JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

DOMINIQUE NAMUR

Modèles d'évaluation d'arbitrage ou d'équilibre : une comparaison APT et CAPM

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, nº 4 (1992), p. 167-180

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_4_167_0>

© Société de statistique de Paris, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MODÈLES D'ÉVALUATION D'ARBITRAGE OU D'ÉQUILIBRE : UNE COMPARAISON APT ET CAPM

par Dominique NAMUR
(CRIEGE, Université de Paris XIII)

A la suite des approches purement financières établies dans le cadre d'un équilibre partiel, plusieurs courants de recherche ont intégré des facteurs productifs, ou plus généralement non financiers, dans la détermination de la rentabilité des actifs. Après le Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers (MEDAF ou CAPM financier) et son extension intertemporelle, deux importants modèles ont été proposés : la généralisation du MEDAF incorporant explicitement la production réelle (CAPM en termes réels) et l'Arbitrage Pricing Theory (l'APT).

L'APT a été présenté comme une alternative surmontant certaines des difficultés inhérentes au MEDAF, tant sur le plan théorique qu'empirique. Ainsi, les relations d'évaluation déclinées dans le cadre de l'APT ne font théoriquement pas appel au portefeuille de marché, ne nécessitent pas une fonction d'utilité des investisseurs de la forme quadratique, ni une loi de distribution particulière des taux de rentabilité des actifs. A l'hypothèse centrale d'équilibre de marché pour le MEDAF est substituée celle plus souple d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Cet article a pour objet une mise en perspective de ces différents modèles. La première section effectue un retour sur les relations obtenues dans le cadre de l'APT de Ross (1976). La seconde section se focalise sur les critiques adressées aux tests empiriques effectués dans le cadre de l'APT. La troisième section compare le CAPM dans sa forme la plus générale à l'APT, compte tenu de ses hypothèses empiriques implicites. La dernière section présente succinctement les principaux résultats de la version internationale de l'APT.

1. Retour sur la relation d'évaluation de l'APT de Ross

Une intuition importante en finance est que, du point de vue d'un investisseur averse au risque, l'interdépendance du taux de rentabilité d'un actif avec celui des autres actifs est plus importante que sa propre variance. Dans le cadre du MEDAF, il s'agit de la covariance avec le taux de rentabilité du portefeuille du marché. Dans l'APT, c'est la covariance d'une rentabilité avec des facteurs influençant systématiquement le taux de rentabilité de la majorité des actifs qui est présente dans la relation

d'évaluation. Si les actifs ont des sensibilités identiques à ces facteurs, alors ils seront de proches substituts.

Formellement, la présentation intuitive de Ross (1976) suppose que les taux de rentabilité ex post se conforment au modèle à k facteurs suivant[1] :

$$R_i = E_i + \underline{\beta}_i' \cdot \underline{\delta} + \xi_i, \text{ pour } i = 1, ..., n \text{ et } k < n \tag{1}$$

avec R_i le taux de rentabilité ex post de l'actif i et E_i son taux de rentabilité anticipé ; $\underline{\delta}$ vecteur colonne $k \times 1$ des facteurs communs, $\underline{\beta}_i'$ vecteur ligne $1 \times k$ des sensibilités aux facteurs communs et ξ_i le risque résiduel spécifique de l'actif i, satisfaisant :

H1 : $E(\xi_i) = 0$

H2 : $\text{cov}(\xi_i, \xi_{i'}) = 0$, pour $i \neq i'$

H3 : $E(\delta_j) = 0$

H4 : $\text{cov}(\delta_j, \delta_{j'}) = 0$, pour $j, j' = 1, ..., k$ et $j \neq j'$

Dans le cas simple où les risques spécifiques sont négligeables ($\xi_i \simeq 0$), l'absence d'opportunités d'arbitrage[2] implique l'existence de la constante ρ et du vecteur $\underline{\gamma}$ tels que :

$$E_i = \rho + \underline{\beta}_i' \cdot \underline{\gamma} \tag{2}$$

Ce simple résultat d'algèbre linéaire selon lequel l'espace des taux de rentabilité est généré par le vecteur $\underline{1}$ et les colonnes de $\underline{\underline{\beta}}$ est démontré en construisant un portefeuille d'arbitrage (investissement nul), de risque systématique nul et de structure $\underline{\eta}$, correctement diversifié :

$$\underline{\eta}' \cdot \underline{1} = 0$$

$$\underline{\eta}' \cdot \underline{\underline{\beta}} = \underline{0}'$$

$$\eta_i \rightarrow |1/n|, \text{ pour } i = 1, ..., n$$

l'application de la loi des grands nombres permet de conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \cdot \xi_i = 0$$

donc :

$$\underline{\eta}'\underline{R} = \underline{\eta}'\underline{E} + \underline{\eta}'\underline{\underline{\beta}}\delta + \eta'\xi \simeq \underline{\eta}'\,\underline{E}$$

En l'absence d'opportunités d'arbitrage, le taux de rentabilité certain de ce portefeuille est nécessairement nul, ce qui conduit à (2).

1. Par convention, les caractères soulignés représentent un vecteur colonne, les ' leurs transposées (vecteurs lignes), ceux doublement soulignés une matrice, $\underline{1}$ et $\underline{0}$ les vecteurs colonnes (de dimension adéquate) composés en totalité respectivement de 1 et de 0.

2. C'est-à-dire qu'un portefeuille représentant un investissement *nul* ne peut avoir une rentabilité à la fois *certaine* et *strictement positive*.

Indépendamment de l'hypothèse, beaucoup trop restrictive du point de vue pratique[1], selon laquelle $\xi_i \simeq 0$, l'application de la loi des grands nombres reste délicate. D'une part, la relation (2) suppose que la condition $\underline{\eta}'\underline{E} \simeq 0$ est vérifiée pour *tout* $\underline{\eta}$ orthogonal à 1 et aux colonnes de $\underline{\beta}$, alors que le $\underline{\eta}$ considéré est *spécifique* (correctement diversifié)[2]. D'autre part, il est possible que le poids relatif de chaque actif s'écarte de $|1/n|$ en raison des effets de richesse, ce qui conduirait à une mauvaise diversification du risque spécifique[3].

Plusieurs formulations plus rigoureuses surmontent ces différents obstacles, à l'aide d'hypothèses communes (hypothèse H5 de variance des résidus bornée[4] : $\sigma_i^2 \equiv E(\xi_i^2) \leq \chi_1 < +\infty$, anticipations homogènes des agents, taux de rentabilité du portefeuille de marché borné) et d'hypothèses complémentaires spécifiques : Ross (1976) suppose que l'aversion relative au risque des agents, dont le poids dans la richesse mondiale n'est pas négligeable, est uniformément bornée[5] (intégrable), Jarrow (1988) relâche l'axiome d'indépendance forte[6], alors que Huberman (1982) exclut la possibilité d'arbitrage asymptotique[7]. Le résultat obtenu est cependant beaucoup moins puissant que (2). Il stipule que, *quand le nombre d'actifs tend vers l'infini*, la *somme* des carrés des écarts à la relation d'évaluation (2) converge :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} [E_i - (\rho + \underline{\beta}_i \cdot \underline{\gamma})]^2 < +\infty \qquad (3)^{8}$$

Cette relation signifie que, dans une économie « large » et en l'absence d'opportunités d'arbitrage, le taux de rentabilité de *la plupart* des actifs se conforme *approximativement* à la relation (2), ce qui n'exclut pas des erreurs d'évaluation arbitrairement larges pour un nombre fini d'actifs.

Il convient cependant de noter que la qualité de la relation d'évaluation et le nombre d'actifs la vérifiant sont fonctions croissantes du nombre d'actifs considérés :

$$\lim_{n \to +\infty} |R_n - (\rho + \underline{\beta}_n \cdot \underline{\gamma})| = 0$$

---

1. En particulier, dans la version internationale de l'APT. Voir section 4.

2. Il ne s'agit pas de rejeter le modèle sur la base de cette hypothèse mais de souligner son incohérence vis-à-vis du raisonnement menant à (2).

3. Par ailleurs, cette hypothèse peut paraître assez irréaliste du point de vue empirique, par exemple en considérant les bons du Trésor US.

4. Les hypothèses H2 et H5 définissent le modèle factoriel *strict*.

5. soit : $\max_W \{-U''(W) \cdot W/U'(W)\} \leq \chi_2 < +\infty$, avec W richesse, U fonction d'utilité.

6. Cet axiome postule que la prise en compte de l'incertain n'affecte pas l'ordre des préférences.

7. Considérons une séquence d'économies en nombre croissant d'actifs. Dans la $n^{\text{ième}}$ économie de n actifs, l'arbitrage asymptotique se définit par l'existence d'une sous-séquence n' de portefeuilles d'arbitrage $\underline{c}^{n'}$, de rentabilité $R(\underline{c}^{n'})$, satisfaisant :

$$\lim_{n \to +\infty} E(R(\underline{c}^{n'})) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \operatorname{var}(R(\underline{c}^{n'})) = 0$$

8. Huberman (1982) considère dans la $n^{\text{ième}}$ économie la projection orthogonale de $\underline{E}^n$ dans l'espace engendré par le vecteur $\underline{1}^n$, les colonnes de $\underline{\underline{\beta}}^n$ et un troisième vecteur $\underline{c}^n$ orthogonal aux 2 précédents :

$$\underline{E}^n = \rho^n \cdot \underline{1} + \underline{\underline{\beta}}^n \cdot \underline{\gamma}^n + \underline{c}^n$$

et démontre que, si (3) n'est pas vérifiée, alors il existe *nécessairement* des arbitrages asymptotiques.

A l'inverse, la relation d'évaluation est d'autant plus mauvaise que la variance des actifs est élevée ou que l'ensemble des facteurs communs n'est pas pris en compte[1].

En dernier lieu, il est aisé de démontrer que ρ, dans les formulations (2) et (3), correspond au taux sans risque[2] (ou au portefeuille de bêta nul) et que chaque γ_j s'interprète comme le taux de rentabilité en excès du taux sans risque d'un portefeuille de sensibilité 1 au facteur j et insensible aux autres, c'est-à-dire la prime de risque du *portefeuille de base* j.

2. Validité des tests empiriques de l'APT

Les tests du MEDAF souffrent de plusieurs hypothèses pour le moins restrictives : contrainte d'équilibre de marché (équilibre des investisseurs et égalité des offres et demandes agrégées), normalité des taux de rentabilité ou fonction d'utilité quadratique. Même dans ce cadre, il existe des limites empiriques : l'impossibilité d'observer le taux de rentabilité du portefeuille de marché, ou de façon équivalente sa structure et la distribution jointe des taux de rentabilité de tous les actifs[3], conduit à en retenir une proxy.

A l'opposé, l'APT ne nécessite pas les hypothèses de base du MEDAF et semble bénéficier de plus de 2 avantages décisifs : la relation d'évaluation ne fait pas intervenir le portefeuille de marché et, à la différence du MEDAF, l'APT est testable sur un sous-ensemble d'actifs. En effet, pour qu'1 structure à k facteurs soit identifiable, il suffit que chaque facteur commun soit présent dans un nombre suffisant d'actifs pour ne pas être pris pour un risque résiduel[4].

L'APT est-elle pour autant une théorie testable ? En premier lieu, il existe de sérieux obstacles méthodologiques. Le test le plus rigoureux en présence de risque spécifique ($\xi_i \neq 0$) porterait sur la relation (3). Le problème est qu'il s'agit d'une tautologie : en effet, tout test empirique est restreint à un nombre *fini* d'actifs. Dès lors, la condition (3) est systématiquement vérifiée dans le cadre des hypothèses du modèle (en particulier H5), et donc inutilisable.

---

1. Auquel cas cov $(\xi_i, \xi_{i'}) \neq 0$, pour $i \neq i'$. Cependant, Chamberlain & Rotschild (1983) démontrent que la relation (3) reste vérifiée même si l'hypothèse H4 est relâchée, *à condition* que les valeurs propres de la matrice de covariances des résidus ξ_i soient uniformément bornées par le haut par un nombre fini (modèle *approximatif*). En fait, Grinblatt & Titman (1985) démontrent que, pour *un nombre d'actifs tendant vers l'infini*, les modèles factoriels strict et approximatif sont équivalents.

2. Il suffit pour cela de reprendre la démonstration conduisant à (3), en considérant le taux de rentabilité en excès du taux sans risque $(\underline{E} - \rho \cdot \underline{1})$ au lieu des taux de rentabilité $\underline{E}$, et de supprimer la contrainte $\underline{\eta}' \cdot \underline{1} = 0$ (ou $(\underline{c}^*)' \cdot \underline{1} = 0$ chez Huberman (1982)).

3. Si seuls le taux de rentabilité de quelques actifs et leur poids dans le portefeuille de marché sont connus, il est nécessaire de faire des hypothèses très restrictives sur la répartition des autres actifs, ce qui limite la signification de tout test empirique restreint à un sous-ensemble d'actifs.

4. Ceci est une conséquence du 3e type d'hypothèses complémentaires recensées par Dybvig & Ross (1985) (voir note suivante). De façon générale, il suffit, d'après ces auteurs, que la matrice $\underline{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{\beta}}'$ ait k valeurs propres très élevées, les autres étant nulles.

De façon plus pragmatique, la majorité des tests se réfèrent à l'enchaînement : si (1), alors (2). Notons qu'en présence de risque spécifique, la relation (2) n'est qu'une approximation et non une stricte égalité, et ce sous le respect d'hypothèses complémentaires[1] qui ne sont jamais clairement explicitées (prises en compte ?) dans les tests. Il est cependant concevable d'objecter que ces hypothèses complémentaires sont raisonnables dans le cas des actifs les plus échangés (actions et obligations) et donc d'admettre que l'approximation est suffisamment précise.

Dybvig & Ross (1985) précisent que l'erreur d'évaluation pour un actif donné est bornée par le produit de l'aversion au risque de l'agent avec la variance et avec la proportion de richesse investie dans cet actif. Cependant, même si un sous-ensemble d'actifs vérifie l'hypothèse d'indépendance des risques spécifiques, rien ne garantit qu'elle demeure vérifiée pour les autres actifs, et donc que le modèle factoriel strict soit valide. La borne de l'erreur d'évaluation pour un échantillon fini d'actifs est donc conditionnelle à l'hypothèse jointe de l'indépendance des risques résiduels de *l'ensemble* des actifs de l'économie[2].

Supposons que l'approximation soit considérée comme suffisamment bonne. Il apparaît alors deux types de problèmes consécutifs à la détermination de la structure factorielle adéquate (relation (1)). Shanken (1982) insiste sur le fait que le nombre de facteurs doit être connu à l'avance. En effet, il est toujours possible de définir 2 *sous-ensembles équivalents d'actifs de même taux de rentabilité* (l'un étant une combinaison linéaire de l'autre), qui ne se conforment pas au même modèle factoriel. En particulier, le nombre de facteurs peut différer, ce qui conduit à des relations d'évaluation aberrantes[3]. Quel est alors le vrai modèle factoriel ? Et même si le nombre de facteurs est déterminé, comment les identifier avec certitude ? Les deux

1. Dybvig & Ross (1985) distinguent 7 types d'hypothèses complémentaires alternatives, vérifiées éventuellement asymptotiquement :
- var $(\xi_i) \to 0, \supset i$;
- $\underline{\eta}_i \to |1/n|, \supseteq i$;
- chaque facteur peut être répliqué par un portefeuille d'actifs ;
- quelques agents détiennent un portefeuille *parfaitement* diversifié ;
- il n'existe pas d'arbitrage ;
- il existe une efficience de Pareto ;
- le nombre d'actifs tend vers l'infini ;
- tous les actifs sont en offre positive.

2. Dybvig (1983) et Grinblatt & Titman (1983) évaluent cette borne dans le cadre d'une économie finie en équilibre compétitif et sous l'hypothèse H2 pour *tous* les actifs, ce qui constitue une importante déviation à la formulation de Ross (1976). Cependant, aucune autre hypothèse sur les risques spécifiques n'est posée (en particulier, sur leur diversification complète), ce qui explique l'erreur d'approximation. Voir infra section 3.

3. Dybvig & Ross (1985) rejettent cette aberration en argumentant la composition « dégénérée » des actifs composites retenus par Shanken (1982) : celle-ci suppose que les sensibilités aux facteurs communs sont de signes opposés et amplifierait *excessivement* les résidus. Cette critique apparaît cependant erronée : ces actifs vérifient *exactement* la relation d'évaluation dans le cadre de l'APT strict et la vente à découvert dont dépend le taux de rentabilité de l'actif composite n'intervient pas dans l'arbitrage. Par ailleurs, supposer *la variance résiduelle du portefeuille suffisamment bornée semble exclure du champs de l'APT les portefeuilles très risqués* et, surtout, n'apparaît *pas* comme *un critère empirique indiscutable* : d'une part, la variance d'un portefeuille d'actifs en nombre *fini* est, *par définition* bornée ; d'autre part, pour quelle valeur minimum de la relation d'évaluation peut-elle être considérée comme une bonne évaluation ?

méthodes classiques de détermination de la structure factorielle lors des tests empiriques révèlent leurs limites sur ces points.

D'une part, l'analyse factorielle bute, en premier lieu, sur le nombre de facteurs. Selon Dhrymes, Friend & Gultekin (1984), le nombre de facteurs communs croît avec le nombre d'actifs ou d'observations, et varie en fonction de la sous-période (à nombre d'observations constant) ou de l'échantillon retenus (à nombre d'actifs constant). Ceci semble traduire que l'influence de tous les facteurs ne se révèle pas sur le même terme, et ce pour tous les actifs. Les résultats de Lehmann & Modest (1988) sont aussi mitigés : l'acceptation du modèle semble insensible au nombre, spécifié a priori, de facteurs. En second lieu, la notion de facteurs communs de l'analyse factorielle – toute source de covariation entre *certains* des actifs *de l'échantillon* – ne coïncide pas avec celle du modèle d'arbitrage – toute source de covariation entre *tous* les actifs de *l'économie*. Enfin, l'analyse factorielle repose sur deux hypothèses restrictives : la normalité des taux de rentabilité, critique adressée au MEDAF, ainsi que la forme diagonale de la matrice de variance-covariance des résidus ξ_i, manifestement erronée dans le cadre international[1].

L'approche empirique alternative adoptée par Chen, Roll & Ross (1986), qui consiste à spécifier a priori le nombre de facteurs, à supposer que ce nombre soit exact (quelle preuve ?), reste confrontée au problème de l'identification de ces facteurs. Trois types de problèmes s'enchaînent alors : en premier lieu, il faut déterminer les bons agrégats macro-économiques conduisant à la relation d'évaluation ; il faut ensuite isoler les proxies parfaitement représentatives de ces variables ; enfin, il faut mesurer correctement les variations non anticipées de ces proxies. Un test de l'APT selon cette procédure est alors celui d'une hypothèse jointe sur la validité du modèle et l'identification des innovations des proxies des variables macro-économiques supposées pertinentes !

Pour ces deux méthodes, il existe des risques de rejet abusif dans la mesure où l'absence de certains facteurs provoquent des incohérences entre les différents échantillons. En particulier, il suffit qu'un facteur commun ne soit représenté que par 1 seul actif pour qu'il soit assimilé, à tort, à un risque spécifique et donc que l'actif considéré ne paraisse pas satisfaire l'APT. Néanmoins, la non identification de la structure factorielle adéquate induit essentiellement des risques d'acceptation abusive. En plus des hypothèses jointes souvent ignorées, il demeure une critique dans le même esprit que celle adressée au MEDAF à propos des actifs non échangés (capital humain, ...). Supposons qu'il soit possible, en dépit des restrictions mentionnées, d'isoler un modèle factoriel adéquat pour l'ensemble des actifs financiers de l'économie. Or, les actifs financiers sont concevables comme des combinaisons

1. Sur le marché des changes, la conversion des rentabilités en une devise de référence induit des corrélations entre les risques spécifiques (voir infra section 4). Ces deux hypothèses techniques, pouvant en partie expliquer les résultats empiriques précédents (voir Malécot dans ce même numéro), conduisent Rousseau & Roger (1989) à utiliser l'analyse en composantes principales comme méthode d'extraction des facteurs communs.

d'actifs productifs et individuels. Le modèle factoriel pertinent est-il alors celui qui correspond aux actifs financiers ?

Enfin, un dernier problème est soulevé par Shanken (1985) : même si le nombre d'actifs « adéquats » tend vers l'infini et que le modèle factoriel « pertinent » est isolé, seule la relation (3) relative à *l'ensemble* des actifs est vérifiée, sans pour autant poser de restrictions sur la relation d'évaluation de chaque actif considéré *isolément.* Il est donc possible qu'il subsiste certains écarts à la relation d'évaluation, sans que cela implique une opportunité d'arbitrage. Comment alors interpréter un test empirique exhibant de tels écarts : s'agit-il d'un actif faisant « normalement » exception ou le modèle est-il faux ? Il est donc impossible de rejeter ce dernier en toute certitude. Shanken (1985) en conclut que l'APT de Ross (1976), bien que testable en théorie, ne l'est pas en pratique.

3. APT d'équilibre et CAPM

Les considérations précédentes soulignent qu'au problème de la détermination du portefeuille de marché dans le cadre du MEDAF est substitué celui de la détermination de la structure factorielle pertinente dans le cadre de l'APT. L'APT ne doit cependant pas être considéré comme une simple généralisation du MEDAF. D'une part, il est toujours possible de décomposer le bêta de marché du MEDAF comme une combinaison linéaire de bêtas des facteurs élémentaires constituant le portefeuille de marché ; réciproquement, une relation multi-factorielle *exacte* peut toujours être réduite à une relation à un seul facteur. Le nombre de facteurs n'est donc pas le critère permettant de distinguer le MEDAF ou son extension intertemporelle de l'APT. D'autre part, le MEDAF aboutit à une relation exacte, alors que l'APT ne définit qu'une approximation.

La distinction entre ces deux modèles porte en fait sur leurs paradigmes respectifs : équilibre ou arbitrage. Le changement de paradigme de l'APT, de l'arbitrage à l'équilibre, permet de résoudre ses incohérences empiriques. Il s'agit de déterminer la structure factorielle pertinente et de justifier le traitement de l'enchaînement : si (1), alors (2), c'est-à-dire l'égalité et non l'approximation de la relation d'évaluation.

Un critère de sélection de la structure factorielle pertinente est qu'elle ait des fondements économiques et non purement statistiques. Une interprétation en est que cette structure doit expliquer la totalité du taux de rentabilité du portefeuille de marché. En partant de cette hypothèse, Connor (1984) a proposé une autre version de l'APT dans le cadre d'un *équilibre compétitif*[1]. Sa formulation suppose que les facteurs $\underline{\delta}$, pour une structure factorielle (1) donnée, expliquent tout le risque du portefeuille de marché, ou encore que ce risque est complètement diversifié, ce qui est précisément l'hypothèse du MEDAF. Dans ces conditions, la *relation d'évalua-*

1. Un équilibre compétitif est caractérisé par le fait que chaque agent détient un portefeuille optimal, sous sa contrainte de budget, et que l'offre et la demande agrégées de titres sont égales.

tion devient une égalité[1] : l'absence de risque spécifique du portefeuille de marché ($\xi_m = 0$) traduit le fait que tous les risques spécifiques ξ_i de chaque actif peuvent être parfaitement diversifiés, et donc que ces ξ_i ne sont pas rémunérés à l'équilibre de marché. La relation obtenue est alors strictement similaire à (2), avec cependant une différence importante dans la formulation du modèle : le fait que ξ_i soit négligeable est directement imputé à une situation d'équilibre et non de simple arbitrage.

Cette formulation présente deux avantages importants : d'une part, elle valide *une seule* structure factorielle, celle vérifiant la diversification du portefeuille de marché ; d'autre part, elle exclut les structures factorielles à 0 facteur[2] qui sont sources d'aberrations dans l'exemple de Shanken (1982). Il subsiste cependant une limite importante. Dans une *économie infinie*, le risque spécifique de chaque actif est diversifié par application de la loi des grands nombres[3]. Dans une *économie finie*, il est nécessaire que l'offre de *chaque* actif soit telle que leur risque spécifique *individuel* soit nul dans le portefeuille de marché. En fait, comme le mentionne Shanken (1985), les tests empiriques réalisés dans ce cadre portent sur l'hypothèse *jointe* de la diversification optimale du portefeuille de marché et du modèle factoriel. Ils sont donc soumis aux mêmes critiques que ceux du MEDAF : vérifier l'efficience, au sens moyenne-variance, du portefeuille de marché.

Dans le cadre d'une économie finie en équilibre compétitif, Wei (1988) démontre qu'il est possible de relâcher l'hypothèse de diversification complète du portefeuille de marché, sous l'hypothèse alternative que les risques spécifiques ξ_i puissent être séparés en une composante fonction du risque résiduel ξ_m du portefeuille de marché et une composante ζ_i indépendante de ce même risque :

$$\xi_i = \beta_{im} \cdot \xi_m + \zeta_i, \quad \text{avec : } \operatorname{cov}(\zeta_i, \beta_{ij}) = \operatorname{cov}(\zeta_i, \xi_m) = 0, \quad \text{pour } j = 1, \ldots, k$$

Pour que la relation d'évaluation exacte soit vérifiée, il suffit alors de considérer la prime de risque γ_m du résidu du portefeuille de marché comme un facteur commun supplémentaire, où $\gamma_m > 0$ et décroissante avec le nombre des autres facteurs communs pertinents. La relation (2) devient :

$$E_i = \rho + \underline{\beta}_i' \cdot \underline{\gamma} + \beta_{im} \cdot \gamma_m, \quad \text{avec} \quad \beta_{im} \equiv \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_m)/\operatorname{var}(\xi_m) \qquad (2')$$

L'équation (2') se réduit à l'APT de Ross (1976) en économie infinie et au modèle de Connor (1984) si le portefeuille de marché est parfaitement diversifié. La relation d'évaluation intègre la covariance avec des facteurs exogènes et avec un agrégat déterminé de façon endogène.

1. Parmi les hypothèses complémentaires, Connor (1984) conserve H5 mais relâche H2.

2. Si $k = 0$, alors tout le risque d'un portefeuille est spécifique. Si le portefeuille de marché m est parfaitement diversifié, cela implique que var $(R_m) = 0$, résultat empiriquement insoutenable.

3. Ceci est une contrainte supplémentaire par rapport à la reformulation de l'APT par Huberman (1982). Cette dernière n'exclut pas des actifs dont le poids relatif dans le portefeuille de marché est important. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'il subsiste des risques spécifiques (en l'absence d'équilibre) et donc que la relation d'évaluation n'est qu'une approximation, comme précisé dans la 1re section.

Ces différentes versions des modèles d'APT d'équilibre justifient la relation d'évaluation en tant qu'égalité, c'est-à-dire les tests empiriques de la forme (1) ⇒ (2). Il s'avère donc que l'APT d'équilibre est le seul fondement théorique justifié aux tests empiriques. Cependant, l'APT d'équilibre s'écarte notablement de la version initiale de Ross (1976) et il est important d'en saisir les implications, tant théoriques qu'empiriques. Du point de vue théorique, il s'agit d'un changement de paradigme, de l'arbitrage à l'équilibre. De plus, les hypothèses complémentaires soit correspondent à celles du MEDAF (portefeuille de marché efficient), soit définissent un modèle parfaitement similaire au MEDAF intertemporel en introduisant le portefeuille de marché comme facteur supplémentaire[1].

Cette analogie se démontre indifféremment à partir du modèle CAPM en termes réels de Cox, Ingersoll & Ross (1985). Dans ce modèle, les individus investissent dans des titres représentatifs des processus de production et des titres financiers. Ces derniers sont, par hypothèse, des portefeuilles d'arbitrage qui matérialisent les choix contingents aux différents niveaux de production[2]. La rentabilité d'équilibre de chaque actif financier s'exprime alors comme la somme de la rentabilité sans risque et d'une combinaison linéaire des dérivés partielles premières du prix de l'actif considéré par rapport à la richesse (croissance agrégée de la production optimale) et aux variables d'état gouvernant les processus productifs. Chaque dérivée partielle et chaque coefficient associé s'interprètent respectivement comme la quantité de risque spécifique à l'actif et comme la rentabilité en excès du taux sans risque de la richesse investie dans un portefeuille ne supportant que le risque du facteur considéré. Cette formulation correspond donc parfaitement à la relation d'évaluation de l'APT de Connor (1984).

Si l'hypothèse selon laquelle les actifs financiers sont des portefeuilles d'arbitrage est remise en cause, il est possible de démontrer (Namur, (1992)) que le taux de rentabilité des actifs financiers est gouverné par des variables d'état *indépendantes* des processus productifs, ce qui correspond au portefeuille de marché (d'actifs financiers) du MEDAF. Plus généralement, le taux de rentabilité moyen d'un actif quelconque demeure une combinaison linéaire du taux de rentabilité d'un nouvel actif sans risque[3] et des actifs ne supportant qu'un seul risque élémentaire. L'hypothèse d'indépendance des facteurs élémentaires est conservée, sauf pour le portefeuille de marché alors présent dans les équations de prix.

Cependant, si *tous* les facteurs structurels sont extraits, le portefeuille de marché se réduit au terme résiduel, non corrélé avec l'ensemble des facteurs (donc diversifiable dans une économie infinie). A l'opposé, en l'absence de facteurs structurels, le taux de rentabilité des actifs financiers est déterminé uniquement d'après une

1. Le MEDAF intertemporel ne postule ni fonction d'utilité quadratique, ni distribution selon une loi normale des taux de rentabilité, ni efficience (au sens moyenne-variance) du portefeuille de marché.

2. Il s'agit donc d'un modèle d'équilibre général dans la mesure où, *à la différence* du MEDAF intertemporel, le taux de rentabilité des actifs financiers est fonction des moments des variables d'état (et de la richesse) dont l'évolution est résolue de façon *endogène*, et *non* du portefeuille de marché.

3. Il devient fonction du taux de rentabilité des actifs financiers et des covariances de ces derniers avec les variables d'état et la rentabilité des investissements productifs.

relation d'équilibre avec le portefeuille de marché, ce qui correspond alors au MEDAF. Cette conclusion est similaire à celle de Wei (1988) et démontre que la prise en compte de l'ensemble des variables d'état gouvernant les processus productifs permet de généraliser le MEDAF *intertemporel* à l'APT d'équilibre[1].

Du point de vue empirique, et bien qu'une relation d'évaluation exacte soit justifiée, l'APT d'équilibre n'est pas exempt d'acceptation abusive. Cette critique, adressée par Shanken (1982), est en fait une généralisation de celle de Roll (1977). Ce dernier démontre que, dans le cadre du MEDAF, la relation linéaire du type $E_i = \rho + \beta_{im} \cdot \lambda$ (avec la pente adéquate) est vérifiée pour *tout* portefeuille efficient dont le taux de rentabilité est supérieur à celui du portefeuille de variance minimum, et approximativement pour tout portefeuille non efficient. Ceci implique que le seul test valable du MEDAF porte sur l'efficience, au sens moyenne-variance, du portefeuille de marché. Dans le cadre de l'APT, il suffit que les facteurs correspondent à des portefeuilles dont une combinaison linéaire est (approximativement) un portefeuille efficient pour que la relation d'évaluation multifactorielle soit (approximativement) vérifiée. Ceci implique que le seul test valable de l'APT d'équilibre porte sur l'efficience des facteurs, c'est-à-dire la diversification complète du portefeuille de marché pour cette structure factorielle.

4. IAPT

Le modèle de Ross (1976) est implicitement formulé en termes réels dans la mesure où n'intervient pas une monnaie d'évaluation. Sa transposition au cadre international nécessite d'intégrer le risque de change. Trois questions majeures se posent alors.

En premier lieu, le modèle factoriel est-il valide indépendamment du numéraire choisi ? De façon générale, le choix de la monnaie d'évaluation peut se poser tant pour les taux de rentabilité que pour les facteurs communs. Fontaine (1988) suggère de décomposer ces derniers en 2 catégories : d'une part, ceux qui n'ont pas de dimension monétaire (le climat, les agrégats macro-économiques en volume,...), d'autre part, ceux qui ont au contraire une dimension monétaire[2], c'est-à-dire nécessairement évalués en une monnaie (l'inflation domestique, tout agrégat macro-économique en valeur...). Une solution consiste alors à attribuer à chaque actif et à

1. Le MEDAF intertemporel a de plus l'avantage de ne postuler ni conformité des taux de rentabilité à une structure factorielle de type (1), ni aversion relative au risque uniformément bornée. Dybvig & Ross (1985) soutiennent une thèse différente mais n'envisagent que la comparaison de l'APT avec le MEDAF *monopériodique*. Ces deux modèles ne sont pas pour autant exclusifs l'un de l'autre.

2. Dans la formulation initiale de l'IAPT, Solnik (1983) considère ces facteurs comme négligeables, ce qui autorise plusieurs simplifications dans l'expression des taux de rentabilité. Les tests de Cho, Eun & Senbet (1986), appliqués à une évaluation en USD et en JPY, semblent confirmer ce point de vue. Une interprétation en est que les agents raisonnent essentiellement sur les agrégats en volume sans tenir compte des phénomènes monétaires. Mais ce raisonnement apparaît erroné si le numéraire est sujet à de fortes dévalorisations ou, à l'extrême, si les actifs considérés sont purement monétaires. Voir infra.

chaque facteur une monnaie « naturelle » d'évaluation : les actions allemandes en DEM, l'inflation française en FRF, les matières premières en USD...

Dans ce cadre, Mathis (1991) démontre que les taux de rentabilité se conforment au modèle factoriel, *indépendamment du numéraire retenu* (en convertissant les évaluations « naturelles » en ce numéraire), *à condition de considérer les taux de change comme des facteurs communs*[1]. Le taux de rentabilité de l'actif sans risque *en ce numéraire* (pour simplifier, le bon du Trésor libellé en numéraire) correspond à celui du portefeuille dont le taux de rentabilité est certain, ce qui peut dans tous les cas être défini.

En second lieu, comment est intégré un changement de monnaie d'évaluation dans les taux de rentabilité moyen des actifs ? De façon générale, si les taux de change sont gouvernés par un processus brownien, les taux de rentabilité moyens ainsi que la sensibilité[2] vis-à-vis du facteur *change* de la monnaie d'évaluation considérée varient. En particulier, le portefeuille qui duplique l'actif sans risque en numéraire incorpore alors le risque de change de la nouvelle monnaie d'évaluation, ce qui justifie qu'il soit fonction de cette dernière. Par contre, les sensibilités aux autres facteurs communs demeurent identiques.

En fait, il s'avère que le choix du numéraire n'est pas sans importance, particulièrement si les actifs étudiés sont les taux de change. En effet, à l'approche d'une dévaluation consécutive à des attaques spéculatives, les interventions de soutien des banques centrales stabilisent artificiellement les variances des taux de rentabilité, qui par contre varient amplement lors de la dévaluation effective. Ce saut de la variance a deux conséquences : d'une part, il existe un risque spécifique à chaque monnaie, d'autant plus important que celle-ci n'est pas soumise à une fourchette de parité *crédible*. A l'opposé, l'existence de zones monétaires (USD, JPY, DEM...) induit une corrélation importante des résidus[3]. D'autre part, il importe que le numéraire de référence soit une devise *non sujette* à des fréquentes dévaluations : le risque spécifique de chaque devise (l'erreur d'évaluation) sera d'autant plus faible que la covariance de cette dernière avec le numéraire retenu est élevée[4].

---

1. La formalisation retenue des taux de change peut induire une contrainte supplémentaire. S'ils sont gouvernés par un modèle factoriel du type (1), il est nécessaire de postuler l'indépendance des résidus des taux de change entre eux. Par contre, si les taux de change sont gouvernés par des mouvements browniens, hypothèse retenue par Solnik (1983), aucune contrainte supplémentaire n'est requise.

2. Dans le cas particulier de l'absence de dimension monétaire des facteurs communs, la pondération de cette nouvelle sensibilité se réduit à 1.

3. La solution adoptée par Rousseau & Roger (1989) consiste à se placer dans le cadre de la formalisation de Chamberlain & Rotschild (1983).

4. Tout changement de la devise de référence implique une transformation non linéaire de la matrice de variance-covariance des taux de rentabilité. Soit $R_t^{a/b}$ la rentabilité en t de la devise a exprimée en base b :

$$R_t^{a/b} \equiv \log\,[e_t^{a/b}/e_{t-1}^{a/b}], \text{ avec } e_t^{a/b} \text{ taux de change courant en } t \text{ de } a \text{ contre } b$$

donc :

$$R_t^{a/c} = \log\,[e_t^{a/b} \cdot e_t^{b/c}/e_{t-1}^{a/b} \cdot e_{t-1}^{b/c}] = \log\,[(e_t^{a/b}/e_{t-1}^{a/b}) \cdot (e_{t-1}^{c/b}/e_t^{c/b})] = \log\,[e_t^{a/b}/e_{t-1}^{a/b}] - \log\,[e_t^{c/b}/e_{t-1}^{c/b}]$$

donc :

$$\text{var}\,(R_t^{a/c}) = \text{var}\,(R_t^{a/b}) + \text{var}\,(R_t^{c/b}) - 2\,\text{cov}\,(R_t^{a/b}, R_t^{c/b})$$

donc var $(R_t^{a/c})$ est une fonction décroissante de cov $(R_t^{a/b}, R_t^{c/b})$. Ce problème, évoqué par Rousseau et Roger (1989), conduit ces auteurs à retenir le Franc suisse (CHF) comme base d'évaluation.

La dernière question est relative à l'incidence du changement de monnaie d'évaluation sur la prime de risque de chaque facteur élémentaire (portefeuille de base). De façon générale, la variation de prime d'un facteur élémentaire en fonction de la monnaie d'évaluation (prime en numéraire b d'un facteur en excès de cette même prime en une monnaie quelconque c) est proportionnelle à la covariance entre le taux de rentabilité du portefeuille de base considéré et le taux de change de la nouvelle monnaie d'évaluation. Plus précisément, Mathis (1991) démontre que, pour les facteurs élémentaires *taux de change*, notés γ_e :

$$\gamma_{e^{a/b}} - \gamma_{e^{a/c}} = \text{cov}\,(e^{a/b}, e^{c/b})/\text{var}\,(e^{a/b}) \tag{4}$$

avec $e^{a/b}$ taux de change au certain de la devise a en numéraire b. En particulier, si le facteur élémentaire a correspond à la nouvelle monnaie d'évaluation c :

$$\gamma_{e^{a/b}} - \gamma_{e^{a/a}} = \text{cov}\,(e^{a/b}, e^{a/b})/\text{var}\,(e^{a/b}) = 1 \tag{4'}$$

et pour les *autres facteurs élémentaires*, où $\gamma_{j\,(b)}$ note la rentabilité en numéraire b du portefeuille de base j[1] :

$$\gamma_{j\,(b)} - \gamma_{j\,(c)} = \text{cov}\,(\gamma_{j\,(b)}, e^{c/b}) \tag{5}$$

De façon complémentaire, si l'actif sans risque est fonction de la monnaie d'évaluation, il est justifié de décliner la relation de parité des taux d'intérêt couverts. Cette relation est en fait un cas particulier de (4), dans la mesure où le seul risque encouru est alors un *risque de change*, qu'il convient cependant de distinguer de la *prime d'un facteur élémentaire* taux de change (sensibilité *unitaire* au taux de change). Le taux d'intérêt nominal du numéraire b en excès du taux d'intérêt nominal de la devise a est égal à la variation anticipée du taux de change au certain de la devise a, diminuée de la *prime de risque de change de la monnaie a* (soit le produit de la prime du facteur élémentaire taux de change de a par la volatilité de ce taux de change) :

$$\rho_{b\,(b)} - \rho_{a\,(a)} = E\,(de^{a/b}/e^{a/b}) - \gamma_{e^{a/b}} \cdot \text{var}\,(e^{a/b}) \tag{4''}$$

En conclusion, il est possible de décliner l'APT dans le cadre international. Par rapport à l'IAPM (intertemporel ou non), cette transposition présente l'intérêt de ne pas faire appel à l'aversion au risque des investisseurs dans les relations d'évaluation, mais aussi l'inconvénient majeur de postuler des marchés de capitaux parfaitement intégrés. Cette hypothèse implicite est en effet nécessaire pour déterminer le prix « unique » de chaque facteur en une monnaie donnée, indépendamment de la nationalité de l'investisseur. De façon plus nuancée, l'IAPT reste soumis à des contraintes liées à la modélisation retenue des taux de change et à la corrélation des résidus des actifs.

1. Ces primes sont plus simples à calculer que celles des facteurs élémentaires taux de change car il n'est pas requis de calculer la variance de la prime en numéraire du facteur de base considéré.

Conclusion

Sur le plan théorique, deux apports de l'APT sont essentiels. D'une part, l'APT confirme l'importance du risque consécutif à la covariance entre les actifs sur la seule base de l'arbitrage. D'autre part, il permet de relativiser le rôle de la covariance entre les taux de rentabilité des actifs et celui du portefeuille du marché au profit de la covariance entre le taux de rentabilité de l'actif considéré et des facteurs exogènes productifs ou macro-économiques. En ce sens, l'APT et le modèle de Cox, Ingersoll & Ross (1985) semblent *plus performants que le MEDAF sur le plan théorique pour déterminer les rentabilités d'équilibre fondamentales.*

Cependant, il existe plusieurs limites à l'APT consécutives à ses hypothèses empiriques. En premier lieu, l'exactitude des taux de rentabilité d'équilibre (APT d'équilibre) est conditionnée à la détermination, *a priori*, de la structure factorielle pertinente (nombre et identification des facteurs) afin d'exclure tout risque systématique du portefeuille de marché. Or, il est nécessaire, soit de faire des hypothèses similaires au MEDAF, soit d'introduire le portefeuille de marché comme facteur commun supplémentaire. En ce sens, l'APT d'équilibre reste soumis à des critiques similaires à celle du MEDAF. En fait, il paraît totalement justifié de considérer l'APT d'équilibre comme un CAPM intertemporel. La seconde limite, complémentaire à la précédente, est l'hypothèse de variance bornée des résidus. A l'inverse, le MEDAF, tout en attribuant un rôle disproportionné au portefeuille de marché, *permet de rendre compte de la volatilité apparemment excessive des actifs financiers.*

De façon plus fondamentale, quels sont les apports décisifs de l'APT dans une stratégie de portefeuille ? Si les modèles d'équilibre général (CAPM en termes réels) et l'APT autorisent des prévisions plus fines des taux de rentabilité en fonction des facteurs communs, une approche purement pragmatique remet en cause la pertinence, ou du moins la stabilité, de ces relations à très court terme. Par ailleurs, la sensibilité à ces facteurs semble se révéler sur différents termes. Leur objectif apparaît donc plus structurel que conjoncturel et *répond mieux à une stratégie de long terme* qu'à la détermination de taux de rentabilité instantanés. En revanche, une stratégie de très court terme peut être fondée sur la seule constatation du risque, indépendamment de son origine, ce qui justifie alors le recours à l'analyse moyenne-variance classique. De façon complémentaire, l'IAPT reste tributaire de l'hypothèse de marchés de capitaux parfaitement intégrés.

En définitive, il est important de distinguer les paradigmes de l'arbitrage et de l'équilibre. L'APT de Ross (1976), fondé sur le seul concept d'arbitrage, n'est pas plus apte aux tests théoriques que le MEDAF. Son intérêt essentiel est d'introduire dans les modèles financiers une intuition perçue précédemment dans les modèles économiques : le rôle des facteurs économiques structurels sur le moyen et long terme.

RÉFÉRENCES

CHAMBERLAIN G., ROTSCHILD M. (1983) "Arbitrage, Factor Structure and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets", *Econometrica*, septembre, 1281-1304.

CHEN N.F., ROLL R., ROSS S. (1986) "Economic Forces and the Stock Market", *J. of Business*, juillet, 383-403.

CHO D., EUN C., SENBET T. (1986) "International Arbitrage Pricing Theory : an Empirical Investigation", *J. of Finance*, juin, 313-29.

CONNOR G. (1984) "A Unified Beta Pricing Theory", *J. of Economic Theory*, décembre, 13-31.

COX J., INGERSOLL J., ROSS S. (1985) "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, mars, 363-84.

DHRYMES P., FRIEND I., GULTEKIN N. (1984) "A Critical Reexamination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory", *J. of Finance*, juin, 323-46.

DYBVIG P. (1983) "An Explicit Bound on Individual Assets'Deviations from APT Pricing in a Finite Economy", *J. of Financial Economics*, décembre, 483-96.

DYBVIG P., ROSS S (1985) "Yes, the APT is Testable", *J. of Finance*, septembre, 1173-88.

FONTAINE P. (1988) *Arbitrage et Evaluation Internationale des Actifs Financiers*, Paris, Economica.

GRINBLATT M., TITMAN S. (1983) "Factor Pricing in a Finite Economy", *J. of Financial Economics*, décembre, 497-507.

HUBERMAN G. (1982) "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory", *J. of Economic Theory*, 183-91.

JARROW R. (1988) *Finance Theory*, Prentice-Hall International.

LEHMANN N., MODEST D. (1988) "The Empirical Foundations of the Arbitrage Pricing Theory", *J. of Financial Economics*, septembre, 213-54.

MATHIS J. (1991) *Finance Internationale*, Paris, Eska.

NAMUR D. (1992) *Détermination, Couverture et Valorisation du Risque sur le Marché des Changes*, Thèse de Doctorat, Université de Paris-XIII.

ROLL R. (1977) "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests ; Part I : On Past and Potential Testability of the Theory", *J. of Financial Economics*, mars, 129-176.

ROSS S. (1976) "The Arbitrage Pricing Theory of Capital Asset Pricing", *J. of Economic Theory*, décembre, 341-60.

ROUSSEAU P., ROGER P. (1989) "Sur l'évaluation des taux de change : une approche par le modèle d'arbitrage", *Économies et Sociétés*, série G n° 14, 159-82.

SHANKEN J. (1982) "The Arbitrage Pricing Theory : Is it Testable ?" *J. of Finance*, décembre, 1129-40.

SHANKEN J. (1985) "Multi-Beta CAPM or Equilibrium-APT ? : a Reply", *J. of Finance*, septembre, 1189-96.

SOLNIK B. (1983) "International Arbitrage Pricing Theory", *J. of Finance*, mai, 449-57.

WEI J. (1988) "An Asset-Pricing Theory Unifying the CAPM and APT", *J. of Finance*, septembre, 881-92.