JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STATISTIQUE

PIERRE BERTRAND

La mémoire longue en économie : discussion et commentaires

Journal de la société française de statistique, tome 140, n° 2 (1999), p. 55-60

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1999__140_2_55_0>

LA MÉMOIRE LONGUE EN ÉCONOMIE : DISCUSSION ET COMMENTAIRES

Pierre BERTRAND *

Mon intervention se composera de deux parties indépendantes : la première "officielle" ; la seconde portant sur la possibilité d'arbitrage pour les Browniens fractionnaires.

1. En tant que responsable du groupe « Finance-Assurance » de la Société Française de Statistique et en accord avec H. Caussinus (rédacteur en Chef du *Journal de la SFdS* et, à ce titre, garant de sa politique générale) je souhaite insister sur l'importance d'un dialogue entre statisticiens, économistes et spécialistes de finance.

Afin de promouvoir ce dialogue, il serait bon de publier dans cette revue des articles venant de chacune des communautés, en offrant la possibilité à d'autres spécialistes de les commenter. La publication de cet article constitue un premier pas important dans cette voie. Nous voulons remercier les auteurs (Mesdames Lardic et Mignon) d'avoir initié ce mouvement en soumettant un texte sur un sujet sensible : la présence de mémoire longue en économie, sujet qui a suscité des commentaires de spécialistes reconnus. Nous tenons également à remercier les auteurs des contributions à la discussion et souligner la qualité des commentaires qui apportent des éclairages complémentaires variés sur le sujet.

Nous souhaitons pouvoir continuer à alimenter le Journal de la SFdS dans cette direction (entre autres, évidemment).

Une autre voie qu'il est souhaitable de développer pour promouvoir le dialogue entre banquiers, statisticiens, économistes et spécialistes de finance est l'organisation de journées d'études, dont la première intitulée « *Risque de modèle* » s'est tenue en mars 2000 et devrait donner lieu à la publication dans un prochain numéro du *Journal de la SFdS* de plusieurs articles soumis par les participants.

2. Je souhaite maintenant revenir sur la principale objection faite à l'existence d'une mémoire longue pour des processus financiers : dans le cadre d'une modélisation par un processus à temps continu, si le processus des prix est supposé être un mouvement brownien fractionnaire (fBm en anglais) d'indice $H > 1/2$, alors il existe une opportunité d'arbitrage. La référence usuelle est l'article de Rogers (1997).

* Université Clermont-Ferrand 2, 34 avenue Carnot, 63037 Clermont-Ferrand.

L'existence d'un arbitrage signifie qu'il est possible de trouver une stratégie permettant d'obtenir en un temps fini T un gain $G(T)$ vérifiant i) $G(T) \geq 0$ presque sûrement et ii) $G(T) > 0$ avec une probabilité strictement positive avec iii) $G(0) = 0$ et iv) $G(t), t \in [0, T]$ borné inférieurement, ce qui signifie qu'il serait possible de s'enrichir sans risque en utilisant une somme d'argent finie. Un modèle de marché présentant des opportunités d'arbitrage n'est pas viable; nous renvoyons, par exemple, à Karatzas & Shreve (1998) p. 11 pour les définitions précises.

On doit cependant introduire une condition un peu plus forte pour avoir l'existence d'une probabilité neutre au risque qui permet de calculer les prix de certains produits financiers (options) : la condition NFLVR (« *No Free Lunch at Vanishing Risk* »).

L'existence d'un arbitrage au sens strict entraîne l'existence d'un arbitrage au sens « *FLVR* », par contre il existe des contre-exemples à la réciproque.

La condition NFLVR entraîne que le processus des prix doit être une semi-martingale, cf Delbaen & Schachermayer (1994), th. 7.2.

Le mouvement brownien fractionnaire d'indice H n'est une semimartingale que dans le cas $H = 1/2$, il s'agit alors du mouvement brownien. Donc si $H > 1/2$, il existe une possibilité d'arbitrage au sens « *FLVR* », de plus Rogers (1997) construit une possibilité d'arbitrage au sens strict.

On pourrait remarquer que la définition de l'absence d'opportunité d'arbitrage et d'un marché viable en temps continu correspondent à une formalisation idéale de la réalité :

- les prix sont des processus à temps continu alors que les séries financières observées semblent mieux correspondre à un processus à temps discret;
- il n'y a pas de coût de transaction;
- il est possible de modifier son portefeuille sur des intervalles de temps très courts.

Ce ne sont pas les points que je souhaite discuter ici. Même dans le cadre de cette modélisation idéale, je souhaite revenir sur l'apparente contradiction entre l'absence d'opportunité d'arbitrage et la mémoire longue. Je voudrais rappeler que cela n'est pas exactement la conclusion de Rogers (1997) :

"The fractional Brownian motion is not a semimartingale (except in the Brownian case) [ce qui contredit la condition NFLVR]. *We then give a direct construction of arbitrage with fractional Brownian motion. While this may be the end of fractional Brownian motion as a model for the movement of price of share, it is not the end of all attemps to model a share price process with long range dependence of returns."*

Rogers (1997) rappelle la représentation en moyenne mobile (cf Samorodnitsky & Taqqu, (7.24) p.321)

$$X_\varphi(t) = C_\varphi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(t-s) - \varphi(-s)]\, dW_s, \tag{1}$$

qui correspond au mouvement brownien fractionnaire d'indice H pour le noyau $\varphi(x) = |x|^{H-1/2}\,\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) = (x_+)^{H-1/2}$, nous le noterons $B_H(t)$ dans toute la suite. Il construit une opportunité d'arbitrage pour le mouvement brownien fractionnaire avec $H > 1/2$ puis il montre que l'existence d'une opportunité d'arbitrage est liée au comportement du noyau $\varphi(.)$ au voisinage de 0 (section 4). Mais, si on modifie ce comportement, en posant, par exemple $\varphi_1(x) = (\epsilon + x^2)^{(2H-1)/4}$ et en notant $X_1(t)$ le processus défini par (1), alors $X_1(t)$ est une semimartingale et il n'y a plus d'opportunité d'arbitrage. Cependant, pour x grand, $\varphi_1(x)$ est équivalent à $(x_+)^{H-1/2}$ et le processus $X_1(t)$ possède les mêmes propriétés de mémoire longue que le mouvement brownien fractionnaire $B_H(t)$.

Un autre point de vue consiste à rappeler que le mouvement brownien fractionnaire d'indice H est un processus gaussien à accroissements stationnaires H auto-similaire, c'est à dire vérifiant pour tout $\lambda > 0$,

$$(B_H(\lambda t))_{t\in\mathbb{R}} \stackrel{(d)}{=} \left(\lambda^H B_H(t)\right)_{t\in\mathbb{R}} \tag{2}$$

La mémoire longue est une propriété du processus $X(t)$ liée au comportement à basse fréquence, le caractère de semimartingale de $X(t)$ est lié à ses propriétés à haute fréquence. Seule la propriété d'auto-similarité assure le transfert des propriétés à haute fréquence aux propriétés à basse fréquence.

Il est donc naturel de dissocier les comportement haute et basse fréquence en considérant un noyau $\varphi(.)$ vérifiant

(A1) $\varphi(x) \sim (x_+)^{H_0-1/2}$ *quand x tend vers 0 et*

$\varphi(x) \sim (x_+)^{H_1-1/2}$ *quand x tend vers $+\infty$.*

Si on définit la classe $\mathcal{M}_1$ des processus X_φ définis par (1) avec un noyau positif $\varphi(.)$ vérifiant (A1), on peut conjecturer la

PROPOSITION 1. — *Soit X_φ un processus de la classe $\mathcal{M}_1$*

i) *Le processus X_φ est H auto-similaire si et seulement si $\dfrac{\ln(\varphi(x))}{\ln(x)}$ est constant pour tout $x > 0$ avec $\dfrac{\ln(\varphi(x))}{\ln(x)} = H - 1/2$;*

ii) *L'absence d'opportunité d'arbitrage entraîne $H_0 = 1/2$, i.e. $\varphi(x) \sim (x_+)^0 = 1$ quand x tend vers 0;*

iii) *Le processus X_φ est à mémoire longue si et seulement si $H_1 > 1/2$, i.e. $\varphi(x) \sim (x_+)^{H_1-1/2}$ quand x tend vers $+\infty$ avec $H_1 > 1/2$.*

Remarque. — 1. On a défini une famille $\mathcal{M}_1$ de processus gaussiens centrés dont le noyau vérifie (A1). Cette famille comprend les mouvements browniens fractionnaires.

2. Les assertions ii) et iii) ne sont que des conjectures. Elles ne sont démontrées que dans des cas particuliers par Rogers (1997), qui correspondent à une sous famille de la famille $\mathcal{M}_1$.

On a donc pour les processus gaussiens appartenant à la famille $\mathcal{M}_1$:

$$\left.\begin{array}{r} \textit{Absence d'Opportunite d'Arbitrage} \Longrightarrow H_0 = 1/2 \\ X_\varphi \quad \textit{auto}-\textit{similaire} \Longleftrightarrow H_0 = H_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow H_1 = 1/2$$
$$\Longleftrightarrow \textit{absence de mémoire longue}$$

L'hypothèse d'auto-similarité des cours des actifs (ou des rendements) paraitrait fondamentale pour déduire l'absence de mémoire longue de l'absence d'opportunité d'arbitrage. Cette hypothèse ne semble pas avoir de justification économique.

Rappelons le programme tracé par Mandelbrot & Van Ness (1968)

"The basic feature of fBm's is that the "span of interdependence" between their increments can be said to be infinite. By the way of contrast, the study of random function has been devoted to [...] Markov process, and to other random functions having the propety that sufficiently distant samples are independent, or nearly so. [...] Empirical findings suggests [..] to single out and study in detail many specific simple families of random functions that could be expected to be "typical" of what happens in the absence of asymptotic independence [...] We selected fBm so as to be able to derive the results of practical interest with a minimum mathematical difficulty. Extensive use has been made of the concept of "self-similarity", a form of invariance with respect to changes of time scale."

Traduisons : en 1968, il importait de développer l'étude de processus stochastiques présentant une mémoire longue, les mouvements browniens fractionnaires constituaient un premier exemple simple à décrire et à étudier mathématiquement. Une des simplifications de ce modèle réside dans la propriété d'auto-similarité ou d'invariance en loi selon les échelles, selon la propriété (2).

Complétons ce programme : la prise en compte des observations réelles, les progrès accomplis dans l'étude des mouvements browniens fractionnaires, amènent maintenant à considérer des classes plus générales de processus à mémoire longue.

Pour simplifier la présentation, nous avons considéré la modélisation des prix des actifs financiers par un mouvement brownien fractionnaire, pour lesquels les prix deviennent négatifs avec probabilité positive. Pour pallier ce défaut, on peut considérer ce sont les rendements qui sont des mouvements browniens fractionnaires, puis que les prix sont une exponentielle de mouvements browniens fractionnaires avec dérive, i.e. $Y(t) = (\mu t + B_H(t))$. Pour ce modèle, on a encore l'existence d'une opportunité d'arbitrage et nous pouvons conjecturer que la proposition 1 demeure valide pour la classe $\mathcal{M}_2$ des processus $Y(t) = (\mu t + X(t))$ avec $X(t)$ dans la classe $\mathcal{M}_1$, ce qui résulterait encore du transfert des propriétés haute fréquence sur les propriétés basse fréquence.

L'hypothèse fondamentale pour que l'absence d'opportunité d'arbitrage entraîne l'absence de mémoire longue serait donc l'auto-similarité du processus des prix ou des rendements. À la différence de l'absence d'opportunité d'arbitrage, cette seconde hypothèse n'a guère de justification économique (ou financière). On peut se demander s'il est naturel de supposer que les propriétés statistiques (ou la loi) des rendements des actifs financiers soient les mêmes à toutes les échelles de temps, à un facteur multiplicatif λ^H près ? Le comportement statistique des rendements observés à l'intérieur d'une journée, à l'échelle de la minute, a-t-il des raisons pour être le même que celui observé à l'échelle de l'année ? Ne pourrait-on pas imaginer que des logiques différentes expliquent les comportements aux différentes échelles ? Il est admis, voir Mandelbrot & Van Ness (1968) ou Beran(1994), qu'un certain nombre de séries annuelles de phénomènes hydrologiques et météorologiques présentent de la mémoire longue, le plus célèbre exemple étant celui des crues du Nil. De plus, ceci est justifié par un théorème central limite sur l'agrégation des données. A l'échelle annuelle, les prix seraient influencés par les résultats annuels des sociétés, qui dans certains cas peuvent dépendre de phénomènes climatologiques présentant une mémoire longue, ou de la consommation des ménages qui présente également de la mémoire longue comme le signalent Lardic et Mignon, section 5.2.3. Pour les données à haute fréquence, à l'intérieur de la journée, prévaudrait la logique du marché, qui interdit l'existence durable d'opportunités d'arbitrage.

Pour revenir à l'article de Lardic et Mignon, les résultats statistiques présentés portent sur des séries journalières pour les indices boursiers, sur des séries mensuelles pour les taux de change et sur des séries trimestrielles d'investissement, des résultats similaires sont obtenus dans Willinger, Taqqu, Teverovsky (1999) donnant pour l'indice des valeurs de la bourse de New-York observé au jour le jour un indice de Hurst $H > 0.5$.

L'existence d'une mémoire longue à une échelle de temps au moins égale à la journée n'apparaît donc plus contradictoire avec l'absence d'opportunité d'arbitrage sur des marchés dont les cours varient à l'intérieur d'une journée.

Pour compléter la bibliographie sur les généralisations du mouvement brownien fractionnaire, signalons la classe des mouvements browniens multifractionnaires (mBm) pour lesquels l'indice de Hurst H est remplacé par une fonction du temps $h(t)$. Nous renvoyons à Cohen (2000) et à la bibliographie incluse pour un point sur les difficultés liées aux diverses définitions de ces processus (selon qu'on se sert pour définir la généralisation de la représentation moyenne mobile, de la représentation harmonique ou de la représentation en ondelettes), sur les propriétés de ces processus et sur les méthodes statistiques d'estimation de la fonction $h(t)$.

Les mouvements browniens multifractionnaires ne sont pas à accroissements stationnaires, ce qui rend plus délicate la définition de la mémoire longue, mais il demeure possible de montrer que ces processus ont une mémoire longue (avec une définition différente), nous renvoyons à Ayache, Cohen & Lévy-Vehel (2000).

Il faut cependant noter que (sauf cas particulier) les mouvements browniens multifractionnaires ne sont pas des semimartingales, mais que l'arbitrage construit dans Rogers (1997) nécessite la connaissance de l'indice de Hurst H et suppose qu'il est constant. Ce qui devrait le rendre inopérant si l'indice H est variable et peut-être stochastique lui aussi.

P.S. : Je tiens à préciser que contrairement aux autres commentaires, celui-ci ne renvoie pas sur tous les points à des travaux déjà publiés, mais propose des pistes nouvelles à partir des travaux existant. Par conséquent, il n'est pas possible actuellement de donner une référence à une démonstration pour toutes les assertions précédentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AYACHE A., COHEN S. and LÉVY-VEHEL J., "The covariance structure of multifractional Brownian motion, with application to long range dependence", Proceedings of ICASSP Istambul (2000).

[2] BERAN J., *Statistics for Long Memory Processes*, Chapman & Hall, (1994).

[3] COHEN S., « Champs localement auto-similaires », in Fractals et loi d'échelles, ed. P.Abry, P. Goncalvès, J. Lévy-Vehel, Hermès, Paris (2000).

[4] DELBAEN F. and SCHACHERMAYER W., "A general version of the fundamental theorem of asset pricing", Math. Annals, p. 463-520 (1994).

[5] KARATZAS I. and SHREVE S.E., *Methods of Mathematical Finance*, Springer Verlag (1998).

[6] LARDIC S. et MIGNON V., « la mémoire longue en économie : une revue de la littérature », *Journal de la Société Française de Statistique*, 140, 2, p. 5-48 (1999).

[7] MANDELBROT B., and VAN NESS J.W., "Fractional Brownian motion, fractional noises and applications", *SIAM review* **10**, p. 422-437 (1968).

[8] ROGERS L.C.G., "Arbitrage with fractional Brownian motion", Mathematical Finance, vol. 7, n° 1, (1997) pp. 95-105.

[9] SAMORODNITSKY G. and TAQQU M. S., *Stable non Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall (1994).

[10] WILLINGER W., TAQQU M.S., TEVEROVSKY V., "Stock market price and long-range dependence", *Finance and Stochastics*, 1999, n° 1, pp. 1-14.