JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

HARRY MARKOWITZ

L'histoire de la finance moderne

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, nº 4 (1992), p. 13-33

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_4_13_0>

© Société de statistique de Paris, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

L'HISTOIRE DE LA FINANCE MODERNE

par Harry MARKOWITZ
Professeur au Baruch College de l'Université de New York
Prix Nobel 1990 d'Economie

SALLES D'ETUDES (FACULTE DE DROIT) ECONOMIQUES ET STATISTIQUES

Je voudrais revenir un instant sur l'épisode de ma soutenance de thèse de doctorat[1]. Comme il vient d'être dit, Friedman de déclarer : « Je n'ai rien contre les mathématiques mais ceci concerne les sciences économiques, en conséquence, Harry, nous ne pouvons pas vous décerner un doctorat de sciences économiques pour une thèse qui n'est pas de l'économie ! » Et pendant une heure et demie ensuite, presque tout le temps, il a répété qu'il ne pouvait pas me donner une thèse d'économie pour quelque chose qui n'en était pas ! A un moment, il déclare : « Vous avez un problème, ce n'est pas de l'économie, ce n'est pas de la gestion, ni des mathématiques ». Et Jacob Marschak de l'interrompre : « Ce n'est pas de la littérature ». Finalement, je suis allé dans le couloir et après 5 minutes de délibération, le Professeur Marschak sort, et me dit : « Félicitation Docteur Markowitz ».

* *
*

Je vais donc vous présenter l'histoire de la finance moderne. En fait je ne parlerai que d'une sous-partie de cette dernière, celle qui concerne la théorie du portefeuille. Je ne parlerai donc pas des autres développements dans le domaine financier, par exemple de la duration des obligations inventée par Macaulay et des conséquences qui découlent de cette innovation.

Je vais présenter les idées fondamentales de la théorie du portefeuille, le concept d'efficience dans un cadre « moyenne variance », et ses implications : le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)[2], les modèles de covariance, les procédures d'optimisation et tout ce qui découle de la problématique « moyenne-variance » et du MEDAF. Je ne m'intéresserai d'ailleurs pas seulement à la théorie telle qu'elle est apparue dans des livres ou des articles, mais aussi à ses aspects pratiques, à ses utilisations quantitatives – que l'on appelle aujourd'hui « QUANTS » – qui per-

1. Traduction de l'enregistrement de la Conférence par G. Gallais-Hamonno à partir d'une transcription et d'une première mouture faite par M. A. Annappa, doctorant.

2. NDT. En anglais : « *Capital Asset Pricing Model* », CAPM.

mettent à de nombreuses sociétés de conseil de gagner de l'argent, qui expliquent aujourd'hui la création de nouveaux produits financiers et qui, vraisemblablement, influencent les marchés.

Mon article « *Portfolio Selection* » a été publié en 1952 et il traitait de la manière dont les investisseurs minimisent – ou devraient minimiser – le risque pour un niveau donné de rentabilité espérée *(expected return)* et maximisent la rentabilité espérée pour un niveau donné de risque. Comme il était question de deux critères, la rentabilité espérée et le risque mesuré par l'écart-type, j'avais dessiné un graphique en mettant le rique en ordonnées et la rentabilité attendue en abscisses. C'est ce schéma de 1952 que j'utilise toujours pour mes travaux personnels et quand personne ne regarde car, aujourd'hui, cette représentation est inversée : on met l'écart-type en abscisses et la rentabilité attendue en ordonnées.

TRANSPARENT II

Mean – Variance Efficiency

MARKOWITZ H. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, March.

Choose *portfolio* which is efficient in terms of expected return E and variance of return V {or standard deviation σ].

M. MARKOWITZ (1952)

A.-D. ROY (1952)
(1989)

As opposed to WILLIAM J.B. (1938), *The Theory of Investment Value*, Harvard University Press.

See also ROY A.D. (1952), "Safety First and the Holding of Assets", *Econometrica,* 20, 431-49.

Sur un tel graphique, tout portefeuille est caractérisé par un point représentant une combinaison de rentabilité-risque. Parmi toutes les combinaisons de rentabilité-risque qu'il est possible d'obtenir, une série particulière de points a été appelé « la frontière efficiente »*(efficient set)* parce qu'en chacun de ses points le risque est minimum pour tout niveau de rentabilité espérée et la rentabilité attendue est maximum pour tout niveau de risque. Ceci implique que vous ne voudriez détenir aucun portefeuille (ou combinaison) non-efficient puisqu'en vous dirigeant vers le point approprié sur la fonction efficiente vous pouvez obtenir une rentabilité plus grande sans augmenter le risque couru ou bien moins de risque pour la même rentabilité attendue.

L'idée selon laquelle on devrait agir – ou on agit – en fonction du risque et de la rentabilité attendue est tellement évidente que vous pouvez vous demander pourquoi quelqu'un a pu obtenir à cause d'elle un doctorat, sans parler du Prix Nobel !

Evidemment les gens agissaient en se basant sur l'idée de la rentabilité-risque bien avant 1952 ! Mon travail a consisté à présenter une théorie formelle de ce comportement. Ma théorie était en contradiction avec la théorie dominante à l'époque, qui était celle de J.B. Williams dans *« The Theory of Investment Value »*. Quand je me suis intéressé, presque par accident, au comportement des actions pour ma thèse de doctorat, mon directeur de thèse, Jacob Marschak m'a envoyé voir le Professeur Marshall Ketcham à la Chicago Business School[1] pour lui demander les références bibliographiques à lire pour aborder ce domaine. L'une des références était ce livre de Williams et, c'est en le lisant dans la bibliothèque de la Business School que ce concept de rentabilité-risque m'est apparu. Williams dit que la valeur d'une action doit être la valeur actuelle de ses dividendes à venir. Mais vous savez comme moi que le futur est incertain et on ignore ce que seront les dividendes futurs.

C'est pourquoi je supposais que Williams voulait dire que l'on devait évaluer la valeur d'une action à partir de la valeur **espérée** *(expected value)* de ses futurs dividendes. Mais si vous vous intéressez seulement à la valeur espérée de chaque action, vous devez vous intéresser seulement à la valeur espérée d'un portefeuille et si vous vous intéressez seulement à la valeur espérée d'un portefeuille, vous maximiserez sa valeur espérée en plaçant tout votre argent dans une seule action ! Et ceci semble évidemment faux. J'avais déjà regardé les publications de Wiesenberger sur les *« mutual funds »*[2] et je m'étais rendu compte que les fonds de placement détenaient des portefeuilles-actions diversifiés afin justement de minimiser le risque. C'est à ce moment-là que l'idée que l'on doit prendre simultanément en compte la rentabilité et le risque, ainsi que l'idée de l'existence d'une frontière efficiente me vinrent à l'esprit.

La même année 1952, A.D. Roy a publié un article intitulé *« Safety First and the Holding of Assets »*, dans lequel il recommandait lui aussi d'investir en fonction de la rentabilité et du risque. Et il présentait également un graphique avec la rentabilité espérée en ordonnées et le risque en abscisses (cf. le Transparent II). Je viens tout juste de rencontrer A.D. Roy. A la fin du mois dernier, et mon séjour à la London Business School étant sur le point de se terminer, j'ai pensé que je ne pouvais pas quitter Londres sans le rencontrer. Nous avons comparé ce que nous avons fait durant ces quarante années et je lui ai dit que si j'ai reçu le Prix Nobel, c'est lui que le monde entier a suivi puisque c'est son diagramme qui est aujourd'hui universellement utilisé.

Dans son article, A.D. Roy préconisait de détenir un portefeuille spécifique parmi tous les portefeuilles composant la frontière efficiente, celui qui maximise la rentabilité espérée moins ce que l'on peut considérer comme le rapport entre le niveau de rentabilité espérée et l'écart-type des rentabilités. En fait, si on regarde les deux articles, on peut se demander pourquoi l'un a reçu le Prix Nobel et pas l'autre ! Je suppose que certains individus ont plus de chance que d'autres !

1. NDT : H.M. faisait partie du département d'Economie.

2. NDT : « Sicav et FCP américains ». Les Etats-Unis ne connaissent pas notre distinction *juridique* entre les sicav et les FCP à vocation générale. Techniquement les « open mutual funds » sont des FCP à vocation générale.

Le cœur de l'analyse de portefeuille consiste en un programme d'optimisation de la moyenne-variance. Ce programme nécessite toute une série de données : les estimations des rentabilités espérées des différentes actions mais aussi les variances et covariances de leurs rentabilités. Ce programme peut également prendre en compte les contraintes : par exemple, on peut interdire que la détention d'une action dépasse 1 ou 2 %, ou bien que le portefeuille suivant soit différent du précédent de plus de 10 ou de 20 %...

Le programme d'optimisation détermine, compte-tenu des contraintes à suivre, la rentabilité maximale que l'on peut obtenir à chaque niveau de risque et le risque maximal que l'on doit courir pour différents niveaux de rentabilité espérée. En d'autres termes, le programme détermine la frontière efficiente et, sur cette frontière, vous choisissez votre portefeuille.

Un certain nombre de problèmes ont du être résolus afin de rendre opérationnelle cette idée de base. Il a fallu trouver le moyen de calculer la frontière pour un grand nombre de titres, d'estimer les données nécessaires et comment prendre en compte les contraintes.

Le problème le plus facile à résoudre a été celui du calcul de la frontière parce qu'il s'agissait d'un problème purement mathématique. Il s'est avéré qu'il n'y avait qu'une seule façon de calculer la frontière si on veut estimer chacun de ses points. (Par contre, il existe des procédures plus rapides si on recherche seulement quelques points sur cette frontière.) Dans l'espace des portefeuilles à plusieurs dimensions, la série des portefeuilles efficients est linéaire et il existe une procédure de calculs qui détermine très simplement et très naturellement chaque portefeuille par une procédure itérative. J'ai publié l'algorithme de calcul en 1956 ; il figure aussi dans l'annexe de mon livre de 1959 et je l'ai expliqué en détail dans mon livre de 1987. Si votre société a beaucoup d'argent et veut se doter d'un programme d'optimisation moyenne-variance, le meilleur est probablement celui d'André Perold. Son article de 1984 décrit comment on peut prendre en considération un très grand nombre de titres. Son programme contient l'algorithme fondamental de la « ligne-critique » *(critical line)* plus quelques caractéristiques particulières qui permettent à l'algorithme de la ligne-critique de travailler plus rapidement quand certaines conditions sont réunies (comme, par exemple, l'utilisation du modèle à facteur unique).

Actuellement, je suis à mi-temps Directeur de Recherche d'un petit groupe appelé « Global Portfolio Research Department », au sein de DAÏWA Securities et nous avons développé notre propre système de calculs.

En fait, ce qui est intervenu durant les 30 à 40 dernières années, est l'accroissement vertigineux de la vitesse des ordinateurs. Quand je rédigeais mon livre de 1959, j'ai pensé que je devais présenter un exemple avec 10 titres et un autre avec 25 titres. Pour ce faire, je n'avais à ma disposition à la Fondation Coase qu'une sorte de tabulatrice à cartes perforées. Et quand, après beaucoup d'efforts, j'ai eu mon exemple avec 10 titres, j'ai décidé que le livre n'avait pas réellement besoin d'un deuxième exemple avec 25 titres ! Maintenant avec l'IBM R 6 000 de Daïwa, 1 000 titres demandent seulement quelques minutes !

TRANSPARENT IV

M – V portfolio optimizer

MARKOWITZ H. (1956), "The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints", *Naval Research Logistics Quarterly*.

MARKOWITZ H. (1987), *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons. Appendix A.

MARKOWITZ H. (1987), *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Basil Blackwell.

Presents the critical line algorithm for finding portfolios for every efficient EV combination when choice is constrained by any system of linear equalities or weak inequalities.

PEROLD A.F. (1984), "Large-Scale Portfolio Optimization", *Management Science*, October.

Critical line + upperbounds + sparse matrix techniques + other.

How to « sparsify » the covariance matrix if a factor or scenario model is assumed.

Handles 100s of securities if matrix dense ; thousands if matrix sparse.

Du côté des données, le premier problème à être étudié intensivement a été celui des covariances en raison de leur grand nombre. Pour suivre 100 actions, il faut déjà estimer 100 rentabilités espérées et 100 écarts-type, mais il faut estimer environ 5 000 covariances[1], ce qui n'est tout simplement pas faisable ! C'est pourquoi je suggérais dans mon livre de 1952 que l'on avait besoin d'un « modèle de covariance » et je suggérais, pour commencer, d'essayer un « modèle à un facteur ». C'est-à-dire de faire l'hypothèse que la rentabilité d'un titre est égal à une constante « alpha » plus une constante « bêta » que multiplie la rentabilité du facteur sous-jacent de base (facteur qui est généralement le marché) plus un terme indépendant. L'hypothèse était que la rentabilité espérée de toute action dépende de manière linéaire de la rentabilité du marché et la pente de cette relation de dépendance était appelée le bêta de cette action ; et, évidemment comme cette relation n'est pas parfaite, il existe des écarts aléatoires.

1. NDT. Le nombre de covariances de N titres est $\left(\frac{N^2-N}{2}\right)$ covariances. Soit pour 100 titres, exactement 4 950 covariances différentes.
La non faisabilité dont parle H.M. se réfère à l'idée d'estimer la valeur *future* (et non pas historique) de ces 4 950 covariances individuelles.

TRANSPARENT V

Models of Covariance

Problem : Too many covariances : $n(n-1)/2$ is a lot. Also, not enough degrees of freedom.

MARKOWITZ (1959), *Portfolio Selection : Diversification of Investments.* Wiley (Yale University Press 1970), 96-100.

The one beta model

$$r_i = \alpha_i + \beta_i F + u_i$$

$$\text{cov}(u_i, F) = 0, \quad \text{cov}(u_i, u_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

SHARPE W.F. (1963), "A Simplified Model for Portfolio Analysis", *Management Science*, January.

KING B.F. (1966), "Market and Industry Factors in Stock Price Behavior",*Journal of Business*, January supplement.

COHEN K.J. and POGUE J.A. (1967), "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models", *Journal of Business,* April.

BLUME M. (1971), "On the Assessment of Risk", *Journal of Finance*, March, 1-10.

MERRILL Lynch, and Oliphant sell βs.

The one β model has a problem :

ROSENBERG B. (1974), "Extra-Market Components of Covariance in Security Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, March.

Vers 1960 – je ne me rappelle pas la date exacte – alors que j'étais à la Rand Corporation[1], je reçois la visite d'un jeune homme, William Sharpe, qui travaillait lui aussi à la Rand, mais qui voulait effectuer une thèse à l'University of California at Los Angeles (UCLA). Le Professeur Fred Weston lui avait suggéré de venir me voir pour trouver un sujet de thèse. Nous avons donc discuté de la théorie du portefeuille, du problème posé par le trop grand nombre de covariances et du modèle à un facteur. C'est ce dernier problème qu'il a décidé d'approfondir et pour lequel il a obtenu son doctorat – mais non le Prix Nobel[2]. Il publie ses résultats en 1963 :

1. NDT. La Rand Corporation, sise à Los Angeles, est une société *privée* de recherches, qui est la plus importante au niveau mondial.

2. NDT. En effet, si W. Sharpe a été mondialement connu à cause de ce que l'on a appelé « la révolution bêta », il a reçu le Prix Nobel, en même temps que H. Markowitz et M. Miller, pour son article de 1964 qui a créé le MEDAF (cf. J. Berthon et G. Gallais-Hamonno, *La Finance à l'Honneur*, R. Banque, Déc. 1990).

« A Simplified Model for Portfolio Analysis ». Et jusqu'au milieu des années 70, le modèle à un facteur a été LE modèle, à la fois pour les recherches universitaires et pour les applications pratiques.

Faute de temps, je ne développe pas certaines recherches qui ont été faites sur le « modèle BÊTA » mais je mentionnerais seulement que, par exemple, Merrill Lynch et une autre société de courtage, OLIPHANT, se sont mis à vendre les estimations des bêtas des actions aux investisseurs institutionnels.

Mais au milieu des années 1970, les vendeurs de bêtas se sont trouvés en face d'un phénomène très désagréable. Par exemple Merrill Lynch expliquait aux acheteurs potentiels de ses bêtas qu'une de leurs utilisations était de détenir des actions

à bêta élevé si ils anticipaient une hausse du marché et, dans le cas contraire, qu'il fallait acquérir des actions à faible bêta. Le drame est qu'en 1974-1975, le marché, mesuré par l'indice Standard et Poor 500, a monté alors que les actions à fort bêta ont baissé d'un montant qui ne pouvait pas être expliqué par le hasard. Il devenait donc évident que des modèles de covariances plus complexes étaient nécessaires pour la gestion de portefeuilles.

C'est à peu près au même moment que le Professeur Barr Rosenberg de l'Université Berkeley publie *« A Many Factors Model »* et juste après crée une société dénommée BARRA pour Barr Rosenberg et Associates. BARRA a eu beaucoup d'influence sur la diffusion des techniques de la théorie moderne du portefeuille à Wall Street, et tout spécialement auprès des gérants des fonds de retraite. Deux raisons expliquent l'influence de BARRA. D'une part en fournissant ces modèles de covariance et d'autre part en organisant des programmes de formation qui ont formé à ces nouvelles techniques de nombreux gérants de portefeuilles.

Toujours dans les années 1970, une autre utilisation de la théorie du portefeuille est apparue, utilisation à laquelle je n'avais jamais pensé : la mesure des performances des fonds. A l'époque, la mesure traditionnelle était celle de Wiesenberger qui s'effectuait de la manière suivante. Supposons que vous aviez confié 1 000 $ à un fonds 10 ans plus tôt, si le fonds avait transformé cette somme en 6 000 $, il était évidemment deux fois meilleur qu'un fonds qui n'aurait obtenu que 3 000 $! Mais une telle mesure ne prenait nullement en compte la *variabilité* à laquelle les deux gérants avaient exposé leurs clients et qui pouvait être différente. C'est pourquoi Michael Jensen propose alors de mesurer la performance à la fois en termes de rentabilité moyenne et en termes de la variabilité des rentabilités obtenues sur une période donnée. Sur un graphique chaque gérant de portefeuille apparaît sous la forme d'un point ayant pour coordonnées sa rentabilité moyenne et l'écart-type de ses rentabilités. Sur le même graphique apparaît ce que vous auriez pu obtenir ou bien sans courir aucun risque en mettant votre argent à la Caisse d'Epargne ou bien sans savoir gérer en investissant dans l'indice Standard et Poor, c'est-à-dire en achetant « le marché ». Dans le premier cas vous auriez reçu le taux d'intérêt sans risque et dans le second la rentabilité moyenne au prix du « risque moyen » du marché. Ou bien encore vous auriez pu mettre une partie de votre argent à la Caisse d'Epargne et une partie sur le marché et choisir ainsi n'importe quel point sur la droite joignant ces deux possibilités. Ou bien encore vous pouviez emprunter à ce taux sans rique et investir votre argent plus votre emprunt sur le marché des actions et aller n'importe où sur cette droite, graphiquement à la droite du Standard et Poor. Jensen donne à cette droite le nom de « Droite de Marché » *(Market Line)*.

Jensen, en comparant les résultats effectifs obtenus par les gérants avec les résultats potentiels que l'on aurait pu obtenir en détenant un portefeuille situé sur la droite de marché, est arrivé à une conclusion surprenante : non seulement les gérants de portefeuille ne battaient pas le marché *en moyenne* mais en plus quasiment aucun fond individuel n'arrivait à faire mieux que le marché !

TRANSPARENT VII

Performance measurement (aM – V view of...)

JENSEN M.C. (1968), "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-64", *Journal of Finance*, May.

"The evidence on mutual fund performance discussed above indicates not only that these 115 mutual funds were on *average* not able to predict security prices well enough to out perform a buy-the-market-and-hold policy, but also that there is very little evidence that any *individual* fund was able to do significantly better..."

Related work by SHARPE, TREYNOR, FAMA, DIETZ.

RUSSELL FRANK COMPANY changes its product line from selling mutual funds to measuring portfolio performance.

WELLS FARGO BANK : if you can't beat the market, join it. Buy our index fund.

Généralement quand deux ou plusieurs universitaires étudient le même problème à partir de données différentes, ils arrivent à des réponses différentes ! Mais, ici, les différentes recherches ont toutes abouti à la même constatation : les gérants de fonds ne battent pas le marché !

Cette découverte a eu de nombreuses conséquences. Par exemple, elle a conduit la société Frank Russell à abandonner la gestion de portefeuilles pour se spécialiser dans la mesure des performances, domaine où elle a eu un très grand succès – vous connaissez peut-être les publications Russel 1000 et Russell 2000. De même, à la Wells Fargo Bank, quelqu'un déclara : « si on ne peut pas battre la marché, pourquoi ne pas l'acheter ? ». Et c'est ainsi que la Wells Fargo a créé le premier fonds indiciel. Aujourd'hui les fonds indiciels gèrent 250 milliards de dollars !

Une autre utilisation de l'analyse moyenne-variance à laquelle je n'avais pas songé est le Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers. C'est un modèle qui a valu à Sharpe de recevoir le Prix Nobel et, très certainement Lintner l'aurait partagé si il avait vécu et si il avait eu le temps de développer son propre modèle. Le MEDAF est fondé sur l'hypothèse que les investisseurs recherchent un portefeuille efficient selon le critère moyenne-variance et qu'ils ont tous les mêmes anticipations. Le MEDAF pose la question : comment se comporterait le marché si ces hypothèses étaient vraies ? Chacun des deux modèles (celui de Sharpe et celui de Lintner) adopte quelques hypothèses simplificatrices concernant les contraintes pesant sur les investisseurs et, à partir des deux prémisses ci-dessus, aboutissent à la conclusion que le « portefeuille de marché » *(market portfolio)* est efficient en termes de moyenne-variance et que la rentabilité espérée de tout actif ne dépend que de son bêta. Donc, si le MEDAF est vrai, pour connaître la rentabilité espérée d'une action, il suffit de calculer son bêta ; et si vous voulez un portefeuille efficient, vous n'avez même pas besoin de calculer des bêtas, il suffit d'acheter le portefeuille de marché.

Ceci a eu des implications pratiques. L'une est la justification des portefeuilles indiciels : puisque le portefeuille de marché est efficient, un portefeuille indiciel l'est aussi ! Une autre implication concerne la méthode par laquelle tous les chercheurs en finance effectuent des mesures « ajustées pour le risque » *(risk-adjustment)*. Qu'entendons-nous par ceci ? Supposons que nous cherchons à savoir si les actions d'une catégorie A sont « meilleures » que celles d'une catégorie B, la catégorie étant, par exemple, le taux de dividende annuel ou bien la taille, etc... Il y a quarante ans, on se serait borné à regarder si les actions de la catégorie A avaient eu, en moyenne, une rentabilité supérieure à celles de la catégorie B. Mais cette rentabilité supérieure est peut-être tout simplement due à un niveau de risque plus grand et les titulaires de ces actions doivent être compensés pour cette augmentation de risque ! La question est donc de savoir comment on peut mesurer ce risque qui est à la base de votre rémunération sur le marché des actions. La réponse du MEDAF est que seul le bêta, c'est-à-dire le risque systématique, compte car tous les autres risques peuvent être éliminés par le biais de la diversification. Et c'est pourquoi, depuis l'invention du MEDAF, tout le monde ajuste les résultats obtenus par le degré de risque couru, en mesurant le bêta et en déduisant un facteur d'ajustement pour le risque.

TRANSPARENT VIII

Capital Asset Pricing Models
(Tobin), Sharpe, Lintner, Mossin, Black, etc.

Assumes :

All investors seek MV efficiency.
Have same beliefs.
Have same constraint, e.g.,

(a) $\Sigma X_i = 1 +$ borrowing

$X_i \geq 0$

borrowing ≥ -1 (no upper limit)
Sharpe-Lintner

or

(b) $\Sigma X_i = 1$ the only constraint

(no nonnegativity requirement)
Roy, Sharpe, Merton, Black

Concludes :

The market is an efficient portfolio.

$\mu_i = r_0 + k\beta_i$

$\mu_i = E(r_i)$

$\beta_i =$ regression of r_i against market portfolio

$r_0 =$ risk-free ratio of return (Sharpe-Lintner) or expectation on zero beta portfolio (Black)

A cause du temps qui passe, je me borne à mentionner qu'il existe maintenant sur le MEDAF une littérature extrêmement abondante, comprenant d'ailleurs quelques points de vue critiques et des désaccords, y compris le mien dans mon livre de 1987 dans lequel je redéveloppe la MEDAF avec des contraintes différentes.

TRANSPARENT IX

Applications :

Part of justification of performance measurement criteria.

Part of justification for Index Funds.

Risk adjustment

Did stocks in Class A outperform those in Class B on a risk adjustment basis ?

References :

ROY A.D. (1952), "Safety First and the Holding of Assets", *Econometrica*, 431-49.

TOBIN J. (1958), "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economic Studies*, February, 65-86.

SHARPE W.F. (1964), "Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *The Journal of Finance*, September.

LINTNER J. (1965), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risk Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, February.

MOSSIN J. (1966), "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, October.

SHARPE W.F. (1970), *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, New York.

MERTON R.C. (1972), "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, September, 1851-72.

BLACK F. (1972), "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", *Journal of Business*, July.

Alternative model :

ROSS S.A. (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*.

Markowitz reservations :

CHAPTERS 11 and 12 of Markowitz 1987.

Certainement l'application la plus importante du MEDAF est représentée par le modèle de détermination du prix d'une option de Fisher Black et Myron Scholes. A l'origine, Black et Scholes sont arrivés à leur fameuse formule à partir d'un MEDAF particulier, en fait le MEDAF de Black auquel ils ont ajouté quelques hypothèses, la négociation en continu des titres et le fait que les cours des actions suivent une certaine loi de distribution. En fait, il n'était pas nécessaire d'adopter le cadre moyenne-variance pour dériver la formule ! Mais, au départ, il s'agissait bien d'une application du MEDAF. Avec ces hypothèses, Black et Scholes se sont demandés comment le prix d'une option d'achat *(call)* ou d'une option de vente *(put)* pouvait être lié au cours de l'action sous-jacente. Et ils ont réussi à dériver une formule analytique. En fait, à l'instar de la quasi-totalité des utilisateurs de cette formule, vous n'avez pas besoin de la regarder sur le Transparent X !

TRANSPARENT X

Black-Scholes Option Pricing Model

Assumptions :

Originally : Black's CAPM + continuous time + geometric Brownian motion.

Turns out unnecessary to *assume* investors seek MV efficiency.

Question :

How should the price of a call or put be related to the price of its underlying stock, etc.

Answer :

Black-Sholes option pricing formula :

$$w(x,t) = xN(d_1) - ce^{r(t-t*)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln x/c + \left(r + \frac{1}{2}v^2\right)(t*-t)}{v\sqrt{t*-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln x/c + \left(r - \frac{1}{2}v^2\right)(t*-t)}{v\sqrt{t*-t}}$$

Used to evaluate fair value of option.

« Rocket scientists » widely employed to solve stochastic differential equations and PDEs for other derivative securities and other assumptions.

Quand le Chicago Board of Options Exchange (CBOE) s'est ouvert[1], les courtiers *(traders)* recevaient des kilos de listing indiquant pour chaque contrat d'options négocié quelle était la valeur théorique de l'option calculée à partir de la formule de Black et Scholes. Aujourd'hui, ces listings ont disparu puisque des évaluations d'après Black et Scholes apparaissent directement sur les écrans. Il faut ajouter que cette formule de Black et Scholes ainsi que toutes les formules qui en sont dérivées et qui sont inventées par les « Rocket scientists » ne sont pas seulement utilisées pour évaluer les calls et les puts effectivement négociés sur un marché organisé mais aussi pour évaluer les options qui sont implicites (ou cachées) dont les nouveaux actifs dérivés *(derivative securities)* qui sont très nombreux et qui, vraisemblablement, existent aujourd'hui parce que nous sommes maintenant en mesure de leur donner un prix.

TRANSPARENT XI

References

MERTON R. (1969), "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty : The Continuous Time Case", *Review of Economics and Statistics*, 247-257.

MERTON R. (1971), "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model", *Journal of Economic Theory*, 373-413.

BLACK F. and SCHOLES M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, May-June.

HARRISON J.M. and KREPS D. (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 381-408.

HARRISON J.M. and PLISKA S. (1981), "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Application*, 363-84.

COX J.C., INGERSOLL J.E. and ROSS S.A. (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 385-407.

1. NDT : en 1973.

Si nous revenons à l'analyse moyenne-variance, nous retrouvons les trois problèmes de mesure des imputs évoqués précédemment : les rentabilités attendues, la volatilité des rentabilités individuelles et la corrélation (ou les covariances) entre les titres. La problématique générale est rappelée dans le Transparent XII (qui est le Transparent III déjà vu plus haut).

De nombreuses recherches ont été effectuées pour déterminer quelle est la « meilleure » mesure à utiliser en pratique.

Le Transparent XIII résume les pistes explorées dans le domaine de la mesure des rentabilités espérées. De manière assez inattendue, Haakanson et Grauer ont montré que la projection dans le futur des rentabilités moyennes passées donnait des résultats bien supérieurs à ceux que l'on pouvait *a priori* attendre.

Le Transparent XIV reflète les différentes techniques possibles pour estimer la matrice des variances-covariances. Là aussi, les travaux de Brignoli et de Haugen tendent à prouver que l'utilisation des covariances historiques donne des résultats acceptables.

Finalement le seul moyen pour un gérant de portefeuille de choisir une procédure est d'effectuer des tests rétroactifs *(back testing)*. C'est-à-dire que vous regardez les résultats que vous auriez obtenus dans le passé en utilisant telle ou telle procédure. Evidemment, il ne faut utiliser que les données qui étaient disponibles au moment de chaque décision, et il faut aussi tenir compte des frais de transaction engendrés par la rotation du portefeuille.

Et une fois qu'une procédure semble avoir fait ses preuves dans le passé, il n'y a plus qu'à avoir le courage de l'utiliser pour la gestion de vrais portefeuilles ! A titre d'exemple, le Transparent XVI montre l'évolution comparée de l'indice Nikkei et de la moyenne des portefeuilles japonais que je gère pour Daïwa Securities depuis 1972.

TRANSPARENT XV

Historical simulation/Back testing

Use only data available at time of decisions;
e.g. no selection bias.
Need for database to keep track of outputs as well as inputs.

TRANSPARENT XVI

Historical Performance

CONCLUSION

Finalement, ce que j'ai proposé en 1952 peut se résumer en deux propositions.

Première proposition : **ce qui compte, ce n'est pas le titre individuel mais le portefeuille.** Vous n'investissez pas votre argent dans une seule action mais au contraire dans un groupe d'actions, c'est-à-dire dans un portefeuille. Quand vous gérez un milliard de dollars vous ne téléphonez pas à votre agent de change pour lui demander quel est « le tuyau » du jour !

Seconde proposition : le vrai problème est de **trouver la bonne méthode pour construire votre portefeuille,** c'est-à-dire le portefeuille efficient correspondant à la rentabilité maximale que vous pouvez obtenir compte-tenu du degré de risque que vous acceptez de courir.