similaires :

$$(B_\alpha(\lambda t))_{t \in \mathbf{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lambda^\alpha (B_\alpha(t))_{t \in \mathbf{R}} \quad \forall \lambda > 0,$$

et à accroissements stationnaires :

$$(B_\alpha(t+s) - B_\alpha(t))_{s \in \mathbf{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_\alpha(s))_{s \in \mathbf{R}}.$$

Les browniens fractionnaires sont höldériens en moyenne quadratique :

$$\mathbf{E} \left(\frac{B_\alpha(t+h) - B_\alpha(t)}{|h|^{2\alpha}} \right)^2 = C^2.$$

Un résultat déduit de [Benassi *et al.* (1996)] donne un renseignement trajectorien plus fin : il existe une fonction $c(t)$ telle que :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{B_\alpha(t+\varepsilon) - B_\alpha(t)}{|\varepsilon|^\alpha \sqrt{-\log \log |\varepsilon|}} = c(t).$$

6. Avec la convention que pour $\alpha = 1/2$, cette intégrale vaut $\int_0^t dW(\lambda)$ pour $t \geq 0$ et $-\int_t^0 dW(\lambda)$ pour $t < 0$.

7. Une définition différente du brownien fractionnaire standard est donnée par la condition $\mathbf{E} B_\alpha^2(1) = 1$.

Soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une base de $L^2(\mathbf{R})$. Il existe une famille de variables gaussiennes $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ centrées, réduites et indépendantes telles que la mesure brownienne se décompose (e.g. [Neveu (1968)]) :

$$dW(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n e_n(\lambda) d\lambda .$$

Un processus de la forme (2) admet donc deux décompositions de type Karhunen-Loève données par :

$$X(t) = \sum_{n \geq 0} \langle f(t, \cdot), e_n \rangle_{L^2} \varepsilon_n ,$$

ou

$$X(t) = \sum_{n \geq 0} \langle \hat{f}(t, \cdot), \hat{e}_n \rangle_{L^2} \varepsilon_n ,$$

ces deux égalités pouvant être prises aux sens L^2 et p.s.. En particulier, nous pouvons choisir comme base une base d'ondelettes de Lemarié-Meyer ([Meyer (1990)]). Notons $\psi_{j,k}, j \geq 0, k \in \mathbf{Z}$ cette base. Nous obtenons une décomposition du brownien fractionnaire qui nous sera utile :

$$B_\alpha(t) = \sum_{j \geq 0, k \in \mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{it\lambda} - 1}{|\lambda|^{\frac{1}{2} + \alpha}} \widehat{\psi_{j,k}}(\lambda) d\lambda \varepsilon_{j,k} . \quad (7)$$

En effet, les propriétés de localisations et de moments nuls des fonctions $\psi_{j,k}$ serviront dans certaines généralisations que nous aborderons dans cet article.

2.1.2 Bruits blancs filtrés

Plusieurs généralisations du brownien fractionnaire sont envisageables. Dans cet article, nous restons dans un cadre gaussien. Nous gardons des processus centrés par commodité, mais il n'y a là aucune nécessité. Nous voulons généraliser le brownien fractionnaire tout en gardant les propriétés locales. Il serait possible de se restreindre aux processus à accroissements stationnaires, mais cette condition est inutile. Nous allons imposer à nos processus de « ressembler localement » à un brownien fractionnaire, ce que nous écrirons sous forme d'une condition d'auto-similarité locale :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{X(t+hu) - X(t)}{h^\alpha} \right)_{u \in \mathbf{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_\alpha(u))_{u \in \mathbf{R}} . \quad (8)$$

Il faut noter à ce stade qu'il n'y a rien de surprenant à trouver un brownien fractionnaire comme processus tangent à un processus donné. En effet, supposons l'existence d'un processus tangent $T(u)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{X(t+hu) - X(t)}{h^\alpha} \right)_{u \in \mathbf{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (T(u))_{u \in \mathbf{R}} .$$

On vérifie alors facilement que T est gaussien et auto-similaire d'exposant α . Il suffit alors que la limite soit à accroissements stationnaires⁸ pour qu'elle soit un brownien fractionnaire. En particulier, lorsque X est dérivable ($\alpha = 1$), le processus tangent est $T(u) = uX'(t)$ qui est bien un brownien fractionnaire.

Nous imposons pour l'instant à l'exposant α d'être le même en tout point t , un tel processus sera dit unifractonnaire. Une classe de processus gaussiens unifractonnaires est donnée par les bruits blancs filtrés ([Benassi et al. (1998a)]) :

$$X(t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{a(t, \lambda)(e^{it\lambda} - 1)}{|\lambda|^{\frac{1}{2} + \alpha}} d\widehat{W}(\lambda), \quad (9)$$

où la fonction $a(t, \lambda)$ vérifie en particulier la condition

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} a(t, \lambda) = a_{\infty}(t). \quad (10)$$

Volontairement, nous ne donnons pas la liste des conditions techniques sur la fonction $a(t, \lambda)$, qui assurent que X vérifie (8), renvoyant pour cela à [Benassi et al. (1998a)].

2.2. Identification

Le paramètre α du brownien fractionnaire est le principal paramètre d'intérêt. Notons néanmoins que la fonction a_{∞} définie par (10) présente un intérêt dans de nombreuses situations. Citons ([Istas (1996)]) pour l'estimation d'intégrales de processus ou l'estimation du coefficient de diffusion dans un modèle $dX_t = m(t, X_t)dt + \sigma(t)dW_t$, où σ joue le rôle de a_{∞} . Dans un souci de concision, nous n'indiquerons que brièvement comment estimer cette fonction a_{∞} , renvoyant à [Istas (1996)] pour une étude complète.

Commençons par l'estimation de α . Deux possibilités s'offrent à nous :

- cadre paramétrique. On suppose que le processus observé est exactement un brownien fractionnaire standard. Une méthode de type maximum de vraisemblance approchée permet alors de construire un estimateur de α ([Peltier et Lévy-Vehel (1994)]) qui a été généralisé par [Cœurjolly (2000a)]. L'idée est la suivante. On introduit la variable :

$$V_n = \frac{1}{n-2} \sum_{p=0}^{n-2} \left(X\left(\frac{p+1}{n}\right) - 2X\left(\frac{p}{n}\right) + X\left(\frac{p-1}{n}\right) \right)^2.$$

La raison pour laquelle l'accroissement $X\left(\frac{p+1}{n}\right) - 2X\left(\frac{p}{n}\right) + X\left(\frac{p-1}{n}\right)$ est utilisé sera donnée ultérieurement. Posons :

$$g(n, \alpha) = \mathbf{E}V_n.$$

8. Ce qui n'est pas toujours vérifié.

On vérifie effectivement que la fonction g ne dépend que de α et de n . L'estimateur de α est alors donné par la fonction inverse de g :

$$\hat{\alpha}_n = g^{-1}(V_n).$$

On montre alors ([Peltier et Lévy-Vehel (1994)], [Cœurjolly (2000a)]) que $\hat{\alpha}_n$ est consistant et converge avec vitesse $\sqrt{n} \log n$ vers une loi normale. Il est cependant clair que cette méthode d'estimation ne s'adapte pas au cas semi-paramétrique.

- cadre semi-paramétrique. On suppose que le processus observé est un bruit blanc filtré. La fonction $a(t, \lambda)$ est évidemment inconnue.

Nous sommes donc dans un cadre semi-paramétrique. On suppose que l'on dispose d'une observation $\left(X\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=0,\dots,n}$ d'une unique trajectoire discrétisée sur l'intervalle $[0, 1]$. Une première idée consiste à utiliser des variations quadratiques :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(X\left(\frac{k+1}{n}\right) - X\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2.$$

En effet, on montre (e.g. [Guyon et Leon (1989)]) que $n^{2\alpha-1}V_n$ converge p.s. vers une constante c quand $n \rightarrow +\infty$. Ceci constitue une extension des résultats de Lévy sur le brownien et de Baxter sur des généralisations du brownien (e.g. [Guyon et Leon (1981), ch 5]). Il suffit alors de prendre le rapport entre les variations quadratiques aux pas n et $n/2$ pour obtenir un estimateur consistant de α . Plus précisément, on choisira :

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{V_{n/2}}{V_n}.$$

Les problèmes commencent lorsque l'on veut une vitesse de convergence. En effet, [Guyon et Leon (1989)] montrent que, pour $0 < \alpha < 3/4$, les variations quadratiques suivent un théorème de la limite centrale classique avec vitesse de convergence en $\sqrt{n}$ et loi limite gaussienne. En revanche, pour $\alpha > 3/4$, les variations quadratiques suivent un théorème de la limite centrale non-classique avec vitesse de convergence en $n^{2-2\alpha}$ et loi limite non-gaussienne. Pour retrouver un comportement classique avec vitesse en $\sqrt{n}$ et loi limite gaussienne, [Istas et Lang (1994)], [Istas et Lang (1997)] proposent d'introduire des variations quadratiques généralisées :

$$\Delta_p X = \sum_{k=0}^K a_k X\left(\frac{k+p}{n}\right), \quad (11)$$

$$V_n = \sum_{p=0}^{n-K} (\Delta_p X)^2, \quad (12)$$

où la suite $a_k, k = 0, \dots, K$ vérifie :

$$\sum_{k=0}^K a_k = 0, \\ \sum_{k=0}^K k a_k = 0.$$

Par exemple, la suite $(1, -1)$ ne vérifie que la première condition, alors que la suite $(1, -2, 1)$ vérifie ces deux conditions.

Il est en fait inutile de supposer que le processus est centré pour obtenir les résultats précédents. Supposons que l'espérance de $X(t)$ soit $m(t)$. Le processus $\tilde{Y}(t) = X(t) - m(t)$ est centré. Notons V_n les variations quadratiques généralisées de X :

$$V_n = \sum_{p=0}^{n-K} (\Delta_p Y)^2 + \sum_{p=0}^{n-K} (\Delta_p m)^2 + 2 \sum_{p=0}^{n-K} (\Delta_p Y \Delta_p m).$$

La condition $m \in C^2$ suffira pour que les quadratiques généralisées de $Y(t)$ dominent celles de X , y compris pour les questions de vitesse de convergence.

Nous obtenons donc ensuite un estimateur de α fondé sur les variations quadratiques généralisées :

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{V_{n/2}}{V_n}. \quad (13)$$

Cet estimateur est consistant et converge avec vitesse en $\sqrt{n}$ vers une loi limite gaussienne ([Istas et Lang (1997)], [Benassi *et al.* (1998a)]).

Nous pouvons maintenant esquisser l'estimation de la fonction a_∞ définie en (10). Donnons-nous une fonction ϕ au moins C^1 . Définissons l'accroissement associé à ϕX :

$$\Delta_p \phi X = \sum_{k=0}^K a_k \phi \left(\frac{k+p}{n} \right) X \left(\frac{k+p}{n} \right),$$

et la variation généralisée associée à ϕX :

$$V_n(\phi) = \sum_{p=0}^{n-K} \Delta_p X \Delta_p \phi X.$$

On montre ([Istas (1996)], [Benassi *et al.* (1998a)]) que $n^{2\alpha-1} V_n(\phi)$ converge p.s. vers $\int_0^1 \phi(t) a_\infty^2(t) dt$. Il reste ensuite à « dérouler » une méthode

d'estimation non-paramétrique, en utilisant par exemple pour ϕ une approximation de l'identité et en réglant le paramètre d'échelle ([Istas (1996)]). Deux cas sont à distinguer selon que α est connu *a priori* ou non.

Notons que ces modèles de bruits blancs filtrés ainsi que les méthodes d'estimations qui viennent d'être présentés se généralisent en dimension supérieure ([Léger et Pontier (1999)]).

D'autres méthodes d'estimation du paramètre α sont envisageables : citons par exemple [Hall et Wood (1993)] pour un estimateur fondé sur la dimension de boîtes, [Hall et al. (1994)] pour un estimateur fondé sur les nombres de franchissements du processus. Le livre de [Beran (1994)] contient une liste d'estimateurs courants : méthode R/S, variogramme, corrélogramme, log-périodogramme, maximum de vraisemblance (estimateur de Whittle). Lorsque l'on étudie ces estimateurs, il faut toutefois garder à l'esprit la confusion courante entre auto-similarité locale et longue mémoire (cf. appendice de cet article).

Il se pose alors la question du choix d'un estimateur « optimal ». En d'autres termes, on est naturellement amené à étudier la borne de Cramer-Rao du problème.

Nous obtenons alors deux résultats.

- On veut estimer le paramètre α d'un brownien fractionnaire standard. La borne de Cramer-Rao est en $O(n^{-1} \log^2 n)$ ([Dahlhaus (1989)], [Coëurjolly et Istas (2000)]). L'estimateur paramétrique de [Peltier et Lévy-Vehel (1994)], [Coëurjolly (2000a)] atteint cette borne.
- On veut estimer le paramètre α d'un brownien fractionnaire. La borne de Cramer-Rao est en $O(n^{-1})$ ([Coëurjolly et Istas (2000)]). L'estimateur semi-paramétrique (13) de [Istas et Lang (1997)] atteint cette borne.

3. Processus gaussiens multifractionnaires

3.1. Introduction

Nous nous intéressons toujours à des processus localement auto-similaires et admettant un brownien fractionnaire tangent, mais nous n'imposons plus à l'exposant α d'être constant le long de la trajectoire. Nous voulons étudier des processus vérifiant :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{X(t+hu) - X(t)}{h^{\alpha(t)}} \right)_{u \in \mathbf{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_{\alpha(t)}(u))_{u \in \mathbf{R}}. \quad (14)$$

Une première question qui se pose est d'abord de savoir si de tels processus existent ! Ou plus précisément, pour quelles fonctions $\alpha(t)$ en existe-t-il. La question est encore ouverte même si [Ayache et Lévy-Vehel (1999)], [Ayache et Lévy-Vehel (2000)] ont pu montrer qu'une grande variété de fonctions $\alpha(t)$ pouvait être obtenue. Citons pour mémoire la fonction $\alpha(t) = \alpha_1 \mathbf{1}_C + \alpha_2 \mathbf{1}_{\bar{C}}$, où C est l'ensemble de Cantor et $\bar{C}$ son complémentaire.

Notre objectif va être de construire des classes de processus pour les fonctions $\alpha(t)$ « usuelles » et d'identifier ces fonctions à partir de l'observation d'une unique trajectoire discrétisée. Par fonctions « usuelles », nous entendons deux types de fonctions : les fonctions C^1 et les fonctions constantes par morceaux.

3.2. Mouvements browniens multifractionnaires

3.2.1 Cas d'une fonction C^1

La construction est dans ce cas assez simple. Elle reprend le modèle des bruits blancs filtrés (14) et y incorpore la fonction $\alpha(t)$:

$$X(t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{a(t, \lambda)(e^{t\lambda} - 1)}{|\lambda|^{\frac{1}{2} + \alpha(t)}} d\widehat{W}(\lambda), \quad (15)$$

où la fonction $a(t, \lambda)$ vérifie le même type de conditions que pour les bruits blancs filtrés. On montre alors ([Benassi *et al.*(1998b)]) que la condition d'auto-similarité locale (14) est vérifiée. Il faut noter que la démonstration fait intervenir le fait que la fonction soit C^1 . Plus précisément, la démonstration ne « passe » plus si la fonction $t \rightarrow \alpha(t)$ est C^β avec $\beta \leq \sup_{[0,1]} \alpha(t)$.

[Benassi *et al.* (1996)] permet de donner un renseignement trajectorien fin : il existe une constante $c(t)$ telle que :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(t + \varepsilon) - X(t)}{|\varepsilon|^{\alpha(t)} \sqrt{-\log \log |\varepsilon|}} = c(t).$$

Nous montrons en annexe des simulations effectuées par la méthode de Cholevsky par J-F. Coeurjolly de mouvements browniens multifractionnaires (en abrégé mbm) pour différentes fonctions fractionnaires notées $H(t)$ dans les figures.

Il est possible d'estimer la fonction $\alpha(t)$ à partir de l'observation d'une unique trajectoire discrétisée grâce aux variations quadratiques généralisées (11). Bien entendu, puisque la fonction $\alpha(t)$ n'est pas constante, il va falloir localiser ces variations quadratiques généralisées. Définissons pour cela le voisinage de taille ε d'un point t :

$$\mathcal{V}_{\varepsilon, n}(t) = \left\{ p \in \mathbf{Z}, \left| \frac{p}{n} - t \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

Nous construisons alors des variations quadratiques généralisées localisées autour du point t , par exemple celles associées à la suite $(1, -2, 1)$:

$$V_{\varepsilon, n}(t) = \sum_{p \in \mathcal{V}_{\varepsilon, n}(t)} \left(X\left(\frac{p+1}{n}\right) - 2X\left(\frac{p}{n}\right) + X\left(\frac{p-1}{n}\right) \right)^2.$$

L'estimateur (non-paramétrique) de la fonction $\alpha(t)$ est alors :

$$\hat{\alpha}_{\varepsilon,n}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{V_{\varepsilon,n/2}(t)}{V_{\varepsilon,n}(t)} .$$

[Benassi *et al.* (2000)] montrent la consistance de cet estimateur et en donnent la vitesse de convergence. Il faut noter qu'il existe un choix « universel »⁹ de la taille du voisinage $V_{\varepsilon,n}(t)$: $\varepsilon = n^{-1/3}$.

3.2.2 Cas d'une fonction constante par morceaux

On aimerait pouvoir construire un processus continu admettant des changements de régime brusques dans la fonction d'auto-similarité locale. Donnons-nous une fonction α admettant une rupture :

$$\alpha(t) = \alpha_1 \mathbf{1}_{t \leq \theta} + \alpha_2 \mathbf{1}_{t > \theta} .$$

La première idée est de reprendre la construction précédente :

$$X(t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{a(t, \lambda)(e^{it\lambda} - 1)}{|\lambda|^{\frac{1}{2} + \alpha(t)}} d\widehat{W}(\lambda). \quad (16)$$

On peut montrer ([Benassi *et al.* (2000)]) que le processus X est alors p.s. discontinu en θ . Un de nos objectifs est d'estimer la discontinuité du paramètre. Un estimateur de la discontinuité du processus (16) permettrait alors d'estimer la discontinuité du paramètre fractionnaire. Nous allons donc imposer à notre processus d'être au moins continu en θ . Nous allons revenir à la décomposition en ondelettes introduite en (7). Posons :

$$\Phi_{j,k}(t, t') = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{it\lambda} - 1}{|\lambda|^{\frac{1}{2} + \alpha(t')}} \widehat{\psi}_{j,k}(\lambda) d\lambda .$$

Nous définissons alors le mouvement brownien fractionnaire par morceaux par la série aléatoire :

$$Q_{\alpha(\cdot)}(t) = \sum_{j \geq 0, k \in \mathbf{Z}} \Phi_{j,k} \left(t, \frac{k}{2^j} \right) \varepsilon_{j,k} .$$

Notons que lorsque $\alpha_1 = \alpha_2$ (situation sans rupture), la définition de $Q_{\alpha(\cdot)}(t)$ est celle d'un brownien fractionnaire. Un argument de type « convergence normale » permet de vérifier que ce processus est continu. En fait, [Benassi *et al.* (2000)] montrent le résultat plus fort suivant : sur tout intervalle ouvert I , le processus $Q_{\alpha(\cdot)}(t)$ est p.s. β -hölderien pour tout $\beta < \inf_I \alpha(t)$. Par ailleurs, nous avons bien un processus localement auto-similaire pour tout point $t \neq \theta$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{Q_{\alpha(\cdot)}(t + hu) - Q_{\alpha(\cdot)}(t)}{h^{\alpha(t)}} \right)_{u \in \mathbf{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_{\alpha(t)}(u))_{u \in \mathbf{R}} .$$

9. « universel » au sens où il ne dépend pas des paramètres du problème.

On applique ensuite une méthode de détection de rupture due à [Bertrand (2000)] : il s'agit d'estimer le paramètre α sur une petite fenêtre que l'on fait glisser le long de la trajectoire. On obtient alors un profil en créneau et il ne reste plus qu'à segmenter ce profil pour détecter la rupture et estimer la valeur de α_1 et α_2 . Précisons que [Benassi *et al.* (2000)] ont en fait étudié le cas d'un nombre quelconque de ruptures, mais le principe d'estimation reste le même.

A Longue portée et auto-similarité

Le but de cet appendice n'est pas de parler de manière générale des liens entre auto-similarité, auto-similarité locale et longue portée, mais de montrer sur des exemples que ces notions sont différentes, renvoyant à [Benassi et Istas (2001)] pour l'auto-similarité et à [Cohen (2001)] pour l'auto-similarité locale.

A.1. Auto-similarité locale et auto-similarité

Un processus localement auto-similaire n'est en général pas auto-similaire, il suffit de penser aux bruits blancs filtrés pour s'en convaincre. En revanche, le qualificatif de « local » pourrait laisser croire qu'un processus auto-similaire est localement auto-similaire. Nous allons voir sur un exemple qu'il n'en est rien. Reprenons la construction (6) et remplaçons la fonction exponentielle complexe par une fonction ϕ :

$$X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}} \frac{\phi(t\lambda)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}+\alpha}} d\widehat{W}(\lambda),$$

où l'on suppose que la fonction ϕ est C^1 et que son support est inclus dans un intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b < \infty$. On vérifie alors que X est auto-similaire d'exposant α (sans restriction sur α). En 0, X est localement auto-similaire d'exposant α . En dehors de 0, X est dérivable et est donc localement auto-similaire d'exposant 1. Cet exemple montre en outre que l'auto-similarité n'engendre pas nécessairement des trajectoires irrégulières.

A.2. Auto-similarité locale et longue portée

Rappelons un résultat classique sur le mouvement brownien fractionnaire :

$$\mathbf{E}[B_\alpha(h)(B_\alpha((k+1)h) - B_\alpha(kh))] = c \frac{|h|^{2\alpha}}{|k|^{2(1-\alpha)}}.$$

La décroissance de la corrélation entre les accroissements de B_α est lente en fonction de leur distance et reçoit le nom de corrélation à longue portée pour $\alpha > 1/2$ car les corrélations ne sont alors plus sommables. Nous allons voir sur des exemples que la longue portée et l'auto-similarité locale ne sont pas liées.

A.2.1. Deux exemples

Un modèle bruité

Soient H et K tels que $0 < K < H < 1$. Considérons le processus X défini par :

$$\begin{aligned} X(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{it\lambda} - 1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}+H}} \widehat{W}_1(d\lambda) + \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{it\lambda} - 1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}+K}} \widehat{W}_2(d\lambda) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} B_H(t) + B_K(t) , \end{aligned}$$

où nous supposons que W_1 et W_2 sont deux browniens indépendants.

On montre que X est localement auto-similaire de paramètre K . Le comportement local est en effet dominé par K :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{X(hu)}{h^K} \right)_{u \in \mathbf{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_K(u))_{u \in \mathbf{R}} .$$

En revanche, on vérifie que :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{X(hu)}{h^H} \right)_{u \in \mathbf{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_H(u))_{u \in \mathbf{R}} .$$

Le comportement à l'infini, lui, est dominé par H .

Bruits blancs filtrés

Considérons maintenant le processus suivant.

$$T(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{it\lambda} - 1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}+H} + |\lambda|^{\frac{1}{2}+K}} \widehat{W}(d\lambda) .$$

Nous avons maintenant les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(hu)}{h^H} \right)_{u \in \mathbf{R}} &\stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_H(u))_{u \in \mathbf{R}} , \\ \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{T(hu)}{h^K} \right)_{u \in \mathbf{R}} &\stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_K(u))_{u \in \mathbf{R}} . \end{aligned}$$

Ces exemples montrent clairement que les comportements locaux et à longue portée sont deux choses différentes.

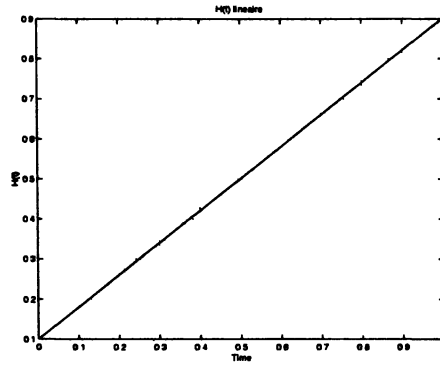


FIG 1. —

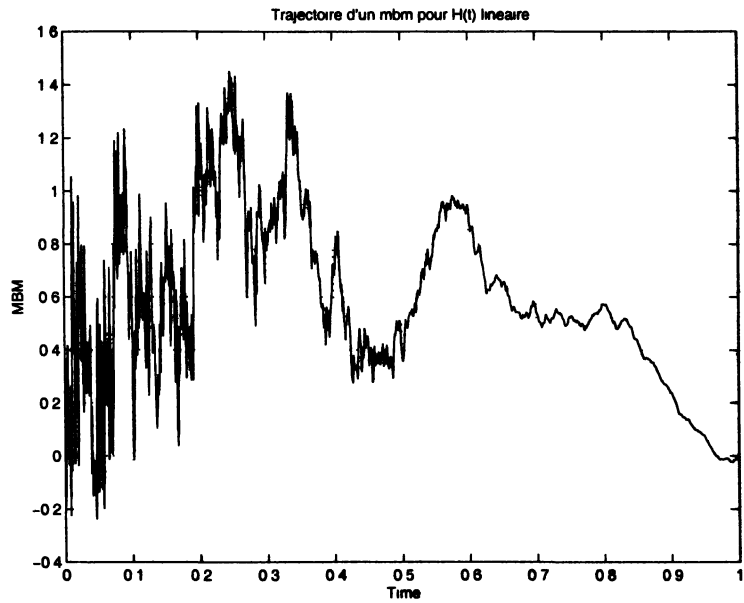


FIG 2. —

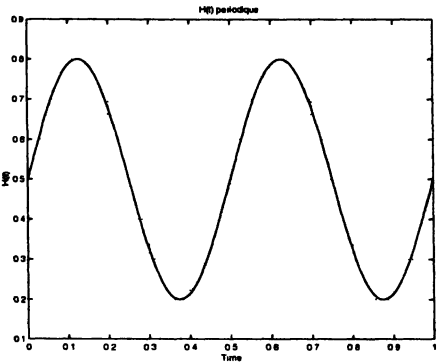


FIG 3. —

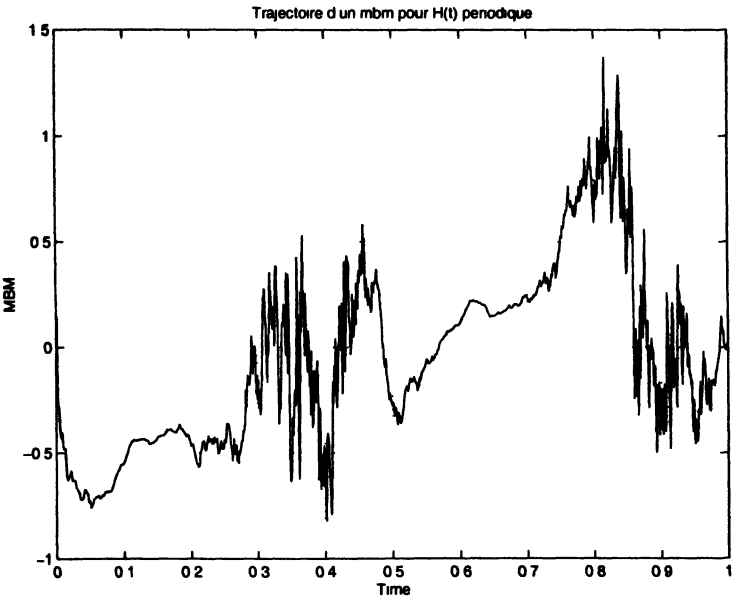


FIG 4. —

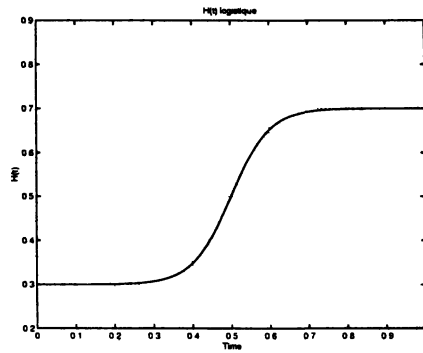


FIG 5. —

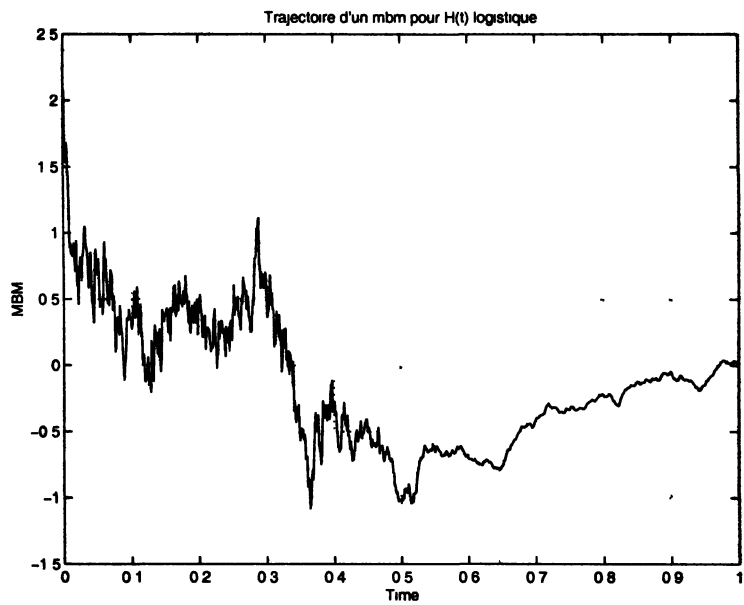


FIG 6. —

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Ayache et Lévy-Vehel (1999)] AYACHE et LÉVY-VEHEL (1999). Generalized Multifractional Brownian Motion : definition and preliminary results. In. *M. Dekking, J. Vehel, E. Lutton and C. Tricot (eds) Fractals : Theory and Application in Engineering. Springer-Verlag*, 17–32.
- [Ayache et Lévy-Vehel (2000)] AYACHE et LÉVY-VEHEL (2000). The generalized multifractional brownian motion. *Stat. Inf. Stoc. Proc.* (A paraître).
- [Bachelier (1900)] BACHELIER, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Gautier-Villars, Paris.
- [Benassi et al.(1996)] BENASSI, A., JAFFARD, S. et ROUX, D. (1996). Gaussian Processes and Pseudodifferential Elliptic operators. *Revista Mathematica Iberoamericana*. **13** (1) 19–90.
- [Benassi et al.(1998a)] BENASSI, A., COHEN, S., ISTAS, J. et JAFFARD, S. (1998a). Identification of Filtered White Noises. *Stoch. Proc. Appl.* **75** 31–49.
- [Benassi et al.(1998b)] BENASSI, A., COHEN, S., ISTAS, J.(1998b). Identifying the multifractional function of a Gaussian proces. *Stat. and Proba. Letters*. **39** 337–345.
- [Benassi et al.(2000)] BENASSI A., BERTRAND, P., COHEN, S., et ISTAS, J. (2000). Identification of the Hurst index of a Step Fractional Brownian Motion. *Stat. Inf. Stoc. Proc.*, Vol. 3, Issue 1/2, p. 101–111.
- [Benassi et Istas (2001)] BENASSI et ISTAS, J. (2001). Processus autosimilaires. *Fractals et Lois d'échelle*, IC2, Abry, P. Goncalves, P. Lévy-Vehel Eds., Hermès (A paraître).
- [Beran (1994)] BERAN, J. (1994). *Statistics for long memory process*. Chapman and Hall.
- [Bertrand (2000)] BERTRAND, P; (2000). A local method for estimating change points : the hat-function. *Statistics*, Vol. 34, n° 3, p. 215–235.
- [Black et Scholes (1973)] BLACK, F. et SCHOLE, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*. **81** 7–54.
- [Cœurjolly (2000a)] CŒURJOLLY, J.-F. (2000a). Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths. *Stat. Inf. Stoc. Proc.* (à paraître).
- [Cœurjolly (2000b)] CŒURJOLLY, J.-F. (2000b). Simulation et identification of the fractional brownian motion : a bibliographical and comparative study. *J. Stat. Software*, Vol. 5.
- [Cœurjolly et Istas (2000)] CŒURJOLLY, J.-F. et ISTAS, J. (2000). Cramer-Rao bounds for Fractional Brownian Motions. *Stat. and Proba. Letters*.
- [Cohen (1999)] COHEN, S. (1999). From self-similarity to local self-similarity : the estimation problem. In *Fractals : Theory and Applications in Engineering*, 3–16. M. Dekking, J. Lévy Véhel, E. Lutton and C. Tricot Eds, Springer Verlag.
- [Cohen (2001)] COHEN, S. (2001). Processus localement auto-similaires. in *Fractals et Lois d'échelle*, IC2, Abry, P. Goncalves, P. Lévy-Véhel Eds., Hermès (A paraître).
- [Dalhaus (1989)] DAHLHAUS, R. (1989). Efficient parameter estimation for self-similar processes. *Ann Statist.* **17** (4) 1749–1766.
- [Grenander (1981)] GRENANDER, U. (1981). *Abstract inference*. Wiley, New York.
- [Guyon et Leon (1989)] GUYON, X. (1989). Convergence en loi des h-variations d'un processus gaussien stationnaire. *Ann Inst. Poincaré*. **25** 265–282.

- [Hall et al. (1994)] HALL, P. WOOD, A. et FEUERVERGER(1994). Estimation of fractal index and fractal dimension of a Gaussian process by counting the number of level crossings. *J. Time Ser. Anal.* **6** 587–606.
- [Hall et Wood (1993)] HALL, P. WOOD, A. (1993). On the performance of box-counting estimators of fractal dimension. *Biometrika*. **80** 246–252.
- [Istas (1996)] ISTAS, J. Estimating the singularity function of a gaussian process with applications. *Scand. J. Statist.* **23** (5) 581–596.
- [Istas et Lang (1994)] ISTAS, J. et LANG, G. (1994). Variations quadratiques et estimation de l'exposant de Holder local d'un processus gaussien. *Cr. Acad. Sc. Paris, Série I.* **319** 201–206.
- [Istas et Lang (1997)] ISTAS, J. et LANG, G. (1997). Quadratic variations and estimation of the Holder index of a gaussian process. *Ann. Inst. Poincaré* **33** (4) 407–436.
- [Kolmogorov (1940)] KOLMOGOROV, A. (1940). Wiener'sche und einige andere interessante Kurven im Hilbert'schen Raum. (German). *C; R. (Dokl) Acad. Sci. URSS.* **26** 115–118.
- [Léger et Pontier (1999)] LÉGER, S. et PONTIER, M. (1999). Drap Brownien fractionnaire. *C.R. Acad. Sc. Paris, Série I.* **329** 893–898.
- [Mandelbrot et Van Ness (1968)] MANDELBROT, J. et VAN NESS, J. (1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review.* **10** 422–437.
- [Meyer (1990)] MEYER, Y. (1990). *Ondelettes et Opérateurs*. volume 1. Hermann, Paris.
- [Neveu (1968)] NEVEU, J. (1968). *Processus alatoires gaussiens*. Presses de l'Université de Montréal, SMS.
- [Peltier et Lévy-Véhel (1994)] PELTIER, R. et LÉVY-VÉHEL, J. (1994). A new method for estimating the parameter of fractional brownian motion. Rapport de recherches 2396, 1-40, disponible sur <http://www-syntim.inria.fr/fractales/>.