

ANTOINE FRACHOT

CHRISTIAN GOURIÉROUX

## **L'économétrie des données individuelles : l'exemple des remboursements anticipés**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 134, n° 1 (1993),  
p. 65-72

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1993\\_\\_134\\_1\\_65\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1993__134_1_65_0)

© Société de statistique de Paris, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

### III

## ARTICLES

# L'ÉCONOMÉTRIE DES DONNÉES INDIVIDUELLES : L'EXEMPLE DES REMBOURSEMENTS ANTICIPÉS

par Antoine FRACHOT

*Centre de Recherche de la Banque de France*

et

Christian GOURIÉROUX

*Professeur à l'ENSAE*

## 1. Introduction

Les années 70 et 80 ont vu émerger deux risques fondamentaux méconnus auparavant et affectant l'activité de crédit des banques.

Le premier (**le risque de défaillance**) est présent à chaque opération de crédit dès lors que l'emprunteur (une entreprise, un particulier...) peut se révéler incapable de rembourser le capital prêté. Les banquiers ont été évidemment et depuis longtemps sensibilisés à ce risque mais néanmoins on doit constater que son traitement statistique et économétrique est plutôt récent et n'est pas achevé complètement. L'apport de l'économétrie des données individuelles est ici particulièrement tangible puisqu'elle permet de prévoir le risque d'un emprunteur, c'est-à-dire de pouvoir classer un candidat emprunteur, au vu de ses caractéristiques, parmi les « bons » ou « mauvais » payeurs. L'histoire récente française (loi Neiertz) montre assez clairement que de nombreux prêts (immobiliers) ont été accordés sans une évaluation rigoureuse du risque de défaillance des emprunteurs.

Le second risque (**le risque de remboursement anticipé**) qui sera l'objet de cette intervention, constitue un risque méconnu, voire négligé jusque récemment et dont le traitement statistique est beaucoup moins avancé que pour le risque de défaillance. Pourtant il apparaît également lors de toute opération de crédit dans la mesure où un emprunteur a toujours le droit de rembourser son prêt par anticipation moyennant une éventuelle pénalité. Ce droit est régi, pour le domaine immobilier, par la loi Scrivener du 13 juillet 1979 et vise ainsi à protéger les emprunteurs.

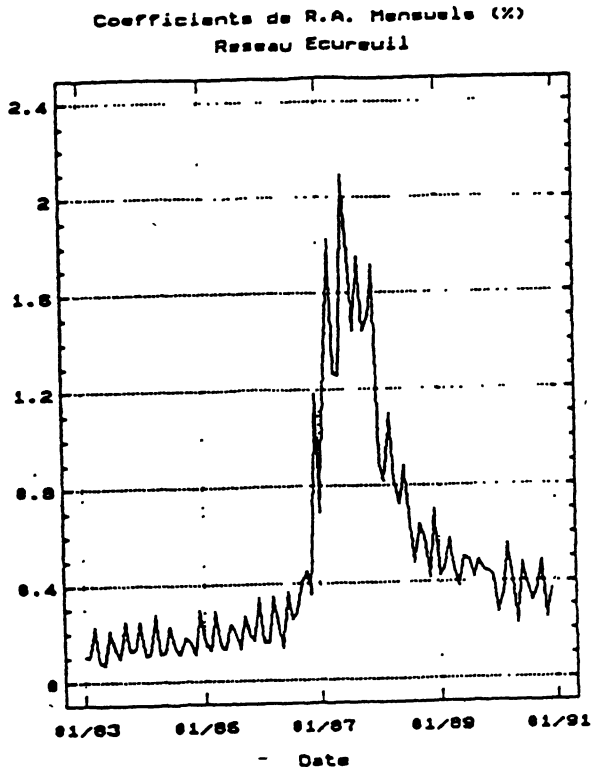
A l'inverse du risque de défaillance, la banque recouvre la totalité du capital emprunté (voire plus si une pénalité est versée) mais pas à la date prévue initialement.

## L'ÉCONOMÉTRIE DES DONNÉES INDIVIDUELLES

Il apparaît donc une incertitude au moment de la conclusion du contrat dont seul le prêteur peut faire les frais.

Ce risque se comprend d'autant mieux si on décrit dans quel contexte un remboursement anticipé survient.

Intéressons-nous aux prêts immobiliers. Ce sont ceux pour lesquels certaines opérations financières telles que la titrisation ont été initiées. Dans la majorité des cas, le remboursement anticipé est assimilable à une renégociation de taux. Un prêt est donc remboursé par anticipation à l'aide d'un nouveau prêt contracté en même temps mais à un taux différent. Ce dernier taux peut être supérieur au taux précédent mais il est alors hautement probable que cette renégociation de taux n'a pas été voulue par l'emprunteur ; elle peut être ainsi la conséquence d'un déménagement, d'un divorce nécessitant la revente du bien immobilier. Mais en général, le taux du nouvel emprunt est inférieur au taux du précédent. La banque subit donc ce risque de renégociation dès qu'une dégrue des taux d'intérêt (long terme) survient. Le phénomène a été particulièrement net dans le milieu des années 80 lorsque les taux d'intérêt ont sensiblement baissé. Les banques ont alors dû faire face à une vague de remboursements anticipés qu'elles avaient pour beaucoup mal anticipée. A titre d'exemple, le graphique suivant donne une illustration des remboursements anticipés intervenus sur les crédits immobiliers accordés par les caisses d'épargne.



Un point de vue plus financier peut se résumer en disant que le droit de rembourser par anticipation est une option accordée par la banque quasiment gratuitement à l'emprunteur, c'est-à-dire le droit de bénéficier d'une éventuelle baisse des taux et ce, sans paiement d'une prime initiale (la pénalité qui parfois n'est pas exigée, ne peut être interprétée comme une prime d'option).

Dans un premier temps, nous décrirons les modèles structurels permettant de comprendre sur le plan micro-économique le phénomène de remboursement anticipé. Puis nous esquisserons les premiers modèles économétriques établis récemment pour décrire ce phénomène. Enfin nous nous consacrerons aux applications financières et notamment aux opérations de titrisation dont nous verrons à quel point elles sont tributaires d'un « bon » modèle de remboursement anticipé.

## 2. Les modèles structurels

Ces modèles ont pour but de comprendre pourquoi et à quel moment un emprunteur a intérêt à renégocier son taux (et donc à effectuer un remboursement anticipé de son prêt). Il s'agit également de préciser pourquoi deux emprunteurs dont les prêts ont les mêmes caractéristiques ne décident pas en pratique de renégocier leur taux au même moment.

Comme nous l'avons suggéré plus haut, la renégociation de taux est la raison principale d'un remboursement anticipé. Cependant on constate empiriquement qu'un emprunteur donné ne renégocie pas dès que les taux de refinancement disponibles passent au-dessous du taux initial de sa créance actuelle. Les raisons sont nombreuses :

- l'emprunteur ne connaît pas les taux disponibles ; il y a ainsi un coût de recherche de l'information ;
- la pénalité à payer est prohibitive ;
- l'emprunteur anticipe une baisse encore plus importante dans les mois qui viennent ;
- les démarches de renégociation sont coûteuses en temps ;
- etc.

Un modèle économique doit donc intégrer ces éléments dans la fonction d'utilité de l'individu afin d'en déduire son comportement. La modélisation relève ainsi des techniques de maximisation d'utilité intertemporelle en avenir incertain. Ce genre de programme est difficile à résoudre, en partie parce que la loi des taux d'intérêt futurs est inconnue. De plus, on est très vite obligé de supposer que l'emprunteur possède pour former ses anticipations un modèle d'évolution des taux auxquels il aura accès. Un compromis entre simplicité des calculs et adéquation aux faits observés consiste à supposer qu'à chaque mensualité l'emprunteur compare la somme actualisée (à son taux d'escompte psychologique) des mensualités futures à payer en cas de rembour-

## L'ÉCONOMÉTRIE DES DONNÉES INDIVIDUELLES

sement anticipé et en cas de non-remboursement anticipé. Il choisit le remboursement anticipé lorsque la première est inférieure à la seconde.

Ce critère s'écrit formellement :

$$C + \sum_{\tau=t+1}^T \frac{a'(\tau)}{(1+\rho)^{\tau-t}} < \sum_{\tau=t+1}^T \frac{a(\tau)}{(1+\rho)^{\tau-t}}$$

où

- $a'$  (resp.  $a$ ) est la mensualité à payer en cas de remboursement anticipé (resp. en cas de non-remboursement anticipé) donc calculé à partir d'un nouveau taux différent de celui utilisé pour calculer  $a$ .
- $\rho$  est le taux d'escompte psychologique de l'individu et  $C$  un coût propre à l'individu résumant le coût de recherche de l'information, le coût de renégociation...

Ce modèle très simple a l'avantage d'être facilement soluble dans le cas par exemple de prêts à mensualités constantes où  $a(\tau)$  s'écrit :

$$a(\tau) = K \cdot \frac{\gamma}{1 - \exp(-\gamma T)}$$

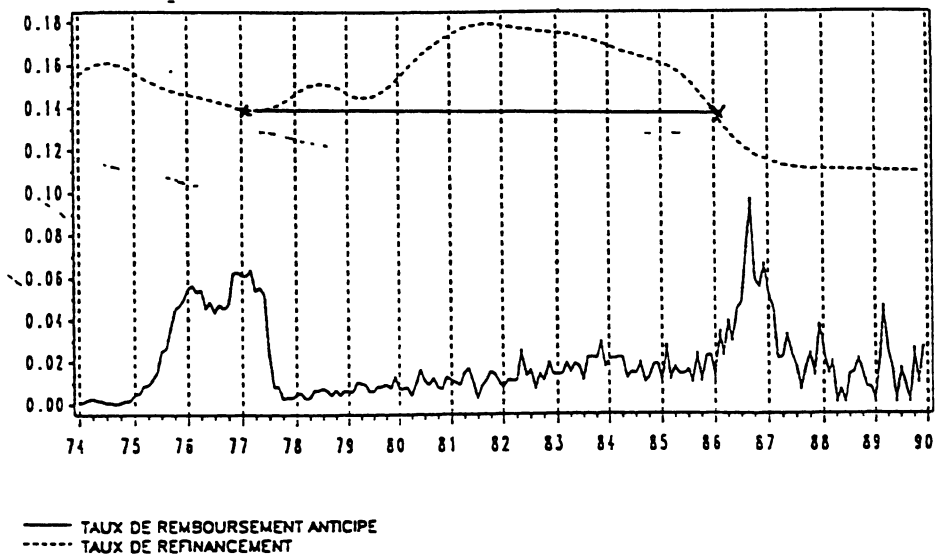
où  $\gamma$  est le taux du prêt,  $K$  le capital emprunté et  $T$  le terme normal du prêt.

La première conséquence de ce modèle est de montrer que la décision de rembourser par anticipation a lieu dès que le taux de refinancement disponible passe en-dessous d'un taux de « réserve » de l'individu, lui-même inférieur au taux nominal du prêt. Ce taux de « réserve » s'exprime comme fonction du taux nominal, du capital restant dû, de la maturité résiduelle et également de  $\rho$  et  $C$ . C'est une fonction décroissante de la maturité résiduelle, croissante du taux nominal du prêt, et croissante du capital emprunté. On retrouve également le fait qu'un emprunteur ne rembourse jamais par anticipation lorsqu'il se trouve suffisamment proche de la fin du prêt. Deuxièmement, ce taux de « réserve » est propre à chaque emprunteur puisqu'il dépend de  $\rho$  et  $C$  : tous les individus ne réagissent pas de la même façon.

Empiriquement, on observe un phénomène que les financiers appellent « *burn-out effect* » qui s'interprète naturellement à la lumière de ce modèle. Considérons par exemple un ensemble d'emprunteurs ayant des prêts semblables (en particulier émis la même année). Lors d'une première baisse de taux, certains vont rembourser par anticipation. Si après être remontés, les taux rebaissent à nouveau, on constate que ce qui reste de ce pool de prêts est moins sensible à cette baisse que le pool total lors de la première baisse. Il est immédiat de voir ici que ceux qui n'ont pas remboursé par anticipation lors de la première baisse sont ceux qui ont un taux de réserve élevé, et ce sont eux qui supporteront la deuxième baisse (et y réagiront de façon moindre). La figure ci-après illustre cet effet : on constate que, lorsque la deuxième baisse atteint le niveau de la première, le pool ne réagit pas ; c'est seulement lorsque la deuxième baisse devient d'une ampleur supérieure à la première que le pool commence de réagir.

## L'ÉCONOMÉTRIE DES DONNÉES INDIVIDUELLES

L'intérêt des modèles structurels ici est de démontrer les ressorts du remboursement anticipé et de montrer que certains phénomènes empiriques tels le « *burn-out* », sont en fait très simples (alors qu'ils semblaient mystérieux pour certains il y a encore peu de temps). De plus, ils mettent en évidence le fait que, pour modéliser convenablement le phénomène de remboursement anticipé, il faut tenir compte non seulement du **taux de refinancement aujourd'hui mais aussi de toute l'histoire des taux passés**. Le passé des taux peut intervenir par exemple sous la forme du minimum des taux passés. D'autres résumés de l'histoire des taux peuvent être proposés (Frachot, 1991 [3]) Ainsi ces modèles structurels donnent des idées sur les variables explicatives à retenir pour une modélisation économétrique.



### 3. Les modèles économétriques

Les modèles structurels précédents ont pour but de mieux comprendre le phénomène et de préciser quelles variables (de taux) sont pertinentes pour en rendre compte.

A ce stade, l'économètre prend le relais et cherche à quantifier le lien entre le phénomène à expliquer et les variables explicatives observables.

La variable à expliquer est représentable par une variable aléatoire  $D$  qui mesure la durée séparant la date de mise en place du prêt et sa date de fin. Il n'y a pas eu de remboursement anticipé dès lors que cette durée  $D$  est égale à la durée normale prévue dans le contrat initial.

## L'ÉCONOMÉTRIE DES DONNÉES INDIVIDUELLES

On est donc très vite conduit à se placer dans le cadre de modèles statistiques capables de rendre compte de phénomènes où interviennent des durées. Cette classe de modèles statistiques dits **Modèles de Durée** a reçu un traitement spécifique quant aux formes des modèles et à leurs méthodes d'estimation. Ces modèles ont particulièrement progressé grâce à l'impulsion exercée par le problème du chômage et de l'explication des durées de chômage. Il est intéressant de constater que ces modèles ont une application naturelle dans les domaines bancaire et financier.

Le premier modèle économétrique concernant les remboursements anticipés a été proposé par Schwartz et Torous en 1989 (Schwartz-Torous, 1989 [4]).

La première étape repose sur la spécification d'un lien économétrique entre la variable  $D$  et les variables explicatives notées  $X_t$ .<sup>1</sup> Dans le cas où  $D$  est discrète (et correspond par exemple au numéro du mois auquel a lieu le remboursement anticipé), on se donne une spécification pour la probabilité de rembourser par anticipation conditionnellement aux variables explicatives :

$$\text{Prob}(D = t / X_t) = p(t; X_t)$$

En fait la probabilité la plus interprétable est la probabilité de rembourser par anticipation à la date  $t$  sachant qu'on ne l'a pas fait jusqu'à présent.

Il s'agit en fait de la fonction de hasard habituellement introduite dans les modèles de durée :

$$\text{Prob}(D = t / D \geq t, X_t) = q(t; X_t)$$

On peut également se donner la fonction de survie :

$$\text{Prob}(D \geq t / X_t) = S(t; X_t)$$

La spécification de la fonction  $q$  peut se faire à partir de la forme LOGIT connue :

$$q(t; X_t) = \frac{1}{1 + \exp(\alpha_t + \beta \cdot X_t)}$$

où  $(\alpha_t, \beta)$  sont des paramètres à estimer.

Des méthodes d'estimation ont été développées à partir de techniques de Maximum de Vraisemblance ou de Méthode de Moments (Frachot, 1991 [3], De Toldi-Gouriéroux-Monfort, 1992 [1]). La forme des données est importante : les méthodes d'estimation sont différentes suivant que les données sont individuelles ou agrégées. Certains problèmes délicats de troncature de données peuvent également compliquer les estimations. Cependant, si les données sont classées sous forme de groupes homogènes (notamment classées par génération), alors on peut proposer des méthodes d'estimation à base de moindres carrés généralisés, donc très simples à mettre en œuvre.

---

1. Ces variables explicatives sont souvent dépendantes du temps (taux...).

## L'ÉCONOMÉTRIE DES DONNÉES INDIVIDUELLES

Enfin, il convient de préciser les variables explicatives à retenir :

- les taux courant de refinancement,
- le passé des taux de refinancement,
- des variables de conjoncture macroéconomique,
- des variables de saisonnalité,
- des caractéristiques individuelles lorsqu'elles sont disponibles,
- des caractéristiques du prêt (taux nominal, durée...),
- etc.

Il faut préciser qu'on se heurte en France à un manque quasi absolu de données. Jusqu'à très récemment, les banques ne jugeaient pas utile de stocker d'informations sur les remboursements anticipés de leurs clients. Ainsi on dispose au mieux de 3 à 4 ans de données, c'est-à-dire à des périodes où les mouvements de taux de refinancement n'ont pas eu l'amplitude de la période fin des années 70 - milieu des années 80. La dépendance entre le remboursement anticipé et les mouvements de taux risquent donc d'être particulièrement mal appréhendés. Par comparaison, les Etats-Unis collectent des données sur le sujet depuis le début des années 70.

### 3.1. Applications financières

Le principale domaine d'application concerne les opérations de titrisation.

Celle-ci constitue l'une des innovations majeures qu'ont connues les grandes places financières dans les années 80.

Elle consiste à transformer des actifs de type crédits, détenus par les institutions financières en titres émis sur les marchés négociables. Cette opération permet donc aux banques prêteuses de vendre une partie de leur actif constitué par les crédits accordés à leur clientèle. La place financière qui a vu la première cette technique se développer est celle des Etats-Unis, avec l'apparition des « Mortgage Backed Securities » (M.B.S.). Initialement introduits dans les années 70, ces produits ont connu un développement spectaculaire au milieu des années 80. L'apparition de ces produits a été beaucoup plus tardive en France. C'est seulement depuis 1988 que le cadre juridique français permet les opérations de titrisation, sous la forme de Fonds Commun de Créance (F.C.C.). Cette nouvelle structure, proche de celle des O.P.C.V.M. permet aux établissements de crédit de céder des créances indirectement sur le marché financier. Ainsi une banque peut céder un pool de créances au F.C.C qui émet alors des titres représentatifs de ce pool. On voit donc que les flux générés par les titres sont issues du pool de créances et sont donc **aléatoires à cause des défaillances et des remboursements anticipés.**

Il est donc nécessaire de prévoir les flux générés par le pool, ce qui montre tout l'intérêt d'une étude économétrique précise sur le comportement de remboursement anticipé des emprunteurs. Les formules de prévision qui permettent de donner les flux futurs du pool à partir de la fonction de hasard sont assez faciles à écrire. On



## L'ÉCONOMÉTRIE DES DONNÉES INDIVIDUELLES

peut ainsi donner la meilleure prévision du capital restant dû en  $t'$  d'un pool de créances connaissant l'information disponible à la date  $t$  :

$$\hat{K}_{t,t'} = E(K_{t,t'}^{(t)}) \prod_{r=t+1}^{t'} (1 - q(\tau; X_r) / F_r)$$

où  $K_{t,t'}$  est le capital qui resterait dû en  $t'$  s'il n'y avait pas eu de remboursement anticipé entre  $t$  et  $t'$ , et  $F_r$  est l'information disponible en  $t$ .

On constate de plus qu'il est absolument nécessaire de disposer d'un modèle de prévision de la structure des taux dans la mesure où les remboursements anticipés sont sensibles aux taux.

Le pas suivant consiste à introduire dans un modèle d'évaluation d'actifs conditionnels la fonction de hasard telle qu'elle a été estimée auparavant afin d'en déduire le prix des titres correspondant (Dunn-McConnell, 1981 [2], Schwartz-Torous, 1989 [4]).

L'apport de l'économétrie est ici très important puisque celle-ci doit permettre d'évaluer avec précision les risques induits par le remboursement anticipé (ainsi d'ailleurs que la défaillance). A cet égard, le manque de données en France est une limite très certaine au développement de la titrisation. L'évaluation des risques individuels à l'aide des méthodes économétriques devient ainsi un nouveau métier dont les champs d'application touchent aussi bien la gestion actif-passif, la tarification des assurance-crédit, la titrisation, le rating...

## RÉFÉRENCES

- [1] DE TOLDI M., GOURIÉROUX C., MONFORT A. *On Seasonal Effects in Duration Models with Applications to Prepayments*. Document de travail CREST-DP, 1992.
- [2] DUNN K.B., MCCONNELL J.J. "Valuation of GNM Mortgage-backed securities". *Journal of Finance*, 599-615, 1981.
- [3] FRACHOT A. *Econometrics of Prepayment*. Document de travail CREST-DP, 1991.
- [4] SCHWARTZ E. et TOROUS W. "Prepayment and the Valuation of Mortgage-backed Securities". *Journal of Finance*, 375-392, 1989.