JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

OLEG ARKHIPOFF

Pour une théorie générale de l'agrégation

Journal de la société statistique de Paris, tome 126, n° 4 (1985), p. 145-167

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1985__126_4_145_0>

POUR UNE THÉORIE GÉNÉRALE DE L'AGRÉGATION

(Première partie)

Oleg ARKHIPOFF

Administrateur de l'Institut national de la statistique et des études économiques

La théorie de l'agrégation est celle de la représentation collective, c'est-à-dire celle du passage de l'individuel au collectif. Elle intéresse, entre autres, le politologue, l'économiste, le décideur, etc., sans oublier le statisticien.

On trouvera ici la première partie d'une étude générale de l'agrégation. On s'y attache à formaliser le schéma des « élections particulières », déjà imaginé par Condorcet en 1785. Cette formalisation permet de dresser une typologie raisonnée des procédures d'agrégation — ou, pour utiliser un vocabulaire électoraliste plus familier, des modes de scrutin. On y définit des notions centrales, comme celles de dictatoralité, de cohérence des issues de scrutin — qui permet d'éviter des paradoxes dont le type le plus célèbre est celui de Condorcet — ou de représentabilité des modes de scrutin par des familles de modes de scrutin partiels.

Les résultats présentés ici seront repris dans la seconde partie de cette étude (à paraître prochainement) permettant l'analyse détaillée des conditions requises pour obtenir des issues de scrutin cohérentes, sur un plan très général. Un chapitre sera entièrement consacré à l'étude systématique d'une classe de modes de scrutin particulièrement importante pour la pratique, celle des modes de scrutin neutres majoritaires.

Mots-clés : *mode de scrutin, agrégation des préférences, paradoxe de Condorcet, analyse multicritère, rationalité collective, choix social, représentation collective, bien-être national.*

Towards a Theory of Aggregation *(Part One)*

The Theory of Aggregation is that of Collective Representation, i.e. that of the passage from individual to collective. Among many others, politicians, economists, decidors, etc., —and assuredly statisticians,— are primarily concerned with this theory.

Here, one will find the first part of a paper devoted to that general aggregation theory. First, it is aimed at formalizing the scheme of "Particular Elections" once devised by Condorcet in 1785. This formalization allows us to sketch a rational typology of aggregation rules—or, using more familiar electoral terms, of voting rules. Several basic notions are then defined, like dictatorship, voting consistency (which permits to avoid paradoxes like the well-known Condorcet's Voting Paradox), or the representability of a voting rule by a family of partial ones.

In the second part to be published next, the results here obtained will be used in a thorough examination of the conditions required for granted coherent collective decisions on a very general level. A chapter is devoted to a systematic investigation of a class of aggregation rules very important for practice, that of majority voting rules.

Key words: *voting rules, preference aggregation, Condorcet's Voting Paradox, Multiple Criteria Analysis, collective rationality, social choice, collective representation, national welfare.*

Nous entendons ici par « théorie de l'agrégation » l'étude du *passage de l'individuel au collectif*, question importante s'il en est. Par contraste, l'analyse des rapports qu'entretiennent la partie et le tout semblerait plutôt relever de la théorie des systèmes. Quant à la dualité du singulier et de l'universel, son

étude ressortirait à l'épistémologie, puisque c'est tout le débat entre Histoire et sciences de la nature, parfaitement balisé par un Heinrich Rickert cherchant à comprendre comment on pouvait parler en termes scientifiques, c'est-à-dire généraux, de faits singuliers, localisés et datés.

Beaucoup, sinon tous, se trouvent concernés à des titres divers par le difficile et très général problème de l'agrégation. Il y a bien entendu les politologues, quand ils parlent, par exemple, de l'« intérêt général ». Il y a aussi les comptables nationaux, quand ils cherchent la signification de leurs agrégats : qu'est-ce qui mesure le mieux la « qualité de la vie », le « bien-être national »? etc. Le planificateur est également concerné, qui doit choisir entre une pluralité de « variantes »; et, plus généralement, le décideur ou le théoricien, qui se trouvent confrontés à un ensemble de critères donnant des indications divergentes. L'économiste rencontre le problème de l'agrégation, dès qu'il s'interroge sur l'existence d'un optimum national, d'une utilité collective ou d'une fonction de choix social. Et il y a aussi le statisticien, dont précisément le lot quotidien est de donner une représentation globale d'une multitude de faits individuels.

Les exemples de manquent donc pas...

Il n'existe pas de théorie générale de l'agrégation. A la place, on dénombre, depuis longtemps, un certain nombre d'études théoriques ou non faisant intervenir explicitement le passage de l'individuel au collectif (en faisant abstraction de toutes celles où ce passage est escamoté, à supposer qu'il ait été seulement vu). Études dispersées, faites parfois dans l'ignorance les unes des autres, et portant apparemment sur autant de problèmes particuliers, sans relation les uns avec les autres, bien qu'il existe manifestement une logique, un formalisme commun, sous-jacents à toutes.

Il y a en premier lieu la théorie de la volonté générale de Jean-Jacques Rousseau (« Contrat social », 1762) : est posée l'existence d'une « volonté générale » qu'il s'agit de manifester par le moyen de consultations électorales avec, pour justification, un recours au principe de compensation statistique des erreurs.

Vient ensuite le Mémoire que présente Borda à l'Académie royale des sciences, le 16 juin 1770 [10]. Mémoire très technique, où Borda critique le traditionnel scrutin uninominal à un tour à la majorité relative et propose de lui substituer « l'élection par ordre de mérite » (p. 659). La question traitée est celle du choix collectif, énoncé en termes électoralistes, avec référence à la méthode « des élections particulières » (p. 662) (*).

En 1785 paraît l'Essai de Condorcet sur la « probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix ». Ouvrage capital et *original,* par l'ampleur du problème envisagé : *agréger des « opinions » particulières en une opinion générale,* — problème qui est typique de *la représentation collective.* Ouvrage capital, car Condorcet, raisonnant *en logicien,* reconnaît *la possibilité d'apparition d'incohérences logiques au niveau collectif,* lors de l'agrégation d'opinions *quelconques* au moyen du mode de scrutin à la majorité simple, dans le schéma des élections particulières déjà envisagé par Borda.

Mais aussi ouvrage malheureux, parce que l'entreprise excédait les possibilités mathématiques de l'époque; parce que ce qui fait la valeur de l'« Essai », la découverte des anomalies logiques *sur un plan général,* ruinait dans le même temps le but même du livre : justifier le principe majoritaire autrement que par la raison du plus fort, voire, peut-être, donner une assise scientifique solide à la théorie de la volonté générale; parce que, aussi incroyable que cela puisse paraître, Condorcet n'eut connaissance du Mémoire de Borda qu'*in extremis* (Condorcet devint académicien en 1769 et secrétaire perpétuel en 1773) [12], p. CLXXVII. D'où une contrariété certaine et, semble-t-il, un certain désarroi : de tout l'« Essai », la postérité n'a retenu que le Paradoxe qui immortalisa Condorcet, paradoxe anecdotique, peut-être circonstanciel, s'il ne tenait qu'à cette découverte tardive du travail de Borda. Malheureux, enfin et surtout, parce que ce fameux paradoxe paraît se perdre dans une question ponctuelle de choix

(*) La bibliographie est donnée à la fin de la seconde partie de cette Étude.

collectif dans les scrutins à la majorité simple (surtout après 1951), faisant ainsi oublier l'essentiel : le problème général qu'avait en vue Condorcet : *Condorcet ne se confond ni avec Borda, ni avec Arrow.*

Les travaux d'Arrow portent exclusivement sur la problématique du choix social, en économie principalement. Arrow se propose de trouver une fonction de choix social $C(S)$ portant sur un ensemble X d'« alternatives » $x, y, z, \ldots, S$ désignant un sous-ensemble quelconque de X. Arrow procède médiatement en cherchant d'abord à agréger n relations de préordre total sur X, désignées par R_i (ce qui donne naissance à un n-uple $\sigma = < R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n >$) en une relation de préordre total collective R toujours définie sur X. Et cela au moyen d'une fonction convenable **F**, dite Social Welfare Function. Le Théorème d'impossibilité d'Arrow (en fait, deux versions : une donnée en 1951 [8], avec une démonstration présentant des faiblesses, — et une autre donnée en 1963, beaucoup plus générale que celle de 1951 [9] pp. 92 sq.), ce théorème donc établit l'impossibilité de trouver sur un plan très général une telle fonction $\mathbf{F}$ ($R = \mathbf{F}(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n)$) : il devenait alors impossible de déduire $C(S)$ d'une fonction $\mathbf{F}$ inexistante.

Le point significatif, pour notre propos, est l'extrême *particularité* de la problématique arrowienne. C'est ce qui en fait évidemment à la fois la force — une très grande généralité du résultat — et la faiblesse, savoir un champ d'application étroit. La problématique étant toute centrée sur un choix social à base de préordre total, la terminologie, les concepts et les normes remarquablement choisis en conséquence sont de ce fait *malaisément généralisables.* Or, la problématique des représentations collectives est visiblement *plus vaste* que celle envisagé par Arrow, puisqu'elle comporte deux étapes *bien distinctes* (même si, dans la formulation particulière que donne Arrow, elles paraissent se confondre), une qui est celle d'une représentation collective, l'autre qui relève de l'analyse mathématique des choix (quelles sont les relations binaires qui engendrent des fonctions de choix $C(S)$ authentiques? — Cf. Sen [20], pp. 47-48), et qui est *un problème mathématique autonome.*

Nous ne nous intéresserons ici qu'au seul problème de l'agrégation sous la forme générale qu'il prend dans la problématique de la représentation collective. Il devient alors impératif de s'affranchir de l'obligation paralysante de recourir à un outillage méthodologique particulier — certes intéressant en lui-même — inadéquat pour les fins poursuivies ici.

Encore une remarque importante : notre analyse sera conduite en termes d'« électeurs », de « votes » et de « scrutin ». C'est-à-dire que la terminologie utilisée sera « électoraliste » (tout comme celle d'Arrow d'ailleurs), à tel point que nous avons eu un moment l'idée de sous-titrer cette étude par « éléments de mathématique électorale ». Ce n'est là qu'*une simple commodité de langage,* car notre terminologie s'efforce d'être aussi neutre que possible, comme on pourra le constater. Mais les connotations fâcheuses subsistent : pour les éviter il aurait fallu forger une terminologie spécifique qui, elle, aurait eu l'inconvénient de paraître barbare et d'être de ce fait difficilement assimilable. Nous mettons donc en garde le lecteur contre toutes ces connotations indésirables, qui pourraient faire croire que l'étude ne porte que sur le problème éminement politique de la « représentation nationale », ou bien encore sur le seul problème du choix social (puisqu'une élection au sens usuel du terme est destinée à choisir collectivement un candidat), — alors qu'il n'en est rien, puisque c'est la problématique formelle, générale, qui est ici le but.

Chapitre 1

UN ÉNONCÉ FORMEL DU PROBLÈME DE L'AGRÉGATION

1 — *Énoncé général*

Sur un plan formel très général, on peut énoncer comme suit le problème de l'agrégation : « étant donnés deux ensembles D et C, trouver une application $\mathbf{F}$ de D dans C vérifiant telle(s) propriété(s) posée(s) *a priori* » (cf. fig. 2, p. 155).

Un tel énoncé est évidemment *trop général* pour recouvrir une signification précise quelconque; et le diagramme de départ : $D \xrightarrow{\mathbf{F}} C$, — trop condensé pour permettre un énoncé cette fois-ci opérationnel. On est donc immanquablement conduit à développer le schéma initial, c'est-à-dire à analyser le problème, — et à interpréter. Le coût de tout cela est une perte évidente de généralité, du fait que des options doivent être prises : d'où irruption subreptice d'un certain arbitraire. On ne peut procéder autrement; mais il convient d'identifier l'arbitraire et de le reconnaître [6], tome 1, pp. 121 sq.

Tout d'abord, on considérera l'ensemble D comme celui de n-uples $\sigma = < \omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n >$ (D est alors nécessairement un sous-ensemble d'un produit cartésien, C^n par exemple, ce qui est déjà une option particulière).

Cela dit, pour fixer les idées, on interprétera ω_i comme le « vote » de l'« électeur » i, σ comme un « scrutin » et $\mathbf{F}$ comme un « mode de scrutin », laquelle détermine une « issue de scrutin » $\omega = \mathbf{F}(\sigma)$ ($\omega \in C$, d'où une seconde option particulière : les n ω_i et $\omega = \mathbf{F}(\sigma)$ sont tous des objets de même nature C).

Plus généralement, on pourrait interpréter les ω_i comme des objets quelconques d'une même nature C, ω comme un « agrégat » (et $\mathbf{F}$ est alors perçue comme une fonction d'agrégation) ou bien comme un objet « représentant collectif » des n objets individuels ω_i ($\mathbf{F}$ est alors plutôt perçue comme une fonction de représentation). Bien entendu, la social welfare function $\mathbf{F}$ d'Arrow est de cette nature (d'où notre notation), C étant alors l'ensemble des préordres totaux définis sur un ensemble auxiliaire X, avec $\omega_i = R_i$, $\omega = R$.

2 — *Représentation collective contre choix social*

Nous avons déjà souligné la distinction stratégique entre la problématique des représentations collectives quelconques et celle du choix social. Cette distinction apparaît déjà au niveau de l'interprétation du diagramme général D, C^n, C, $\mathbf{F}$, avec apparition de *deux* étapes qu'il est utile de bien distinguer. La première étape est celle où l'on détermine et considère l'objet $\omega = \mathbf{F}(\sigma)$ comme un agrégat, étudié pour lui-même, sans considération *a priori* des usages éventuels qu'on pourrait en faire. Cet ω est vu comme représentant collectif des objets individuels ω_i constitutifs de σ : c'est le problème général de la *représentation collective.*

La seconde étape se trouve marquée, éventuellement, quand l'agrégat ω est traité comme *un résultat intermédiaire* pour faire autre chose : par exemple, aider à choisir collectivement (et c'est la problématique du choix collectif). La particularité de cette étape est que la nature de ω est fortement *déter minée* par l'utilisation prévue pour cet agrégat.

Voyons cela sur des exemples. Un exemple typique de représentation collective est celui où ω est considéré comme un indicateur du bien-être national (de la qualité de la vie nationale, etc.), les ω_i étant alors vus comme des indicateurs individuels (cf. [1]).

Dans un autre ordre d'idée, toujours par exemple, interprétons cette fois ci les ω_i comme les indications fournies par une batterie de n critères i, au cours d'une épreuve multicritère σ. On peut encore résoudre un problème de représentation collective $\omega = \mathbf{F}(\sigma)$, mais maintenant ce n'est plus là qu'un résultat *intermédiaire* qui va servir à décider, à choisir quelque chose d'autre (c'est le problème des choix multicritères). Ici, nous continuons à bien marquer les deux étapes en question.

Mais, dans d'autres cas, les deux étapes paraissent se confondre. En effet, on aurait pu encore interpréter le ω_i comme le nom du candidat choisi par l'électeur i, ω comme le candidat élu à l'issue du scrutin σ et $\mathbf{F}$ comme une « élection », une fonction de choix collectif : $\mathbf{F}$ pourrait ainsi être le mode de scrutin uninominal à la majorité relative, c'est-à-dire la « méthode ordinaire » comme l'appellent Borda et Condorcet. Ici, les problématiques de la représentation et du choix sont identiques sur le plan formel. Mais, et le Mémoire de Borda en est la preuve, il est difficile d'étudier le choix collectif d'une façon aussi directe.

Il en est de même, comme on l'a vu, dans la problématique arrowienne, qui cependant possède cette particularité accidentelle que tout préordre total R peut être mis en correspondance biunivoque avec une fonction de choix social $C(S)$ (avec, comme on sait, intervention de la relation P de préordre strict et celle I d'indifférence — ou d'équivalence : d'où la tonalité très particulière de la formulation du problème par Arrow). Bien entendu, et on ne s'en est pas privé pour essayer de contourner le théorème d'Arrow, on songe aussitôt à d'autres relations, telle que l'acyclicité par exemple, pour déterminer une fonction de choix social qui reste convenable. Mais, toujours, le résultat $\omega = \mathbf{F}(\sigma)$ n'est jamais pris en considération pour lui-même, mais n'est étudié que pour faire autre chose (ici déterminer $C(S)$).

Une fois de plus, dans la problématique des représentations collectives qui est ici la nôtre, on étudie les objets $\omega = \mathbf{F}(\sigma)$ pour eux-mêmes, sans souci des utilisations qu'on pourrait en faire par la suite. D'où la tendance spontanée à envisager le cas de l'espèce C d'objets ω quelconques, avec, pour corollaire intéressant — soulignons le — *la nécessité de définir un schéma général d'agrégation indépendamment des objets qu'on agrège,* à l'inverse de ce qu'on observe dans la problématique arrowienne, par exemple.

3 — *Nécessité d'une étude analytique*

Nous étudions donc ici le problème général des représentations collectives en termes d'« électeurs » de « votes » et de « scrutins », la démarche utilisée étant directement inspirée de la méthode des « élections particulières », envisagée déjà par Borda et mise en œuvre systématiquement par Condorcet.

Cette méthode consiste à décomposer l'objet ω en un certain nombre d'objets élémentaires constitutifs : on dira ici que l'objet ω est *composite* et est constitué d'objets *simples* (dits ici *questions simples* q_k). C'est bien ainsi que Condorcet est conduit à envisager des « opinions » composites, obtenues par combinaison d'opinions élémentaires ou simples. C'est la distinction, dans le Calcul des propositions logiques, entre une proposition quelconque et les variables propositionnelles qui la composent.

Dans cette méthode, plus précisément, les électeurs ne votent pas globalement sur la question composite (Q) soumise aux voix (l'électeur ne porte pas sur son bulletin la réponse composite « ω_i »), mais votent sur l'ensemble des questions élémentaires q_k composant (Q), chaque question simple faisant l'objet d'une réponse simple (ainsi l'électeur i portera sur son bulletin un m-uple de réponses simples $w_i = < v_1^i, \ldots, v_k^i, \ldots, v_m^i >$), et, point fondamental, l'issue du scrutin $\omega = \mathbf{F}(\sigma)$ donnera lieu, elle aussi, à la détermination d'un m-uple de résultats simples : $w = < v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_m >$.

Tout cela vient spontanément à l'esprit de tout chercheur et reste bien banal. Mais cela implique aussi plusieurs conséquences moins évidentes, peut-être.

Tout d'abord, la décision d'étudier analytiquement le difficile problème de l'agrégation (c'est la décision de Borda et c'est une première) ne va évidemment pas sans prêter le flanc à quelque arbitraire et à quelque critique (en *pratique*, dans une décomposition en un très grand nombre de questions élémentaires, peut-on imaginer une procédure de vote *effective* où chaque électeur répondrait séparément à toutes les questions?); et l'analyse n'est pas une opération simple sur le plan mathématique (le Arrow de 1951 en sait quelque chose).

Ensuite et surtout, c'est précisément l'énonciation analytique du problème qui engendre le phénomène des modes de scrutin incohérents, comme s'en est aperçu aussitôt Condorcet. On n'échappe pas à la conclusion : *l'incohérence dans l'agrégation tient au mode de représentation du réel collectif par la méthode des élections particulières.*

Chapitre 2

LE SCHÉMA DES ÉLECTIONS PARTICULIÈRES

1 — *Les idées directrices*

On reprendra dans ce chapitre, en les développant, des idées déjà exposées in [6], [7].

L'optique adoptée est, d'une part, celle de la représentation collective et, d'autre part, celle des élections particulières envisagée par Condorcet, comme on l'a déjà noté. Certes, Borda a, lui aussi, fait mention des « élections particulières », mais cette particularité n'est aucunement une pièce maîtresse du Mémoire de 1770, alors que c'en est une dans l'ouvrage de Condorcet.

Soit un ensemble N de n électeurs $i, j, \ldots$ ($n = |N|$ est supposé fini, sauf mention expresse du contraire). On met aux voix une certaine question composite (Q) (un « avis » chez Condorcet). Par exemple (Q) signifiera « comment classer un ensemble X de candidats $x, y, z, \ldots$? ». Va s'ensuivre un scrutin effectif s, au cours duquel, chaque électeur émettra un vote (composite) w_i, c'est-à-dire une certaine réponse composite à la question posée (Q).

Tout cela se déroule selon des modalités préétablies, c'est-à-dire selon un mode de scrutin composite r donné, lequel permettra de déterminer l'issue $w = r(s)$ du scrutin s, laquelle issue w est en quelque sorte la réponse collective à la question posée (Q). Et c'est bien ainsi qu'on voit généralement la chose.

Dans la méthode des élections particulières, imaginée donc par Condorcet, la question composite (Q) va être analysée, décomposée en un certain nombre m de questions simples q_k. Par exemple, q_k sera la question « préférez-vous le candidat x au candidat y? ». Bref, (Q) est d'abord vu comme un ensemble M de m questions simples, ou, mieux, comme un m-uple (une suite ordonnée)

$$(Q) = < q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_m >,$$

en supposant pour simplifier, et sauf mention expresse du contraire, que $m = |M|$ est fini (en règle générale, d'ailleurs, nous éviterons les cas particuliers tératologiques, tels que : un seul électeur, une infinité d'électeurs, etc.).

Il est entendu, dans tout ce qui suit, que le processus étudié ne sert qu'une seule fois : c'est-à-dire que, si la question (Q) est posée une seconde fois, rien n'empêche de changer alors le mode de scrutin r initial. On pourrait évidemment compliquer le schéma à l'infini en imaginant des questions composites constituées de questions composites d'un niveau inférieur, avec des modes de scrutin composites d'ordre supérieur. L'analyse n'apporterait vraisemblement rien de nouveau, si ce n'est que *le schéma théorique serait de plus en plus éloigné de la pratique,* point qu'il convient de garder en mémoire.

Telles sont les grandes lignes de la méthode des élections particulières. Nous allons maintenant préciser tout cela à l'aide d'un formalisme *ad hoc*, et d'un schéma, *le schéma des élections particulières* ou *M-schéma* (ou encore *schéma de Condorcet*).

2 — *Le schéma général des élections particulières*

Il s'agit de préciser comment s'articulent question composite (Q) et questions simples $q_k \in M$, *réponses composites* w à la question (Q) et *réponses simples* v à chacune des questions simples considérée séparément. La solution à notre problème, savoir le schéma général des élections particulières ou M-schéma, ou schéma de Condorcet, donne lieu à la figure 1. Commençons par introduire les ensembles :

N ensemble des électeurs $i, j, \ldots$ ($|N| = n$);
M ensemble des questions simples q_k ($|M| = m$);
R ensemble de toutes les réponses simples v possibles;
Q ensemble de toutes les réponses composites w logiquement possibles à partir des réponses simples v possibles aux différentes questions $q_k \in M$;
T ensemble de tous les scrutins composites s logiquement possibles.

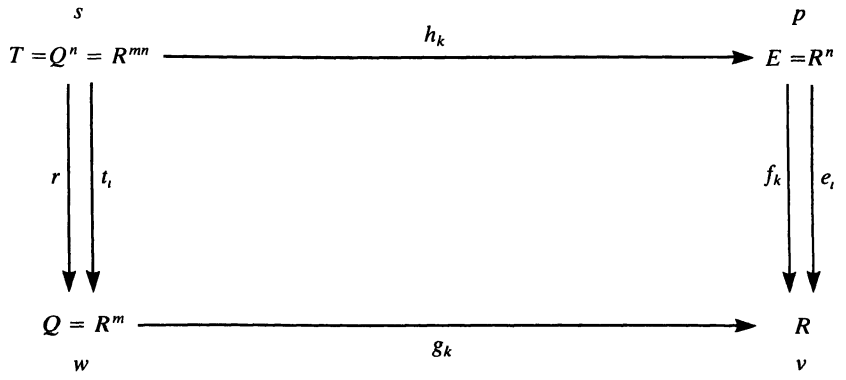


Fig. 1. — Schéma général des élections particulières (ou M schéma)

Rappelons que, pour simplifier, nous supposerons n et m finis. Bien entendu, rien n'empêche m d'être très grand, voire infini; mais il est alors évident que le schéma des élections particulières apparaît de plus en plus *pur schéma conceptuel* que m devient grand.

Une réponse composite w à la question composite (Q) est interprétée dans le M-schéma comme un m-uple de réponses simples $w = < v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_m >$, v_k étant la réponse simple à la question simple $q_k \in M$.

Dorénavant, par abus de notations nous écrirons le plus souvent $k \in M$ pour $q_k \in M$, ce qui revient à identifier l'ensemble M des questions à celui, M', des indices, M et M' étant bien entendu en correspondance biunivoque.

L'ensemble R de toutes les réponses simples v possibles est *a priori* quelconque. Beaucoup de résultats relatifs au M-schéma sont d'ailleurs indépendants de la taille $| R |$ de R (du cardinal de R), ce qui prouve la souplesse et la généralité du schéma qui va être présenté. Mais le cas le plus intéressant est celui de la bivalence, où R ne comporte que deux éléments : 0 interprété comme *non* (ou encore : faux), — et 1 interprété comme *oui* (ou encore : vrai), — $R = \{0, 1\}$.

Condorcet se place naturellement dans un contexte bivalent, sa démarche étant d'inspiration logique (des propositions). La problématique arrowienne est susceptible de deux lectures, une *bivalente* quand on envisage des questions simples du type « x est préféré ou indifférent à y », et une *trivalente* si la question simple est « comparer x à y » avec trois réponses possibles : x strictement préféré à y, y strictement préféré à x, x et y indifférents (c'est dans un tel contexte trivalent que se situe May [16]).

R peut encore être un ensemble de m entiers naturels, voire l'ensemble des réels. Avec une question du type « note attribuée à x », on peut ainsi ramener la méthode des rangs de Borda à un M-schéma, et, plus généralement, il en est de même pour toute méthode d'agrégation par moyenne [6], tome 2, pp. 31 sq., etc.

Dès que R a été interprété, donc déterminé, il convient de préciser ce qu'on entend exactement par « tous les w (tous les s) logiquement possibles ». Pour cela, il est nécessaire d'introduire les produits cartésiens suivants.

$Q = R^m$ produit cartésien de R m fois par lui-même, avec les m projections $g_k : Q \to R$ constitutives de la définition de Q, $k \in M$;

$T = Q^n$ produit cartésien de Q n fois par lui-même, avec n projections $t_i : T \to Q$, $i \in N$.

Cela posé, tout élément $v \in R$ sera dit *réponse simple*. Tout élément $w \in Q$ sera dit *réponse composite* à la question composite

$$(Q) = < q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_m >$$

C'est un m-uple $w = < v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_m >$, où $v_k = g_k(w)$ doit être entendu comme réponse simple à la question simple q_k dans la réponse composite w à la question composite (Q).

Tout élément $s \in T$ sera dit *scrutin composite*. C'est un n-uple

$$s = < w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n >,$$

où $w_i = t_i(s)$ doit être interprété comme la réponse (ou vote) composite de l'électeur i à la question (Q) lors du scrutin composite s.

Du fait de la propriété classique d'associativité du produit cartésien, on peut écrire :

$$T = Q^n = (R^m)^n = (R^n)^m = R^{mn}. \tag{1}$$

En clair, cette égalité signifie que T peut également être considéré comme le produit cartésien d'un certain ensemble E m fois par lui-même avec les m projections canoniques $h_k : T \to E$, où E est lui-même produit cartésien de R n fois par lui même, avec les n projections canoniques $e_i : E \to R$. L'égalité (1) peut alors se retranscrire en

$$e_i h_k = g_k t_i, \tag{1'}$$

quels que soient $i \in N$, $k \in M$.

Un élément quelconque $p \in E$ sera dit *scrutin simple*. C'est un n-uple

$$p = < v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n >,$$

où, cette fois-ci, $v_i = e_i(p)$ est la réponse (ou vote) simple de l'électeur i au cours du scrutin simple p à une question simple q, non désignée explicitement. Tout cela resterait vague, si d'une part, on ne tenait pas compte de ce que tout scrutin composite s est un m-uple de scrutins simples p_k

$$s = < p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_m >,$$

avec $p_k = h_k(s)$ représentant le scrutin simple correspondant à la question simple q_k, résultant (ou constitutif) du scrutin composite s, — et si, d'autre part, du fait de l'égalité (1'), on ne remarquait que, quel que soit $s \in T$,

$$e_i h_k(s) = e_i(p_k) = g_k t_i(s) = g_k(w_i) = v_k^i.$$

L'ensemble E des scrutins simples apparaît à première vue comme un simple intermédiaire de calcul. Il est néanmoins bien plus que cela : dans la pratique, le plus souvent les scrutins sont organisés de façon « simple » en ce sens que les modalités sont fixées pour une question simple, *sans qu'en soit précisé le contenu sémantique*. Par exemple, dans ce qu'on appelle le scrutin à la majorité simple (supposons un nombre impair d'électeurs pour éviter des difficultés inutiles à ce stade de la présentation du M-schéma), le décompte des *oui* suffit, quelle que soit la question soumise aux voix.

Ou encore, dans une perspective différente, mais tout aussi suggestive, un scrutin simple est un scrutin composite ($T = E = R^n$), quand la question composite (Q) se réduit à une seule question simple ($m = 1$), — mais il est ici entendu implicitement qu'on pose et repose diverses questions simples, sans changer de mode de scrutin (cf. p. 150).

Nous compléterons notre description avec les définitions suivantes :

• un *mode de scrutin composite r* est toute application de T dans Q, — $r : T \to Q$. Et nous dénoterons par $\mathscr{C}$ l'ensemble de tous les modes de scrutin composites possibles (avec d'autres notations classiques, $\mathscr{C} = Q^T = \mathrm{Hom}(T, Q)$).

• un *mode de scrutin simple f* est toute famille de m applications f_k de E dans R

$$f = (f_k)k \in M, \text{ avec } f_k : E \to R, k \in M.$$

Et nous désignerons par $\mathscr{S}$ l'ensemble de tous les modes de scrutin simples possibles :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Hom}(E, R)^m.$$

• un *mode de scrutin neutre* est un mode de scrutin simple $f = (f_k)\ k \in M$, dont toutes les composantes sont identiques, c'est-à-dire que

$$f_k = f_{k'}, \text{ quels que soient } k, k' \in M.$$

Nous désignerons par $\mathscr{N}$ la famille de tous les modes de scrutin neutres. On a, il va sans dire : $\mathscr{N} \subset \mathscr{S}$. Nous dirons encore qu'un mode scrutin simple f vérifie la *condition de neutralité PN*, si f est *neutre* c'est-à-dire

PN $f = (f_k)\ k \in M$ est simple et est tel que $f_{k'} = f_k$, quels que soient $k, k' \in M$.

Commentons, c'est-à-dire interprétons les modes de scrutin tels que r et $f = (f_k)\ k \in M$. Tout d'abord, l'application r associe à tout scrutin $s \in T$ une réponse composite $w = r(s)$, qui peut être interprétée comme l'issue du scrutin s, c'est-à-dire la réponse collective à la question (Q) soumise au voix, réponse w toujours définie et déterminée univoquement selon des modalités fixées *a priori*, c'est-à-dire, précisément, selon le mode de scrutin composite r.

Soit maintenant un mode de scrutin simple $f = (f_k)k \in M$. Soit toujours le même scrutin effectif s de tout à l'heure. Ce scrutin s détermine une famille de m scrutin simples $p_k = h_k(s)$, laquelle famille détermine à son tour un certain m-uple de réponses simples $< f_1 h_1(s), \ldots, f_k h_k(s), \ldots, f_m h_m\ (s) >$, c'est-à-dire, de par la définition du produit cartésien, ici $Q = R^m$, un et un seul w, lequel peut être interprété comme l'issue du scrutin s déterminée selon les modalités du mode de scrutin simple $f = (f_k)k \in M$.

Cela nous laisse pressentir qu'il existe des liens certains entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{S}$. Lesquels?

3 — *Typologie des modes de scrutin*

On se propose maintenant d'examiner les rapports pouvant exister entre la classe très générale, $\mathscr{C}$, des modes de scrutin composites r et celle, $\mathscr{S}$, des modes de scrutin simples $f = (f_k)k \in M$.

Considérons à nouveau la figure 1 représentant le schéma général de Condorcet, et introduisons la propriété suivante, *PS,* dite *condition de simplicité,* pour un mode de scrutin composite $r \in \mathscr{C}$.

PS le mode de scrutin $r \in \mathscr{C}$ est tel que, quels que soient $k \in M$ et $s, s' \in T$,

$$h_k(s) = h_k(s') \textit{ implique } g_k r(s) = g_k r(s').$$

Et donnons encore cette définition : des modes de scrutin composite $r \in \mathscr{C}$ et simple $f = (f_k)k \in M$, $f \in \mathscr{S}$, sont dits *associés,* si quel que soit $k \in M$,

$$f_k h_k = g_k\, r; \tag{2}$$

cette relation entre r et f est visiblement symétrique; quand elle est vérifiée, elle signifie que r et f donnent « les mêmes résultats », c'est-à-dire que, quels que soit la question $q_k \in M$ et le scrutin composite $s \in T$, $f_k h_k(s) = g_k r(s)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre premier théorème central :

Théorème 1 : Un mode de scrutin composite r est associé à un mode de scrutin simple $f = (f_k)\ k \in M$ (quel que soit $k \in M$, $f_k h_k = g_k r$) *si et seulement si* r vérifie la condition de simplicité *PS*. Et s'il en est ainsi, la correspondance ainsi établie entre r et f est biunivoque.

** Résultat classique (cf. [11] E II.20, proposition 9). Il se généralise dans toute catégorie possédant des coimages : f_k existe et est unique dès qu'existe coim $(g_k r)$ (cf. [6], tome 1, p. 137). La biunivocité entre r et $f = (f_k)k \in M$ découle directement de l'unicité de chacune des composantes de f et de ce que $Q = R^m$.**

La correspondance (2) associant certains $r \in \mathscr{C}$ à des modes de scrutin simples est biunivoque, ce qui signifie exactement que la classe $\mathscr{S}_0$ des modes de scrutin composites $r \in \mathscr{C}$ vérifiant *PS*

$$\mathscr{S}_0 = \{ r;\ r \in \mathscr{C} \text{ et } r \text{ vérifie } PS(r) \}$$

est égale à une bijection près à la classe $\mathscr{S}$ des modes de scrutin simples $f = (f_k)k \in M$ (N.B. : ici les « classes » $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{N}$, ... sont des ensembles), c'est-à-dire qu'on peut identifier et $\mathscr{S}_0$ et écrire, par abus de notations, $r = f$, dès que r et f sont associés.

Cette convention terminologique nous permet de dresser la typologie centrale suivante : $\mathscr{N} \subset \mathscr{S} = \mathscr{S}_0 \subset \mathscr{C}$, en précisant qu'il existe des modes de scrutin composites r qui ne sont pas simples, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être associés avec ou représentés au moyen d'un mode de scrutin simple f ($\mathscr{S}_0 \neq \mathscr{C}$).

4 — *Modes de scrutin cohérents*

Jusqu'à présent, il n'a été question que de modes de scrutin composites ou simples. La théorie de l'agrégation sous son aspect représentation collective ne commence qu'à partir du moment où l'issue w d'un scrutin $s = < w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n >$ « représente » ou « agrège » l'ensemble des w_i, $i \in N$. Bien entendu, on peut utiliser cette sorte de terminologie à tout propos, voire hors de propos (tout comme on peut toujours dire qu'on a « choisi collectivement » w à partir du scrutin s)), mais la chose s'entend bien mieux quand on affirme en outre que les w et w_i sont d'une même espèce, espèce qui soit autre chose que l'appartenance trivial à un ensemble très large Q. En d'autres termes, la théorie de l'agrégation commence quand, par exemple, on impose aux réponses composites w de faire partir d'un certain sous-ensemble propre $u(C)$ de Q.

> Une question s'élève immédiatement : même si les réponses individuelles sont de l'espèce requise $u(C)$, le mode de scrutin (composite ou simple) retenu donne-t-il toujours une issue correcte, c'est-à-dire a-t-on toujours, pour des scrutins admissibles quant aux w_i, $r(s) \in u(C)$?

On peut encore dire les mêmes choses, mais autrement, et dire qu'il existe des réponses composites (individuelles et/ou collectives) cohérentes et d'autres qui ne le sont pas, c'est-à-dire, une fois encore, distinguer un certain sous-ensemble propre $u(C)$ de Q, définissant une certaine cohérence ou rationalité.

> C'est maintenant parler comme Condorcet et s'attendre à trouver des paradoxes « à la Condorcet ». Écrivant bien avant Cantor, Condorcet a été gêné pour dire ces choses, qu'il a pourtant clairement perçues : pour Condorcet, l'ensemble Q est « un système de propositions » [12], p. XLV, et le problème est d'examiner le « cas où parmi les combinaisons de propositions simples, il s'en trouve qui renferment une contradiction » [12], p. XLIX, c'est-à-dire des réponses w non cohérentes selon une rationalité $u(C) \subset Q$ donnée *a priori*.

Nous sommes donc conduits tout naturellement à compléter vers la gauche notre M-schéma initial, et à considérer la figure 2.

Nous dirons que nous avons introduit une *u-rationalité* ou une *C-rationalité*) dans un M-schéma, si nous nous donnons un certain sous-ensemble (propre) $u(C)$ de Q. Les réponses composites w (individuelles ou collectives) seront dites *u-rationnelles* ou *u-cohérentes* si elles font partie de ce sous-ensemble $u(C)$.

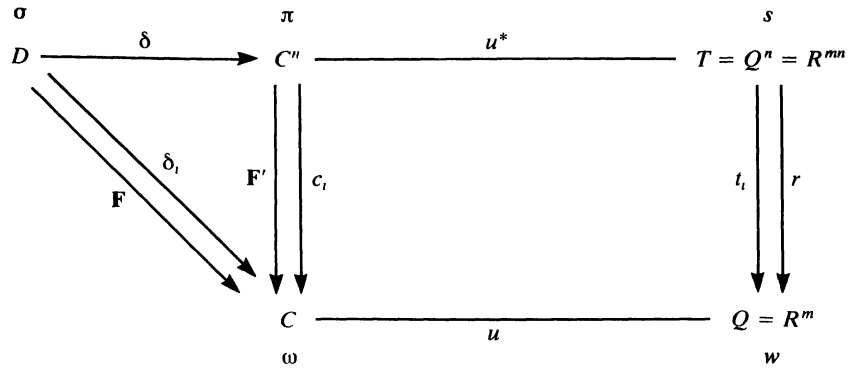


Fig. 2. — Introduction d'une u cohérence dans le schéma des élections particulières

Selon un procédé classique et particulièrement commode, nous définirons ledit sous-ensemble $u(C) \subset Q$ en nous donnant un quelconque ensemble C en correspondance biunivoque avec $u(C)$ par le truchement d'une injection donnée $u : C \to Q$. Le sous-ensemble $u(C)$ n'est donc pas autre chose que l'image de C par l'injection u. Nous désignerons par ω un élément courant de C.

Il est utile de remarquer que dire que w est u-cohérent, c'est dire par définition que $w \in u(C)$, et c'est dire de façon rigoureusement équivalente que, quel que soit $w \in u(C)$, il existe un $\omega \in C$ tel que $w = u(\omega)$.

Considérons le produit cartésien C^n de C n fois par lui-même, avec ses n projections canoniques $c_i : C^n \to C$. Un élément $\pi \in C^n$ s'interprète immédiatement comme un n-uple

$$\pi = < \omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n > ,$$

où $\omega_i = c_i(\pi)$ est le vote u-cohérent de l'électeur i lors du scrutin u-cohérent π.

Pour ce qui concerne les scrutins u-cohérents π, de tels scrutins sont dits encore « logiquement possibles » compte tenu de la rationalité u. On peut aller plus loin, comme l'a fait Arrow en 1951 à propos des Single Peaked Preferences de Duncan Black, et distinguer parmi tous les scrutins π « logiquement possibles », ceux qui sont « admissibles » et ceux qui ne le sont pas. Ce qui revient à définir un certain sous-ensemble D de scrutin admissibles σ, avec une certaine injection $\delta : D \to C^n$ (ou, de façon équivalente, une famille de n applications δ_i de D dans C qui soit monomorphique (la définition d'une famille monomorphique est rappelée p. 165), $\delta_i(\sigma) - \omega_i$ étant bien entendu la réponse composite cohérente de l'électeur i ($u(\omega_i) \in u(C)$) dans le scrutin admissible σ ($\delta(\sigma) \in \delta(D) \subset C^n$).

Nous appellerons *fonction d'agrégation universelle* toute application $\mathbf{F}'$ de C^n dans C, et *fonction d'agrégation* (non universelle) toute application $\mathbf{F}$ de D dans C.

La figure 2 explicite très clairement la problématique arrowienne de 1951 et celle de 1963. L'ensemble des réponses « logiquement possibles » ω n'est autre que l'ensemble des préordres totaux définis sur un ensemble auxiliaire X. D est ce qu'Arrow appelle l'ensemble des scrutins admissibles et $\mathbf{F}$ une Social Welfare Function. En 1963, Arrow se place dans un contexte universel où tout scrutin « logiquement possible » est également admissible, c'est-à-dire un contexte où $D = C^n$ (δ est une bijection) et où la Social Welfare Function devient une fonction universelle $\mathbf{F}'$.

Dans tout ce qui suivra on ne distinguera jamais entre « logiquement possible » et « admissible », c'est-à-dire, même si cela n'est pas spécifié explicitement, qu'on admettra qu'est vérifiée la *condition d'universalité PU*.

PU Les ensembles D et C^n sont identiques, à une bijection δ près.

Il nous reste, pour compléter la figure 2, à introduire l'application $u^* : C^n \to T$, produit direct de u n fois par elle-même, ou encore telle que, quel que soit $i \in N$

$$uc_i = t_i u^*. \tag{3}$$

Cette application u^* existe, est unique et, du fait que u soit une injection, est elle-même une injection.

Nous pouvons maintenant traiter du concept essentiel de *u-cohérence* (ou de *F-cohérence*). Tout d'abord, il est équivalent de se donner un certain sous-ensemble $u(C)$, une injection $u : C \to Q$ ou bien une fonction logique F de m arguments v_k : $F(w) = F(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_m)$ (où $w = < v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_m >$) dont l'ensemble de vérité est précisément $u(C)$. En particulier, nous dirons que u et F sont *associées* s'il est vrai que

$$w \in u(C) \textit{ si et seulement si } F(w) \text{ est vraie}, \tag{4}$$

ce qui peut encore s'écrire comme

$$u(C) = \{ w ; w \in Q \quad et \quad F(w) \text{ vraie} \} . \tag{4'}$$

Posons encore

$$s(F) = \{ i ; i \in N \quad et \quad F(t_i(s)) \text{ vraie} \} ,$$
$$S(F) = \{ s ; s \in T \quad et \quad s(F) = N \} .$$

Alors

Théorème 2 : Soient une injection $u : C \to Q$ et son prédicat associé $F(w)$. On a alors $u^*(C^n) = S(F)$.

Ce qui signifie que $S(F)$ est l'ensemble des scrutins $s \in T$ F- ou u-admissibles.

** La démonstration repose sur la définition de u^* et sur la correspondance biunivoque entre un élément π d'un produit cartésien, ici C^n, et le n-uple correspondant $< w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n >$, $w_i \in Q$ et $c_i(\pi) = \omega_i$. Et on tient compte de ce que $F(w) = 1 \Leftrightarrow u(\omega) \in u(C)$, avec $u(\omega) = w$. **

Un mode de scrutin r sera dit *u-cohérent*, si l'image de C^n par l'application ru^* est contenue dans $u(C)$. Il sera dit *F-cohérent*, si, quel que soit $s \in T$, $s \in S(F)$ *implique* que $F(r(s))$ est vrai. Alors,

Théorème 3 : Supposons qu'une relation F soit associée à une application $u : C \to Q$, c'est-à-dire que $u(C)$ est l'ensemble de vérité de F. Un mode de scrutin r est u-cohérent *si et seulement si* r est F-cohérent; ou bien encore *si et seulement si* existe une (et alors une seule) fonction universelle $\mathbf{F}' : C^n \to C$ telle que : $u\mathbf{F}' = ru^*$.

** La démonstration de ce théorème repose en sa première partie sur le fait que $u^*(C^n) = S(F)$; et, en sa seconde partie, sur une démonstration duale de celle du théorème 1 (cf. [11], p. E II.20, proposition 9). **

Ce théorème explicite les liens exacts existant entre les fonctions universelles $\mathbf{F}'$ et les modes de scrutin r. Plus précisément : il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des fonctions $\mathbf{F}'$ et celui des applications ru^*, r étant nécessairement u-cohérent. On dira que r et r' sont *équivalents* si $ru^* = r'u^*$; si r est u-cohérent, r' est u-cohérent lui aussi, et *vice versa*; et alors correspond à la classe d'équivalence correspondante une et une seule fonction universelle $\mathbf{F}'$ telle que $u\mathbf{F}' = ru^* = r'u^* = \ldots$, etc. (pour plus de précisions voir [6], tome 1, pp. 22 sq.).

Remarque importante : Notre définition de la u-cohérence, ou, ce qui revient exactement au même, de la F-cohérence, instaure *ipso facto* la condition d'universalité *PU*. Cette condition *PU*, nous la rappellerons souvent, pour la forme, pour éviter tout malentendu; mais ce sera à chaque fois une redondance.

Pour terminer, il nous reste à définir ce qu'est un mode de scrutin simple $f = (f_k)k \in M$ *u-cohérent*. C'est bien entendu, un mode de scrutin simple dont le mode de scrutin composite associé $r = f$ est lui-même u-cohérent.

Concluons : maintenant, la notion centrale est le mode de scrutin composite $r \in \mathscr{C}$, passage obligé pour accéder à une plus grande généralité de la problématique de la représentation collective. En effet, des notions, certes importantes, telles que $\mathbf{F}$ ou $\mathbf{F}'$ restent attachées à la donnée d'une rationalité particulière C, alors que, manifestement, r n'en dépend absolument pas.

5 — *La notion de dictatorialité*

Un des grands apports dus à Arrow est certainement la notion d'ensemble décisif et de dictateur (arrowien). Cependant, on notera que les définitions arrowiennes ne se réfèrent pas à un schéma général, tel que le schéma de Condorcet. Nous nous proposons donc, ici, d'examiner la notion de dictatorialité dans le cadre d'un M-schéma bivalent.

Désignons par $P(N)$ la famille des parties de N et considérons la figure 3 où $\varepsilon : E \to P(N)$ est la correspondance définie comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon : E \to P(N) \\ \quad p \mapsto \varepsilon(p) = \{ i;\ i \in N \ \ \& \ \ e_i(p) = 1 \} \ . \end{cases}$$

On vérifie aisément que ε est une bijection, quand $R = \{ 0, 1 \}$ (M-schéma bivalent).

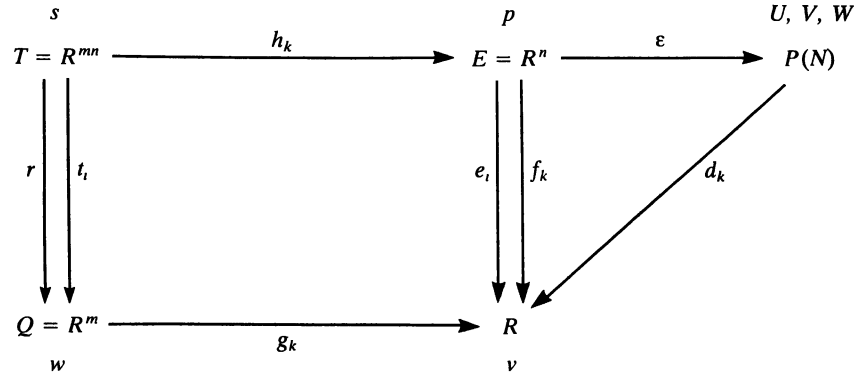


Fig. 3. — Notion de dictatorialité dans un schéma des élections particulières bivalent

La figure 3, juxtaposée avec la figure 2 nous donne le *schéma complet des élections particulières* (M-schéma ou Schéma de Condorcet).

Cela dit, nous nous placerons dans le contexte du M-schéma bivalent. Nous dénoterons par ε' la bijection inverse de ε.

Nous avons déjà défini pour une rationalité quelconque F l'expression $s(F)$. Un cas particulier, pour cette écriture, est :

$$s(q_k) = \{ i;\ i \in N \ \ \& \ \ e_i h_k(s) = 1 \} \ , s \in T \ \text{ et } \ k \in M.$$

Nous avons naturellement pour tout s : $s(q_k) = \varepsilon\, h_k(s)$.

Considérons un certain mode de scrutin $r \in \mathscr{C}$. Fixons une certaine question $k \in M$ et un certain scrutin $s \in T$. Soit un quelconque $V \in P(N)$. Nous dirons que (pour r) V est *dictatorial pour la question* k *et le scrutin* s, si on a : $\varepsilon\, h_k(s) = V$ & $g_k r(s) = 1$. On écrira, en abrégé, dans ce cas V *s-k-d*. De même, toujours pour r, V sera dit *non-dictatorial pour* k *et* s, si on a : $\varepsilon\, h_k(s) = V$ & $g_k r\ (s) = 0$, avec, en abrégé, V *s-k-nd*.

Toujours pour r, nous dirons que V est *k-dictatorial* (V *k-d*), si quel que soit s, V est *s-k-d*, c'est-à-dire encore :

$$(\forall\ s)\ (\varepsilon\ h_k\ (s) = V \Rightarrow g_k r(s) = 1);$$

et nous écrivons en abrégé V *k-d*. Nous dirons que V est *dictatorial* (V *d*), si V est *s-k-d*, quels que soient s et k. *Mutatis mutandis,* nous définirons V *k-non-dictatorial* (V *k-nd*) et V *non-dictatorial* (V *nd*).

Plaçons-nous maintenant dans le contexte $\mathscr{S}$ des modes de scrutins simples. Nous allons définir les notions de k-dictatorialité, dictatorialité, etc., d'une manière différente mais néanmoins équivalente, comme on le vérifiera aisément.

Nous appellerons *dictatorialité* toute famille $d = (d_k)k \in M$ de m applications d_k de $P(N)$ dans R. On désignera par $\mathscr{D}$ l'ensemble de toutes les dictatorialités possibles.

Théorème 4 : L'ensemble $\mathscr{S}$ des modes de scrutin simples est mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble $\mathscr{D}$ des dictatorialités par l'application $d_k = f_k\,\varepsilon'$, quel que soit $k \in M$.

** Le gros de la démonstration tient dans le théorème 1. La suite repose sur le fait que ε est une bijection : le théorème 4 n'est donc valable que pour un schéma bivalent **

Ainsi tout mode de scrutin simple est entièrement déterminé par une et une seule dictatorialité $d = (d_k)k \in M$ [6], tome 1, p. 51 et [7], p. 74.

Soient $V \in P(N)$ et $d = (d_k)k \in M$ quelconques. Nous dirons que, relativement à d,

V est k-dictatorial (en abrégé : $V\ k\ d$) si $d_k(V) = 1$;
V est k-non-dictatorial (V *k-nd*) si $d_k(V) = 0$;
V est dictatorial ($V\ d$) si $(\forall\ k)$ (V *k-d*);
V est non-dictatorial (V *nd*) si $(\forall\ k)$ (V *k-nd*);
V est mixte s'il n'est ni dictatorial, ni non-dictatorial.

Et on désignera par (D), (D'), (MX), respectivement, les familles des ensembles dictatoriaux, non-dictatoriaux et mixtes. A l'évidence ces trois familles constituent une tripartition de $P(N)$.

On notera le résultat immédiat mais important suivant : *un mode de scrutin simple est neutre si et seulement si* $(MX) = \emptyset$ (pas d'ensembles mixtes). C'est-à-dire encore, *ssi* la dictatorialité associée $d = (d_k)k \in M$ est telle que $d_k = d_{k'}$, quels que soient $k, k' \in M$; on écrira alors, par abus de notation, $d = d_k = d_{k'} = \cdots$

Un électeur i sera dit *dictateur* (au sens de notre terminologie et *non pas au sens arrowien du terme*) si i est dictatorial ($\{i\} \in (D)$). Un ensemble V sera dit être un *directoire*, s'il est dictatorial et si aucun de ses éléments i n'est dictateur; plus précisément :

$$V \in (D) \quad \& \quad (\forall\ i)\ (i \in V \Rightarrow \{i\} \notin (D)).$$

Remarques récapitulatives. La notion de dictatorialité s'entend toujours relativement à un mode de scrutin $r \in \mathscr{C}$ donné. Elle se définit certes au niveau de $\mathscr{C}$, mais ne prend sa véritable signification qu'au niveau de $\mathscr{S}$, voire de $\mathscr{N}$. Récapitulons donc tout cela sur l'exemple d'un ensemble V dictatorial (relativement à un $r \in \mathscr{C}$)

V est s *k-d* si $\varepsilon\ h_k(s) = V \quad \& \quad g_k r(s) = 1$;
V est $k\ d$ si $(\forall\ s)\ (\varepsilon\ h_k(s) = V \Rightarrow g_k r(s) = 1)$;
V est d si $(\forall\ k)\ (\forall\ s)\ (\varepsilon\ h_k(s) = V \Rightarrow g_k r(s) = 1)$.

Le théorème qui suit montre l'homogénéité des définitions.

Théorème 5 : Sous la conditions PS (r),

$$(\exists\ s)\ (\varepsilon\ h_k(s) = V\ \&\ g_k r\ (s) = 1)\ \textit{ssi}\ (\forall\ s)\ (\varepsilon\ h_k(s) = V \Rightarrow g_k r(s) = 1)$$
$$\textit{ssi}\ V\ k\text{-}d \text{ (c'est-à-dire si } d_k(V) = 1).$$

Sous la condition $PN(r)$ (qui présuppose la condition $PS(r)$),

$$(\exists\ k)\ (V\ k\ d)\ \textit{ssi}\ (\forall\ k)\ (\forall\ s)\ (\varepsilon\ h_k(s) = V \Rightarrow g_k r(s) = 1)$$
$$\textit{ssi}\ V\ d \text{ (c'est-à-dire si } d(V) = 1).$$

Résultats similaires, *mutatis mutandis,* pour la non-dictatorialité.

Dans la définition de V comme directoire, nous ne faisons ici aucune hypothèse sur V, alors qu'antérieurement (cf., par exemple [7], p. 74) nous supposions en outre $V \neq N$, — une restriction inutile tous comptes faits. On notera que *si* $\emptyset \in (D)$, $\emptyset$ *est nécessairement directoire.*

Chapitre 3

PROPOSITIONS, PRÉDICATS, QUESTIONS, RÉPONSES, SYNTAXE ÉLECTORALE

1 — *Notations*

Rappelons qu'un système logique, tel que le calcul propositionnel de la logique classique, peut se définir comme une langue formelle, ensemble de mots (ou formules, ou énoncés, ou propositions), formés à partir d'un ensemble M de lettres, dites propositions élémentaires (ou variables propositionnelles simples), et de divers symboles logiques : disjonction, conjonction, implication, équivalence, négation, etc., — au moyen de règles précises d'*énonciation*.

Une *interprétation* de la langue formelle en question, par exemple le calcul des propositions L classique, sera une application ι de L dans un ensemble R de *modalités* (ou *valences*). Pour L, bien entendu, $R = \{0, 1\}$: un mot ou une proposition F de L est donc susceptible de deux modalités seulement :

$\iota(F) = 0$, F est fausse dans l'interprétation ι,
$\iota(F) = 1$, F est vraie dans ι.

Nous utiliserons les notations suivantes, où F et F' sont deux propositions quelconques du calcul propositionnel classique L :

$F + F'$ disjonction (ou encore : F *ou* F');
$F \times F'$ conjonction (ou encore : F *et* F'; F & F'; $F.F'$);
$F \Rightarrow F'$ implication (ou encore : F *implique* F'; *si* F, *alors* F');
$F \Leftrightarrow F'$ équivalence logique (ou encore : F *équivaut à* F'; si et seulement si F'; F *ssi* F'; $F \sim F'$; $F = F'$, ce qui est un abus de notations);
non F négation de F (ou encore : $\overline{F}$).

Et encore avec nos notations, $\sum F_i$ et $\bigtimes F_i$ désigneront, respectivement, une disjonction et une conjonction d'un certain ensemble de propositions F_i.

Une tautologie est une proposition, que nous dénoterons par $\mathbf{1}$, qui est vraie quelle que soit l'interprétation ι (toutes les tautologies sont équivalentes entre elles dans L). Une antitaulogie, ou contradiction, est une proposition, dénotée $\mathbf{0}$, fausse quel que soit ι.

Donnons encore quelques formules qui nous seront utiles

$$F \Rightarrow F' \textit{ équivaut à } \overline{F} + F'; \qquad F \times F \Leftrightarrow F; \qquad F + F \Leftrightarrow F;$$
$$\textit{Si } F \Rightarrow F', \textit{ alors } F \times F' \Leftrightarrow F;$$
$$F + \textit{non } F \sim \mathbf{1}; \qquad F \times \overline{F} \sim \mathbf{0};$$
$$F + \mathbf{1} \sim \mathbf{1}; \qquad F + \mathbf{0} \sim F; \qquad F \times \mathbf{1} \sim F; \qquad F \times \mathbf{0} \sim \mathbf{0}.$$

Pour exprimer la véracité de la relation F, on écrira indifféremment : « F vrai », — ou : « F », — ou « $F = 1$ ».

Enfin, rappelons l'important théorème suivant (voir par exemple [19], pp. 40 à 44) : tout interprétation $\iota_0 : M \to \{0,1\}$ se prolonge en une interprétation $\iota : L \to \{0,1\}$ qui est un homomorphisme logique : $\iota(F + F') = \iota(F) + \iota(F')$, $\iota(\textit{non } F) = \textit{non } \iota(F)$, etc., etc., — et cela d'une et d'une seule façon (ι est unique) : il suffit donc d'interpréter les propositions élémentaires q_k de M pour fixer l'interprétation de toute formule F de L.

2 — *Fonction logique de* m *variables*

Soit un ensemble M de m propositions, ou variables élémentaires, q_k. Une fonction logique F de m variables sera toute application de $Q = R^m$ dans R (R ensemble des modalités). En particulier, dans le contexte d'une logique bivalente ($R = \{0,1\}$), par analogie avec les prédicats, on définira l'*ensemble de vérité* $V(F)$ de $F = F(q_1, \ldots, q_m) = F(w)$, $w \in Q$, par $V(F) = \{w; w \in Q \ \& \ F(w) = 1\}$. Nous retrouvons ainsi un sous-ensemble de Q déjà dénoté par $u(C)$: $V(F) = u(C)$.

En restant dans le contexte d'une logique bivalente classique L construite à partir d'un ensemble M de m propositions élémentaires q_k, toute proposition ou formule F de L, où apparaissent les m variables q_k, est une fonction logique bivalente de ces m variables. La réciproque est vraie (cf. [18], pp. 37 sq.) : toute fonction logique de m variables q_k peut s'écrire sous différentes formes dites *normales* (naturellement toutes équivalentes entre elles), dont notamment sous *forme normale conjonctive* :

$$F = F_1 \times \ldots F_r \ldots \times F_p = \mathbf{X}\, F_r,$$

où un quelconque F_r est nécessairement de l'une des huit formes suivantes :

$$\begin{aligned}
&F1 = q;\\
&F2 = \bar{q};\\
&F3 = q + \bar{q}';\\
&F4 = q + \bar{q}'_1 + \ldots + \bar{q}'_k; && k \geqslant 2\\
&F5 = q_1 + \ldots + q_k + \bar{q}'; && k \geqslant 2\\
&F6 = q_1 + \ldots + q_k; && k \geqslant 2\\
&F7 = \bar{q}_1 + \ldots + \bar{q}_k; && k \geqslant 2\\
&F8 = q_1 + \ldots + q_k + \bar{q}'_1 + \ldots + \bar{q}'_{k'}; && k, k' \geqslant 2
\end{aligned}$$

les différentes questions q (ou variables) apparaissant dans ces fonctions logiques partielles étant toutes prises dans M.

In [1], [2] et [4], où nous étudiions les relations d'ordre en général, les définitions étaient données sous forme normale conjonctive. In [3], nous avions opté pour les formes normales disjonctives. Finalement, les avantages de cette dernière solution nous paraissent être peu nombreux eu égard aux inconvénients.

Pour une même fonction logique $F(q_1, \ldots, q_m)$ il existe plusieurs formes normales conjonctives (toutes équivalentes entre elles). On prendra celle où les F_r sont écrits le plus simplement possible, c'est-à-dire, que dans tout F_r, toutes les questions q pouvant y apparaître soit sous forme affirmative $(\ldots + q + \ldots)$, soit sous forme négative $(\ldots + \bar{q} + \ldots)$ seront considérées comme *toutes distinctes :* il est inutile d'écrire $q + q$ au lieu de q; et si on a $q + \bar{q}$ dans F_r, c'est une tautologie qu'il est inutile de faire apparaître puisque $F \times \mathbf{1} = F$. Enfin, on ne peut avoir $F_r = \mathbf{0}$, car alors on aurait le cas trivial $F = \mathbf{0}$.

Donnons encore quelques définitions et notations qui nous serons utiles par la suite. Soient un facteur F_r d'un des huit types $F1$ à $F8$ et une question q quelconque de M et apparaissant dans F_r. Nous écrirons :

$t(r, q) = 1$ si $q \in F_r$, c'est-à-dire que q apparaît dans F_r sous forme affirmative (par exemple, dans $F8$, q_1),

$t(r, q) = 0$ si $\bar{q} \in F_r$, c'est-à-dire que q apparaît dans F_r sous forme négative (par exemple, dans $F5$, q').

3 — *Représentation des prédicats*

La rationalité F est souvent définie en termes de prédicat.

Un prédicat, binaire par exemple, est une fonction logique de plusieurs variables, x, y en l'occurence, qui prennent leurs valeurs sur un ensemble auxiliaire X, qui n'est pas cette fois-ci considéré comme un ensemble M de propositions élémentaires q_k,

$$F : X^2 \to R = \{0, 1\}.$$

En d'autres termes les arguments de $F(x, y)$ ne sont pas des variables logiques.

Plaçons-nous dans le cas de la bivalence $R = \{0, 1\}$ (en supposant X fini, pour éviter toute complication éventuelle); nous pouvons considérer le prédicat $F[x, y]$ comme une conjonction de formules

$F(x, y)$ du calcul des propositions L construit à partir des variables élémentaires $q_{xy} = (x, y)$ en nombre $|X^2|$ (bien entendu : $m = |M| = |X^2|$) :

$$F[x, y] = \mathop{\mathbf{X}}_{(x, y) \in X^2} F(q_{xy})$$

Toute proposition $F(x, y)$ pouvant être à son tour décomposée en facteurs de type F_r (voir § 2 *supra*), nous décomposons ainsi le prédicat F en une conjonction de facteurs F_r où les questions q_{xy}, apparaissant sous forme affirmative ou négative, sont prises dans l'ensemble M des $|X^2|$ question q_{xy}.

Précisons ces quelques idées très générales sur un exemple concret important, puisqu'il s'agit des *préordres totaux* R définis sur un ensemble X et objets de la problématique célèbre d'Arrow. Un préordre total est une relation binaire R (un certain sous-ensemble de X^2) transitive et totale, ce qu'on exprime en écrivant

$$xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz \qquad \& \qquad uRv \text{ ou } vRu,$$

(quels que soient x, y, z, u, et v dans X, clause souvent rendue implicite).

Le passage de X à M est simple : il suffit de poser $q_{xy} = xRy \in M$. Bien entendu $M = X^2$. On peut alors réécrire la définition du préordre total comme suit :

$$F[q_1, q_2, q_3, q_4, q_5] = F[q_1, q_2, q_3,] \times F[q_4, q_5]$$

où $\quad F[q_1, q_2, q_3] = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + q_3,\ F[q_4, q_5] = q_4 + q_5,\ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \in M$

et en passant aux différentes valeurs possibles, nous aurons une expression de genre :

$$F = (\bar{q}_1 + \bar{q}'_1 + q''_1)(\bar{q}_2 + \bar{q}'_2 + q''_2) \ldots (q_1 + q'_1)(q_2 + q'_2) \ldots = F(q_1, \ldots q_m)$$

avec un certain laxisme dans une écriture des indices, qui deviendrait vite complexe, si on voulait la rendre rigoureuse.

On appelle ensemble de vérité $V(F)$ d'un prédicat $F[x]$, l'ensemble des x pour lesquels la proposition $F(x)$ est vraie $V(F) = \{x; x \in X \;\&\; F(x)\}$.

Ainsi un prédicat $F[x]$ est une conjonction de propositions $F(x)$:

$$F[x] = \mathop{\mathbf{X}} F(x),\ x \in X.$$

On peut former à partir d'un prédicat $F[x]$ diverses propositions (cf. [11], pp. EI.31 sq.), dont :

$(\forall x)\ F[x]$ La proposition $F(x)$ est vraie quel que soit $x \in X$ (donc $V(F) = X$);

$(\exists x)\ F[x]$ Il existe (au moins) un $x \in X$, tel que $F(x)$ soit vrai donc $V(F) \neq \emptyset$.

Cela dit, selon l'usage, nous écrivons dorénavant les prédicats $F[x, y, \ldots]$, sous la forme plus simple $F(x, y, \ldots)$, ce qui constitue une légère ambiguïté dans les notations.

4 — *Linguistique électorale : questions et réponses, réponses pertinentes*

Condorcet commence l'étude des délibérations d'une assemblée (un jury par exemple) en envisageant d'abord le cas des avis simples, — que nous avons appelés ici questions simples q_k. Puis, il complique son analyse :

> « Pour appliquer maintenant la même théorie à des propositions plus complexes, il faut observer d'abord que toute proposition composée se réduit à un système de propositions simples, & que tous les avis que l'on peut former en délibérant sur cette proposition, sont égaux en nombre aux combinaisons qu'on peut faire de ces propositions & de leurs contradictoires » [12], p. XLV.

C'est-à-dire que l'ensemble de tous les avis « plus complexes » est ce que nous avons introduit comme étant l'ensemble $Q = R^m$ des réponses composites w. Puis, toujours avec une intuition remarquable, Condorcet va achever sa description linguistique des avis soumis à délibération, en notant que :

> « Si ces propositions, dont les combinaisons forment les différents avis, étaient toujours telles qu'aucune de ces combinaisons mathématiques possibles ne renfermât une contradiction, nous

n'aurions rien à ajouter ici, mais cela n'a lieu en général que lorsque les propositions sont indépendantes l'une de l'autre. Si elles sont liées entr'elles, il peut y avoir des combinaisons renfermant des contradictions dans les termes » [12], p. XLIX.

Ces intuitions doivent être cependant complétées ou modifiées en certains points. C'est ce que nous allons essayer de faire ici, en allant un peu plus avant dans une problématique complexe. Dans la problématique de Condorcet, qui est aussi la nôtre, une question est posée et l'on doit y répondre. Le sens commun trouve naturel, sinon souhaitable, qu'une question étant posée, disons en français, l'on y réponde dans la même langue, c'est-à-dire en français. Si on va au-delà de ces « évidences », on posera jusqu'à plus ample informé l'existence de trois plans du discours naturel : le plan de la question, celui de la réponse et le plan qualifiant la réponse. Bref, un approfondissement dans l'analyse de notre problématique, nous conduit à extraire du complexe qu'est une langue naturelle trois langues formelles constitutives d'un système linguistique formel déjà plus complexe : la langue formelle électorale.

Cette analyse se trouve corroborée par la définition que nous donnerons de la question (Q), comme un ensemble, celui des réponses possibles à cette question. Bien entendu, il y a des « réponses » qui ne font pas partie de cet ensemble, des « réponses à côté », des réponses « non pertinentes ». D'où trois niveaux, celui de l'ensemble (niveau des questions), celui des éléments (niveau des réponses) et celui qualifiant les éléments par rapport à cet ensemble (niveau d'appréciation de la réponse).

Ici, une *réponse* (formelle) est visiblement un quelconque élément w de l'ensemble $Q = R^m$. La langue formelle des réponses a pour ensemble de mots élémentaires un ensemble $L(M, R)$, chaque mot étant représenté par une certaine application de M dans R

$$L(M, R) = R^m = Q.$$

Dès lors, une question formelle (Q), ou encore $F?$, est un certain sous-ensemble de $Q = R^m$

$$V(F) = (Q) \subset Q = R^m,$$

la langue électorale des questions ayant donc pour ensemble de mots élémentaires $L(Q)$, c'est-à-dire $P(Q)$, ensemble des parties de Q.

De notre troisième langue formelle, $L(R, Q)$, nous ne connaissons qu'un seul mot qui, dans le symbolisme de la théorie des ensembles, s'écrit « $w \in Q$ ». Si nous plongeons $L(R, Q)$ dans le langage de la théorie des ensembles, dire que $w \in (Q)$ est « vrai », revient à dire qu'on a répondu (pertinemment, rationnellement, de façon cohérente, etc.) à la question $F? = (Q)$ posée.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces problèmes, au demeurant fort difficiles, et nous nous bornerons à deux remarques, dans le contexte de la bivalence $R = \{0, 1\}$. Dans le contexte de la bivalence, et dans ce contexte-là seulement, $L(Q)$ s'identifie à l'ensemble $Hom(Q, R)$ des applications de Q dans R. Ce qui signifie que toute question (Q) (ou $F?$) est associée biunivoquement à une certaine fonction logique bivalente $F(w)$ des m question $q_k \in M$.

Enfin, dans tout ce qui suit, nous considérons implicitement un isomorphisme, dénoté par ?, $? : L \rightarrow L^*$, — où L^* est une réplique isomorphe de L, ensemble des propositions logiques formées à partir des propositions $q_k \in M$, selon les procédures habituelles, et est interprété comme l'ensemble des questions $(Q) = F?$ ($L(Q)$ est un sous-ensemble de L^*). On a : $?(F) = F?$, — $?(non\ F) = non\ F?$, — $?(F\ \&\ F') = F?\ \&\ F'?$, — etc., c'est-à-dire que la « vérité » de $F?\ \&\ F'?$, par exemple, correspond isomorphiquement à la vérité logique de $F\ \&\ F'$ et ne veut rien dire de plus que ceci : on a répondu « pertinemment » simultanément à F et F'.

Chapitre 4

COUPES λ ET λ SCHÉMAS

1 — *M-schéma et λ schéma*

On a vu au chapitre 3 que toute fonction logique F de m propositions élémentaires q_k ($k \in M$) pouvait se mettre sous une forme normale conjonctive. On a vu également dans le cas où F est définie sous forme prédicative, que F pouvait encore s'écrire sous la forme générale

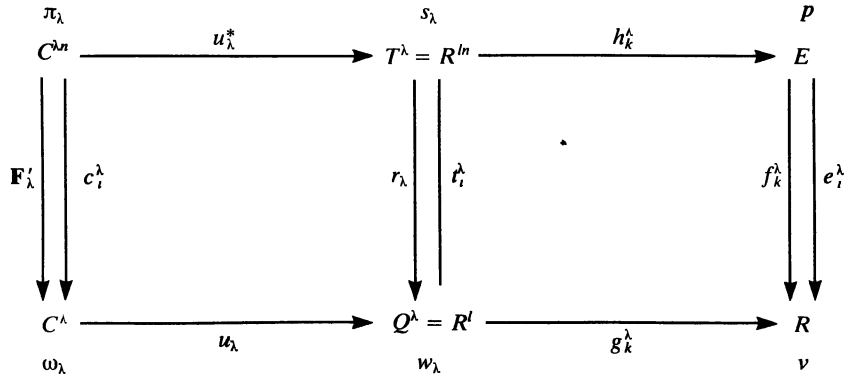
$$F = \mathbf{X}\, F_\alpha,\ \alpha \in A,$$

chacune des propositions logiques F_α étant fonction partielle d'un certain nombre l de questions q_k prises dans M. Et, en fait, on s'arrange pour que chaque F_α soit une disjonction logique d'un des huit types $F1$ à $F8$ définis p. 160.

Désignons par $\gamma\ (\alpha) = \lambda$ l'ensemble λ des questions q_k apparaissant dans F_α, soit sous forme affirmative ($q_k \in F_\alpha$ ou $t(\alpha, q_k) = 1$), soit sous forme négative ($\bar{q}_k \in F_\alpha$ ou $t(\alpha, q_k) = 0$). On appelle *coupe* tout sous-ensemble λ non vide de M ($\lambda \subset M$ et $\lambda \neq \emptyset$). Le nombre des questions de λ sera désigné par $l = |\lambda|$.

Enfin; on posera $H = \gamma\,(A)$, famille des coupes λ afférentes aux $\alpha \in A$ (on remarquera qu'à deux α, α′ distincts peut correspondre une seule et même coupe $\lambda = \gamma(\alpha) = \gamma(\alpha')$.

On appellera λ *schéma* tout schéma déduit du M-schéma en substituant λ à M. La figure 4 représente un λ-schéma quelconque, avec les notations naturelles qui conviennent.



$[N] = n,\ |\lambda| = l.$

Fig. 4. — λ schéma

Précisons et commentons succinctement les notations d'un λ-schéma, sachant que tous les résultats établis pour le M-schéma se transposent *mutatis mutandis* au λ-schéma.

• $T^\lambda = E^l = (Q^\lambda)^n = R^{ln}$, $Q^\lambda = R^l$, avec $g_k^\lambda\, t_i = e_i^\lambda\, h_k^\lambda$, $t_i^\lambda\, u_\lambda^* = u_\lambda\, c_i^\lambda$, quels que soient $i \in N$ et $k \in \lambda$.

• Les éléments (quelconques) de ces différents ensembles seront indicés par λ pour pouvoir les distinguer des éléments correspondants dans le M-schéma (la partie E, R étant commune à tous les λ-schémas et M-schéma) :

$$\pi_\lambda \in (C^\lambda)^n,\ s_\lambda \in T^\lambda,\ \omega_\lambda \in C^\lambda,\ w_\lambda \in Q^\lambda,$$
$$\mathbf{F}'_\lambda \in \mathrm{Hom}\ (\,(C^\lambda)^n,\ C^\lambda),\ r_\lambda \in \mathrm{Hom}\ (T^\lambda,\ Q^\lambda).$$

• On introduit également sans diffficulté les modes de scrutin simples d'un λ-schéma : $f_\lambda = (f_k^\lambda)\ k \in \lambda$.

De la même façon, les conditions $PS(r)$ et $PN(f)$ deviennent, respectivement, $PS(r_\lambda)$, $PN(f_\lambda)$.

$PS(r_\lambda)$ quels que soient $s_\lambda, s'_\lambda \in T^\lambda$ et $k \in \lambda$,

$$h_k^\lambda(s_\lambda) = h_k^\lambda(s'_\lambda) \Rightarrow g_k^\lambda r_\lambda(s_\lambda) = g_k^\lambda r_\lambda(s'_\lambda);$$

$PN(f_\lambda)$ quels que soient $k, k' \in \lambda$, en posant $f_\lambda = (f_k^\lambda)\ k \in \lambda : f_k^\lambda = f_{k'}^\lambda$.

$$\mathscr{S}_\lambda = \{ r_\lambda;\ r_\lambda \in \mathscr{C}_\lambda \ \&\ PS(r_\lambda) \},$$
$$\mathscr{N}_\lambda = \{ r_\lambda;\ r_\lambda \in \mathscr{S}_\lambda \ \&\ PN(r_\lambda) \},$$

avec, évidemment, $\mathscr{C}_\lambda = \mathrm{Hom}(T^\lambda, Q^\lambda)$.

• Soient F_α et $\lambda = \gamma(\alpha)$. Tout ce qui a été dit sur la F-cohérence dans le M-schéma se transpose tel quel, sans difficulté, dans le λ-schéma correspondant. En particulier

$$s_\lambda(F_\alpha) = \{ i;\ i \in N \ \&\ F_\alpha(t_i^\lambda(s_\lambda)) = 1 \},$$
$$S(F_\alpha) = \{ s_\lambda;\ s_\lambda \in T^\lambda \ \&\ s_\lambda(F_\alpha) = N \},$$

avec $\lambda = \gamma(\alpha)$. Et on dira que r_λ est F_α-cohérent (ou u_λ-cohérent) si, quel que soit $s_\lambda \in S(F_\alpha)$, on a $F_\alpha(r_\lambda(s_\lambda)) = 1$, etc.

2 — *Étude de passage du M schéma aux* λ-schémas

Le problème du passage du M-schéma à un λ-schéma quelconque est d'abord l'étude des relations entre $r \in \mathscr{C}$ et $r_\lambda \in \mathscr{C}_\lambda$. Soit alors la figure 5 :

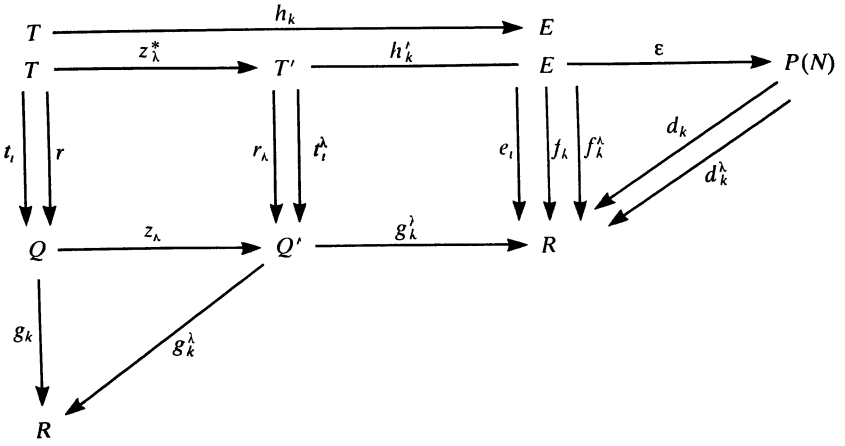


Fig. 5. — Passage du M schéma à un λ schéma

La résolution de ce problème passe naturellement par l'introduction de la projection canonique z_λ, dite projection d'indice λ de $Q = R^m$ sur $Q^\lambda = R^l$. Par définition, c'est l'application z_λ (elle existe et elle est unique), telle que :

$$g_k = g_k^\lambda z_\lambda, \text{ quel que soit } k \in \lambda$$

et aussi par l'introduction du produit direct de z_λ, n fois par lui-même, c'est-à-dire l'application z_λ^* de T sur T^λ (elle existe et elle est unique), telle que

$$t_i^\lambda z_\lambda^* = z_\lambda t_i, \text{ quel que soit } i \in N.$$

On démontre que z_λ et z_λ^* sont des surjections (cf. [11], E II.33 et E II.38 39). Et on vérifiera facilement que, pour tout $k \in \lambda$: $h_k = h_k^\lambda z_\lambda^*$.

3 — λ-*Représentabilité et H-Représentabilité*

Soit une famille (non vide) H de coupes λ quelconques. Dans ce qui suit jouera un rôle important la propriété dite de *balayage* :

$B(H)$ quel que soit $k \in M$, existe $\lambda \in H$ tel que $k \in \lambda$.

Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, les familles que nous considérons vérifieront cette propriété de balayage.

Notre fil conducteur est le suivant. Dans la méthode des élections particulières, les électeurs se prononcent, à chaque scrutin $s \in T$, sur toutes les questions $q_k \in M$. Et si on désire remplacer l'étude directe de $r \in \mathscr{C}$ par une famille $\varphi = (r_\lambda)\lambda \in H$ « équivalente » (quand cela sera possible et dans un sens qu'on précisera dans un instant), il est naturel d'exiger $B(H)$.

Énonçons le résultat intermédiaire suivant : si $B(H)$, les familles $(z_\lambda)\lambda \in H$ et $(z^*_\lambda)\lambda \in H$ sont *monomorphiques* (ou encore « séparantes [15]), c'est-à-dire $(\forall f)\ (\forall f')\ (\forall \lambda)\ (z_\lambda f = z_\lambda f') \Rightarrow f = f'$), etc.

Nous seront encore utiles les notions qui suivent. Tout d'abord, sur $\mathscr{C}^* = \cup \mathscr{C}_\lambda$, $\lambda \subset M$ & $\lambda \neq \emptyset$, définissons la relation

$E(r_\lambda, r'_{\lambda'})$ $\quad (\forall k)\ (k \in \lambda \cap \lambda' \Rightarrow g^\lambda_k r_\lambda z^*_\lambda = g^{\lambda'}_k r'_{\lambda'} z^*_{\lambda'})$.

Puis, considérons $\varphi = (r_\lambda)\ \lambda \in H$ et $\varphi' = (r'_{\lambda'})\ \lambda' \in H'$ quelconques :

$\varphi = \varphi'$ $\quad H = H'$ *et* $r_\lambda = r'_\lambda$, quel que soit $\lambda \in H$.

$E(\varphi, \varphi')$ $\quad (\forall \lambda)\ (\forall \lambda')\ (\lambda \in H\ \&\ \lambda' \in H' \Rightarrow E(r_\lambda, r'_{\lambda'}))$.

$E(\varphi, \varphi) = E(\varphi)$, par convention d'écriture.

$PS(\varphi)$ $\quad (\forall \lambda)\ (\lambda \in H \Rightarrow PS(r_\lambda))$.

On introduira maintenant les familles ci-après

$$\Phi(H) = \{\ \varphi;\ \varphi = (r_\lambda)\ \lambda \in H\ \&\ B(H)\ \},$$
$$\Phi_1(H) = \{\ \varphi;\ \varphi \in \Phi(H)\ \&\ E(\varphi)\ \},$$
$$\Phi_2(H) = \{\ \varphi;\ \varphi \in \Phi(H)\ \&\ PS(\varphi)\ \},$$
$$\Phi_0(H) = \Phi_1(H) \cap \Phi_2(H) = \{\ \varphi;\ \varphi \in \Phi(H)\ \&\ E(\varphi)\ \&\ PS(\varphi)\ \},$$
$$\Phi = \cup\, \Phi(H) \quad H \in P(M) - \emptyset,$$
$$\Phi_0 = \cup\, \Phi_0(H) = \{\ \varphi;\ \varphi \in \Phi\ \&\ PS(\varphi)\ \&\ E(\varphi)\ \} = \Phi_1 \cap \Phi_2, \text{ avec}$$
$$\Phi_1 = \cup\, \Phi_1(H) = \{\ \varphi;\ \varphi \in \Phi\ \&\ E(\varphi)\ \},$$
$$\Phi_2 = \cup\, \Phi_2(H) = \{\ \varphi;\ \varphi \in \Phi\ \&\ PS(\varphi)\ \}.$$

Après ces différents préliminaires, nous dirons que r est *représentable par* r_λ, si, quel que soit $k \in \lambda$, $g_k r = g^\lambda_k r_\lambda z^*_\lambda$, c'est-à-dire que sur les questions $q_k \in \lambda$ communes, r et r_λ « donnent les mêmes résultats ». Nous dirons que r est λ-*représentable* s'il existe un r_λ qui le représente.

On dira que r est *représentable par* $\varphi = (r_\lambda)\lambda \in H$ si r est représentable par tout $r_\lambda \in \varphi$. On dira que r est *H-représentable* si existe $\varphi \in \Phi(H)$ qui le représente.

Il nous reste à introduire les *conditions de simplicité généralisées* suivantes :

$PS(r, \lambda)$ $\quad$ quels que soient $s, s' \in T$, on a
$$z^*_\lambda(s) = z^*_\lambda(s') \Rightarrow z_\lambda r(s) = z_\lambda r(s'),$$

$PS(r, H)$ $\quad (\forall \lambda)\ (\lambda \in H \Rightarrow PS(r, \lambda))$.

Énonçons dans ces conditions le théorème de simplicité généralisé

Théorème 6 : r est représentable par r_λ *si et seulement si* $z_\lambda r = r_\lambda z^*_\lambda$.

En outre : • $\mathscr{R}(\lambda) = \{\ r;\ r \in \mathscr{C}\ \&\ PS(r, \lambda)\ \}$,

• $\mathscr{R}(H) = \{\ r;\ r \in \mathscr{C}\ \&\ PS(r, H)\ \}$.

** Le début du théorème repose sur le fait que la famille des projections d'un produit cartésien est monomorphique. La suite de la démonstration est similaire à celle du théorème 1 : la relation $r_\lambda z_\lambda^* = z_\lambda r$ n'a de sens et n'est vérifiée que *ssi* $PS(r, \lambda)$. **

$\mathscr{R}(\lambda)$ et $\mathscr{R}(H)$ étant, respectivement, les sous-ensembles de $\mathscr{C}$ des modes de scrutin r λ-représentables et H représentables. Il est intéressant de noter que, faisant $\lambda = M$, on a :
$\mathscr{R}(M) = \{ r; r \in \mathscr{C} \ \& \ PS(r) \} = \mathscr{S}$. Et encore :

$$\mathscr{R}(H) = \cap \mathscr{R}(\lambda) \qquad \lambda \in H,$$
$$\mathscr{S} = \cap \mathscr{R}(\lambda) \qquad \lambda \subset M, \lambda \neq \emptyset,$$
$$\mathscr{S} \subset \mathscr{R}(H), \text{ pour tout } H \text{ non vide}, H \subset P(M).$$

Théorème 7 : • Sur $\mathscr{C}^*$, $E(r_\lambda, r'_{\lambda'})$ est réflexive et symétrique.

• $E(\varphi, \varphi')$ est une relation d'équivalence sur Φ_1.
• $\varphi, \varphi' \in \Phi_1(H) \ \& \ E(\varphi, \varphi') \Rightarrow \varphi = \varphi'$.

** Les démonstrations ne présentent aucune difficulté particulière. La condition $B(H)$ est indispensable pour la démonstration de la transitivité de $E(\varphi, \varphi')$ et elle est vérifiée dans Φ_1. La fin de la démonstration (dernière proposition) repose sur le fait que z_λ^* est surjective et sur le fait que la famille des projection g_k^λ est monomorphique; ici, les conditions $B(H)$ et $E(\varphi)$ n'interviennent pas. **

Nous achèverons l'étude du problème de la représentabilité en introduisant les deux correspondances suivantes :

$$\begin{cases} ass_\lambda : \mathscr{R}(\lambda) \to \mathscr{C}_\lambda \\ \quad r \mapsto r_\lambda, \text{ avec } z_\lambda r = r_\lambda z_\lambda^*, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} ass_H : \mathscr{R}(H) \to \Phi^*(H) \\ \quad r \mapsto \varphi = (ass_\lambda(r))\ \lambda \in H, \end{cases}$$

où $\Phi^*(H)$ désigne l'ensemble de tous les $\varphi = (r_\lambda)\ \lambda \in H$ possibles. Quand H vérifie $B(H)$, naturellement, $\Phi^*(H) = \Phi(H)$. Alors

Théorème 8 : La correspondance ass_λ est une surjection. La correspondance ass_H est une application qui, dès que $B(H)$ est vérifié (alors $\Phi^*(H) = \Phi(H)$) est injective. De plus, avec $B(H)$, l'application ass_H met en correspondance biunivoque $\mathscr{R}(H)$ et $\Phi_1(H)$: tout r H-représentable l'est d'une et d'une seule façon par $\varphi = (r_\lambda)\lambda \in H$, $E(\varphi)$, et *vice versa.*

** Soit un quelconque $r_\lambda \in \mathscr{R}(\lambda)$, donc $PS(r, \lambda)$, donc ass_λ est partout définie et est univoque. La surjectivité vient de ce que Q^λ est un ensemble projectif (dans la catégorie des ensembles, tout objet, i.e. tout ensemble, est projectif [17], p. 79). Donc, puisque z_λ est une surjection, étant donné r_λ, c'est-à-dire $r_\lambda z_\lambda^*$, on peut toujours trouver r tel que $z_\lambda r = r_\lambda z_\lambda^*$.

Soit $r \in \mathscr{R}(H)$. Donc, quel que soit $\lambda \in H$, $r \in \mathscr{R}(\lambda)$, donc existe un et un seul r_λ représentant r. Donc φ est défini univoquement et ass_H est une application (la condition $B(H)$ ne joue à ce stade aucun rôle). En présence de $B(H)$, supposons $ass_H(r) = ass_H(r')$. Alors quel que soit $\lambda \in H$, $ass_\lambda(r) = ass_\lambda(r')$, donc $z_\lambda r = z_\lambda r'$. Et comme alors la famille $(z_\lambda)\lambda \in H$ est monomorphique, $r = r'$ et ass_H est une injection.

Soit $r \in \mathscr{R}(H)$, avec $B(H)$. On vérifie facilement qu'on a alors $E(ass_H(r))$. Donc, $ass_H(r) \in \Phi_1(H)$. Soit maintenant un $\varphi \in \Phi_1(H)$. Soit $s \in T$ quelconque; posons $v_k^\lambda = g_k^\lambda\, r_\lambda\, z_\lambda^*(s)$. De la famille de tous les v_k^λ ainsi déterminés, on peut toujours extraire un $\omega = < v_1^{\lambda_1}, \ldots, v_k^{\lambda_k}, \ldots, v_m^{\lambda_m} >$ et, donc, définir une correspondance $r : s \mapsto w$, — qui est partout définie et univoque de par $E(\varphi)$. Donc r est une application; donc $ass_H(\mathscr{R}) = \Phi_1(H)$; et comme ass_H est injective, il y a donc bien correspondance biunivoque par ass_H entre $\mathscr{R}(H)$ et $\Phi_1(H)$. **

Le théorème qui suit permet de conclure :

Théorème 9 : Quels que soient λ et H,

$$r \in \mathscr{S} \Rightarrow PS(ass_\lambda(r)),$$
$$r \in \mathscr{R}(H) \;\&\; B(H) \;\&\; PS(ass_H(r)) \Rightarrow r \in \mathscr{S}.$$

Concluons : $\mathscr{S}$ peut être mis en correspondance biunivoque (par ass_H) avec tout $\Phi_0(H)$ (sous la condition $B(H)$). C'est à-dire que tout r simple est représentable par un et un seul $\varphi \in \Phi_0(h)$, et *vice versa*, quel que soit H, tel que $B(H)$. Et encore soient φ, $\varphi' \in \Phi_0$ deux représentations d'un même $r \in \mathscr{S}$ ($\varphi \in \Phi_0(H)$ et $\varphi' \in \Phi_0(H')$; si $H \neq H'$, $E(\varphi, \varphi')$, c'est-à-dire que φ et φ' sont équivalents; et si $H = H'$, φ et φ' sont identiques.

Bref, et pour l'essentiel, pour tout $r \in \mathscr{S}$, on peut étudier r, en choisissant une famille H convenable et en considérant le $\varphi \in \Phi_0(H)$ associé.

Remarque : ce chapitre 4 est la réponse aux préoccupations de May exprimées à la fin de [16] et à celles de Guilbaud ([13] pp. 552 sq.), savoir : à partir d'autant d'applications $f_k : E \to R$ que de questions simples q_k posées, obtenir par une sorte de synthèse le mode de scrutin r correspondant. Ce fut aussi le principe implicite qui nous guida in [1], [2], [4] et [3]. Ce projet ne peut évidemment conduire aux modes de scrutin les plus généraux, mais seulement aux modes de scrutin simples. La démarche ainsi rappelée possède en outre l'inconvénient d'occulter complètement l'existence de la condition $PS(r)$.

(Suite et fin au prochain numéro)