JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

JEAN BASS

Déterminisme, hasard et théorème central limite

Journal de la société statistique de Paris, tome 128 (1987), p. 195-202

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1987__128__195_0>

I

ARTICLES

DÉTERMINISME, HASARD ET THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Jean BASS,
Professeur honoraire à l'Université de Paris VI

Le théorème central limite, qui est considéré comme un théorème de probabilité, se rencontre dans diverses théories non probabilistes, qui par contraste sont dites déterministes. Plusieurs auteurs, en particulier M. Allais, ont signalé cette circonstance. On la place dans son cadre naturel, faisant intervenir deux notions fondamentales : l'indépendance arithmétique et les suites équiréparties.

The central limit theorem, which is considered as a theorem of probability, can be found in non probabilistic theories, which are therefore considered as deterministic. This situation was pointed out by several authors, especially by M. Allais. We place it in its natural frame involving two fundamental notions : arithmetical independance and uniformly distributed sequences.

Le théorème central limite est certainement le plus célèbre des théorèmes de la théories des probabilités. Pour le situer par rapport à ce qui fait l'objet de cet article, je rappelle rapidement en quoi il consiste, en me plaçant pour simplifier dans le cas le plus élémentaire.

On donne une suite $X_1, \ldots, X_\ell, \ldots$ de variables aléatoires ayant même loi de probabilité. On suppose, ce qui n'est pas une véritable restriction, que $E\,X_k = 0$. On appelle σ l'écart-type commun des X_k. On fait l'hypothèse que ces variables sont *indépendantes* dans leur ensemble. Alors, lorsque $\ell \to \infty$, la fonction de répartition de

$$Z_\ell = \frac{X_1 + \ldots X_\ell}{\sigma\sqrt{\ell}}$$

tend simplement vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds$$

Pour le démontrer, on utilise comme intermédiaire *la fonction caractéristique* $\psi(t)$ des X_k. La fonction caractéristique de Z_ℓ est $\left[\psi\left(\frac{s}{\sigma\sqrt{\ell}}\right)\right]^\ell$. Elle tend vers $e^{-\frac{s^2}{2}}$. On passe aux fonctions de répartition en utilisant le théorème de P. Lévy.

Cette démonstration a-t-elle un caractère spécifiquement probabiliste? Elle utilise explicitement la notion d'indépendance stochastique. Or il est bien connu que, du point de vue théorique, l'originalité de la théorie des probabilités consiste à introduire et à manier cette notion d'indépendance, qui n'est guère utilisée en théorie de la mesure. Mais on verra dans la suite de cet article que la notion d'indépendance se retrouve sous des formes non probabilistes. Si donc le théorème central limite apparaît comme étant de nature probabiliste, c'est pour d'autres raisons. Cela provient surtout de ce que les variables aléatoires ont une interprétation expérimentale. Elles représentent des grandeurs physiques qui décrivent certains phénomènes naturels, considérés comme « non déterministes ». On dit souvent que les phénomènes en question sont soumis aux effets du *hasard.* Ces phénomènes sont très variés. Nous concevons fort bien *l'indéterminisme* de certains d'entre eux. Dans d'autres, il choque notre raison et notre ancienne accoutumance à la causalité rigoureuse. Or on s'est aperçu depuis quelques années que l'indéterminisme apparent n'était pas toujours incompatible avec des représentations par des méthodes non probabilistes, dites *déterministes.* Il n'est donc pas très étonnant qu'on puisse rencontrer un théorème central limite dans des théories dont l'axiomatique est différente de celle des probabilités.

Divers exemples de théorème central limite non probabiliste ont été donnés. La mesure qui est utilisée n'est donc pas la mesure de probabilité. C'est ce qu'on appelle le plus souvent une *mesure asymptotique.* Voici sa définition :

Soit $f(t)$ une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$. Soit $\mu_T(x)$ la mesure (de Lebesgue) de l'ensemble des t tels que :

$$|t| < T, f(t) < x$$

La mesure asymptotique de f est égale à $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{2T} \mu_T(x)$. Sa transformée de Fourier a les propriétés d'une fonction caractéristique. Elle est égale à

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{\iota s f(t)}\, \mathrm{d}t = M\, \mathrm{e}^{\iota s f(t)}$$

où M désigne l'opérateur de moyenne temporelle $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T}$

Voici d'abord un exemple donné par M. Kac [4]. Soient
$\theta_1, \ldots, \theta_\ell, \ldots$ des nombres réels tels que, quel que soit ℓ, les ℓ nombres $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ soient arithmétiquement indépendants. Cela signifie que, si $a_1, \ldots, a_\ell$ sont des entiers, la relation $a_1 \theta_1 + \ldots + a_\ell \theta_\ell = 0$ est impossible, sauf si tous les a_k sont nuls.

M. Kac considère la fonction

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\ell}} (\cos \theta_1 t + \ldots + \cos \theta_\ell t)$$

où $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ sont des irrationnels indépendants. Sa mesure asymptotique a pour fonction caractéristique

$$\varphi_\ell(s) = M\, \mathrm{e}^{\frac{\iota s \sqrt{2}}{\sqrt{\ell}} (\cos \theta_1 t + \quad + \cos \theta_\ell t)}$$

L'exponentielle est le produit des ℓ exponentielles

$$\mathrm{e}^{\frac{\iota s \sqrt{2}}{\sqrt{\ell}} \cos \theta_k t} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q \left(\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\ell}} \right) \mathrm{e}^{\iota q \left(\frac{\pi}{2} - \theta_k t \right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \ell).$$

On démontre facilement qu'on peut multiplier ces séries et prendre la moyenne terme par terme.

Toutes les moyennes sont nulles, car, à cause de l'indépendance $q_1\theta_1 + q_2\theta_2 + ... + q_\ell\theta_\ell$ ne peut être nul. Il n'y a exception que pour les termes pour lesquels $q = 0$. On trouve ainsi

$$\varphi_\ell(s) = \left[J_0\left(\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\ell}}\right)\right]^\ell$$

Comme $J_0(z) = 1 - (\frac{z}{2})^2 + ...$, on démontre bien que

$$\lim_{\ell \to \infty} \varphi_\ell(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$$

Cet exemple a été repris par J. Bass (3). Dans la démonstration de M. Kac, le théorème de P. Lévy, permettant de passer des fonctions caractéristiques aux mesures, n'est pas explicitement utilisé; il est démontré par des calculs adaptés au cas particulier.

D'autres exemples de « théorème central limite déterministe » ont été donnés. On peut citer ceux de J. Bass (3), de Pham Phu Hien (5), de M. Allais (1). Ils sont relatifs à des processus à temps discret. Cela revient à dire que la fonction $f(t)$ sur laquelle on calcule des moyennes est une fonction en escalier, constante sur chaque intervalle $]n, n+1[$. L'opérateur de moyenne est alors défini par

$$M = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N}$$

Je vais d'abord rappeler l'exemple de M. Allais, et ensuite je le placerai dans un cadre plus général.

Soit $\theta_k = \frac{1}{T_k}$ une suite de nombres irrationnels telle que $\theta_1, ..., \theta_\ell$ soient indépendants quel que soit ℓ. On pose

$$X_\ell(n) = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \cos \frac{2\pi}{T_k}(n - n_k)$$

où les n_k sont des nombres réels quelconques. Pour chaque ℓ, $X_\ell(n)$ est un polynôme trigonométrique défini sur les entiers.

A $X_\ell(n)$ on associe un « écart-type » σ_ℓ défini par

$$\sigma_\ell^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} X_\ell^2(n)$$

σ_ℓ^2 est la moyenne temporelle de la fonction $X_\ell^2(n)$.

Avec une hypothèse convenable sur les a_k, la mesure asymptotique de $\frac{1}{\sigma_\ell}X_\ell(n)$ tend, lorsque $\ell \to \infty$, vers la mesure gaussienne. Cette hypothèse est la transcription de la condition bien connue de Liapounoff.

La démonstration de M. Allais (1) n'utilise pas l'intermédiaire des fonctions caractéristiques, et elle est un peu plus compliquée qu'il n'est nécessaire. Mais surtout, elle admet comme intuitivement évidentes les propriétés de la suite $\left\{\frac{n}{T_k}\right\}$, où $\frac{1}{T_k}$ est un nombre irrationnel fixé, et plus généralement de la suite vectorielle

1. Dans cette démonstration, il ne faut pas confondre les fréquences $\frac{\ell}{T_k}$ avec les fréquences statistiques, qui sont les constituants de la mesure asymptotique.

$$\left\{\frac{n}{T_1}, \frac{n}{T_2}, \dots, \frac{n}{T_\ell}\right\}$$

Or ces propriétés ne sont pas évidentes. Mais leur justification a été donnée par H. Weyl en 1916 (6). Les théorèmes de H Weyl sont relatifs aux *suites équiréparties* sur [0, 1]. On dit qu'une suite de nombres $x_1, \dots, x_k, \dots$ compris entre 0 et 1 est équirépartie si les conditions suivantes sont vérifiées : Soit $[a, b]$ un intervalle arbitraire intérieur à [0, 1]. Parmi les nombres $x_1, \dots x_N$, on en trouve N' dans $[a, b]$. Si, lorsque $N \to \infty$, la fraction $\frac{N'}{N}$ tend vers une limite égale à $b - a$, la suite x_n est équirépartie.

Le premier théorème de H. Weyl s'énonce de la façon suivante :

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur [0, 1]. Si la suite x_N est équirépartie,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N}[f(x_1) + \dots + f(x_N)] = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Réciproquement, si cette égalité a lieu quel que soit f, intégrable au sens de Riemann, alors la suite est équirépartie. Le premier membre est la moyenne arithmétique de $f(x_k)$, ou moyenne temporelle. Le second membre peut être interprété comme l'espérance mathématique de la variable aléatoire $f(X)$, où X est une variable aléatoire uniformément distribuée sur [0, 1].

On définit d'une façon analogue une suite de points équirépartie dans le cube fondamental C_ℓ de $\mathbf{R}^\ell$. La condition pour que la suite $\{x_n^1, \dots, x_n^\ell\}$ soit équirépartie s'écrit

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N}[f(x_1^1, \dots, x_1^\ell) + \dots + f(x_N^1, \dots, x_N^\ell)] = \int_{C_\ell} f(x^1, \dots, x^\ell)\,dx^1 \dots dx^\ell$$

Si en particulier la fonction f est un produit de ℓ fonction d'une variable, on a les égalités

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N}[f_1(x_1^1) \dots f_\ell(x_1^\ell) + \dots + f_1(x_N^1) \dots f_\ell(x_N^\ell)] = \int_{C_\ell} f_1(x^1) \dots f_\ell(x^\ell)\,dx^1 \dots d\,x^\ell$$

Mais l'intégrale multiple est le produit de ℓ intégrales simples, à chacune desquelles s'applique le théorème de Weyl à une dimension. Il en résulte que, si l'on désigne par M l'opérateur de moyenne temporelle, on a

$$M[f_1(x_n^1) \dots f_\ell(x_n^\ell)] = M f_1(x_n^1) \times \dots \times M f_\ell(x_n^\ell)$$

La moyenne du produit est égale au produit des moyennes.

On exprime ce résultat en disant que, si une suite vectorielle est équirépartie (dans le cube), ses termes constituent des *suites équiréparties indépendantes.*

On connaît de nombreux exemples de suites équiréparties. Le plus simple est celui de la suite $n\,\theta$, modulo 1, où θ est un nombre irrationnel. Si $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ sont des nombres irrationnels indépendants, la suite

$$\{n\theta_1, \dots, n\theta_\ell\}$$

est équirépartie modulo 1 dans le cube, et par conséquent les suites $n\theta_1, \dots, n\theta_\ell$ sont indépendantes. Il existe donc des interactions naturelles entre l'indépendance des fonctions, celle des suites, et celle des nombres. Rappelons enfin qu'il existe effectivement des suites de nombres indépendants. C'est le cas de la suite $\theta, \theta^2, \dots, \theta^\ell, \dots$, où θ est un nombre transcendant. La condition d'indépendance exprime en effet que θ n'est pas racine d'une équation algébrique à coefficients entiers. Un autre exemple de suite de nombres indépendants est celui de la suite des logarithmes des nombres premiers. Cela exprime qu'un nombre entier n'est décomposable que d'une façon en un produit de facteurs premiers.

Nous pouvons maintenant énoncer une forme générale du théorème central limite, qui contiendra comme cas particulier l'exemple de M. Allais. On donne une suite de fonctions réelles f_1, ..., f_k, ..., intégrables sur [0, 1] et telles que

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx = 0$$

(On pourra toujours se ramener à cette condition de moyenne nulle). On pose [1]

$$\int_0^1 [f_k(x)]^2\,dx = \frac{1}{2} a_k^2$$

On choisit une suite infinie de suites équiréparties

$$\{x_n^1\},\ \{x_n^2\},\ \ldots,\ \{x_n^\ell\},\ \ldots$$

telle que, quel que soit ℓ, la suite vectorielle $\{x_n^1, \ldots, x_n^\ell\}$ soit équirépartie dans le cube C_ℓ. On pose

$$F_\ell(n) = f_1(x_n^1) + \ldots + f_\ell(x_n^\ell)$$

$F_\ell(n)$ est une fonction de l'entier n, dont on va étudier le comportement quand $\ell \to \infty$.

Pour chaque ℓ fixé, $F_\ell(n)$ a une moyenne nulle :

$$M f_\ell(n) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} F_\ell(n) = 0$$

Calculons la moyenne quadratique σ_ℓ^2 de $F_\ell(n)$.

$$\sigma_\ell^2 = \sum_{k=1}^{\ell} M[f_k\ (x_n^k)]^2 + 2 \sum_{j,k=1}^{\ell} M[f_j(x_n^j) f_k(x_n^k)]$$

Mais, à cause de l'indépendance,

$$M[f_j(x_n^j) f_k(x_n^k)] = M f_j(x_n^j) \times M f_k(x_n^k) = 0$$

Donc

$$\sigma_\ell^2 = \sum_{k=1}^{\ell} M[f_k(x_n^k)]^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \int_0^1 [f_k(x)]^2\,dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\ell} a_k^2$$

Soit $\varphi_k(s)$ la fonction caractéristique de $f_k(x_k)$. On a

$$\varphi_k(s) = M\, e^{isf_k(x_n^k)} = \int_0^1 e^{isf_k(x)}\,dx$$

La fonction caractéristique de $F_\ell(n)$ a pour expression

$$\psi_\ell(s) = M\, e^{isF_\ell(n)} = M\, e^{is[f_1(x_n^1) + \ \ + f_\ell(x_n^\ell)]}$$

A cause de l'indépendance, la factorisation de l'exponentielle entraîne la factorisation de la moyenne.

On a donc

$$\psi_\ell(s) = \varphi_1(s)\ \varphi_2(s)\ \ldots\ \varphi_\ell(s).$$

1. Le facteur $\frac{1}{2}$ a comme seul rôle de concilier les notations du cas général avec celle du cas considéré par M. Allais.

A partir de ce moment, la démonstration devient identique à celle du théorème central limite probabiliste. Moyennant une condition de Liapounoff, $\psi\left(\frac{s}{\sigma\ell}\right)$ *tend, pour chaque s fixé,* vers $e^{-\frac{s^2}{2}}$ lorsque $\ell \to \infty$. La condition de Liapounoff fait intervenir les moments absolus d'ordre 3, définis par

$$\rho_k^3 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} | f_k (x_n^k) |^3 = \int_0^1 | f_k (x) |^3 dx$$

Les moments du second et du troisième ordre se déduisent d'ailleurs de la fonction caractéristique comme dans le cas probabiliste.

Si en particulier

$$\int_0^1 [f_k (x)]^2 dx = 1$$

quel que soit k, et si les fonctions f_k sont toutes identiques à une même fonction f, il y a une seule fonction caractéristique φ, et la fonction caractéristique de

$$\frac{1}{\sqrt{\ell}} [f (x_n^1) + \dots + f (x_n^\ell)]$$

tend vers $-\frac{s^2}{2}$. lorsque $\ell \to \infty$.

Voici deux exemples de fonctions f_k possibles et de suites équiréparties.

Exemple 1 :

$$f_k (x) = a_k \cos 2\pi x, \qquad x_n^k = \frac{n - n_k}{T_k}$$

(la translation n_k ne modifie rien aux propriétés de la suite. Il faudrait préciser que x_n est pris modulo 1, mais la partie entière de x_n^k est absorbée par la fonction $\cos 2\pi x$).

On a ici

$$\int_0^1 [f_k (x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_k^2 , \quad \sigma_\ell^2 = \frac{1}{2} (a_1^2 + \dots + a_\ell^2)$$

$$\varphi_k (x) = M e^{isa_k \cos 2\pi \frac{n-n_k}{T_k}} = \int_0^1 e^{isa_k \cos 2\pi x} dx = J_0 (s\, a_k)$$

Comme

$$J_0 (s\, a_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{e^{isa_k x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

la mesure asymptotique correspondante a pour densité

$$\frac{1}{\pi \sqrt{a_k^2-x^2}} \quad \text{si} \quad -a_k < x < a_k, 0$$

en dehors de l'intervalle $]-a_k, a_k[$.

L'exemple de M. Allais se place donc bien dans le cadre général. Il concerne jusqu'à un certain point des propriétés asymptotiques des fonctions presque périodiques (polynômes trigonométriques). Mais la chose importante, c'est l'intervention d'une famille de suites équiréparties indépendantes, de la forme particulière $\frac{n}{T_k}$, ou plutôt $\frac{n - n_k}{T_k}$. Le rôle essentiel des fonctions cosinus est de provoquer la formation de ces suites.

Exemple 2 : $f_k(x) = x - \frac{1}{2}$ quel que soit k.

On a bien

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx = 0$$

On a ensuite

$$\int_0^1 [f_k(x)]^2\,dx = \frac{1}{12}, \qquad \int_0^1 |f_k(x)|^3\,dx = \frac{1}{32}, \qquad \sigma_\ell = \frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{12}},$$

$$\varphi(s) = \int_0^1 e^{is(x-\frac{1}{2})}\,dx = \frac{2}{s}\sin\frac{s}{2} = 1 - \frac{s^2}{24} + \dots$$

La mesure asymptotique correspondante a pour densité

$$1 \text{ si } |x| < \frac{1}{2}, \qquad 0 \text{ si } |x| > \frac{1}{2}$$

La fonction $\psi\left(\frac{s}{\sigma_\ell}\right)$ est égale ici à

$$\left[\varphi\left(\frac{s}{\sigma_\ell}\right)\right]^\ell = \left[\varphi\left(\frac{s\sqrt{12}}{\sqrt{\ell}}\right)\right]^\ell = \left(1 - \frac{s^2}{2\ell} + \dots\right)^\ell$$

Il est visible qu'elle tend vers $e^{-\frac{s^2}{2}}$ quand $\ell \to \infty$ (la justification est élémentaire). La mesure asymptotique de $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\ell}}\left[x_n^1 + \dots + x_n^\ell - \frac{\ell}{2}\right]$ tend donc vers la mesure gaussienne, et cela pour n'importe quel choix des suites équiréparties *indépendantes* $x_n^1, \dots, x_n^\ell, \dots$

A noter que, dans les applications, ces suites sont généralement définies modulo 1 à partir de suites croissantes.

Pour conclure, je reviendrai sur des remarques que j'ai déjà faite au début. La théorie des probabilités, comme la géométrie euclidienne, est une théorie mathématique. Mais elle a été construite pour représenter certains phénomènes naturels, son langage est inspiré de la nature de ces phénomènes, et on a tendance à confondre la théorie et ce qu'elle tente de décrire. Si l'on invoque le hasard à propos de la théorie des probabilités, cela signifie que cette théorie décrit des circonstances physiques d'une nature particulière, auxquelles on a associé ce mot, et dont le détail ne peut être prévu exactement. C'est en ce sens qu'elles sont indéterministes. Certains phénomènes naturels dont l'irrégularité évoque l'intervention du hasard (c'est-à-dire l'absence de déterminisme pur), peuvent être représentés par des techniques mathématiques qui n'emploient pas explicitement l'outillage probabiliste. Ces techniques utilisent, d'une façon visible ou cachée, des propriétés d'indépendance arithmétique (exemple de M. Kac). Mais l'arithmétique n'est souvent qu'un intermédiaire vers une indépendance plus élaborée, celle des suites équiréparties, elle-même génératrice d'indépendance pour des fonctions. Dans tout cela, les nombres irrationnels jouent un rôle fondamental. Ils conditionnent la construction de suites équiréparties, dont l'irrégularité, si déterministe qu'elle soit, constitue une *simulation du hasard*. Il s'agit d'ailleurs là de simples constatations, qui ne cherchent pas à expliquer la nature du hasard. On remarquera d'ailleurs que certains phénomènes naturels se prêtent aussi bien à une représentation probabiliste qu'à une représentation strictement déterministe simulant le hasard.

RÉFÉRENCES

[1] M. ALLAIS — Fréquence, probabilité et hasard (J. de la Société de statistique de Paris, 1983).

— Frequency, probability and chance (Foundations of Utility and Risk Theory with applications, D. Reidel Publ. Comp. 1983).

[2] J. BASS — Stationary functions and their applications to the theory of turbulence, I (J. of math. analysis and applications, 47, 1974).

[3] J. BASS — Fonctions de corrélation, fonctions pseudo-aléatoires et applications (Masson, 1984).

[4] M. KAC — Statistical independance in probability, analysis and number theory (John Wiley, 1959).

[5] PHAM PHU HIEN — Mesures asymptotiques définies par une fonction à valeurs dans R^n ou dans un espace vectoriel topologique (Annales de l'Institut H.-Poincaré, XI, 1975).

[6] H. WEYL — Über die Gleichverteilung von Zahlen Modulo Eins (Math. Annalen, 77, 1916).