JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

PAUL DAMIANI

Recherche d'une loi générale de mortalité

Journal de la société statistique de Paris, tome 126, nº 2 (1985), p. 63-76
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1985__126_2_63_0>

II

ARTICLE

RECHERCHE D'UNE LOI GÉNÉRALE DE MORTALITÉ

Paul DAMIANI
Administrateur de l'I.N.S.E.E.,
secrétaire général des Sociétés de statistique de Paris et de France (*)

On a essayé de déterminer une loi générale représentant la probabilité de décès en fonction de l'âge pour un être humain, à partir de la conception. Pour cela, on a été amené à définir un temps physiologique différent du temps observé et on a cherché une loi en fonction de ce temps réel.

We tried to find a general law of human probability of death according to age since conception. For this purpose, we defined a physiologic time different of the observed time and we searched a law according to this real time.

I — INTRODUCTION

Une loi de mortalité pour la vie humaine est une fonction analytique permettant de calculer la probabilité de décès à un âge donné, en fonction de cet âge. Une telle loi, pour être satisfaisante, doit être générale c'est-à-dire s'appliquer à la vie entière à partir de la conception, elle doit être simple et avoir une interprétation physique.

Les nombreuses tentatives qui ont été réalisées, en particulier par les démographes et les actuaires, n'ont pas donné de résultats entièrement satisfaisants.

On a essayé dans cette étude de déterminer une loi répondant mieux aux conditions imposées.

II — TABLES DE MORTALITÉ ET LOIS DE MORTALITÉ USUELLES

II.1. *Tables de mortalité*

II.1.1. *A partir de la naissance*

Des tables de mortalité détaillées sont établies actuellement par l'Institut national de la statistique et des études économiques (I.N.S.E.E.) à l'occasion de chaque recensement, en utilisant les données d'état civil au cours d'une période de cinq années entourant ce recensement. Les dernières tables publiées se rapportent aux périodes suivantes : 1966-1970 [1], 1973-1977 [2].

(*) I.N.S.E.E., 18, boulevard A.-Pinard, 75675 Paris Cedex 14.

Journal de la Société de statistique de Paris, tome 126, n° 2, 1985.

Pour les périodes antérieures, on trouvera des extraits des tables de mortalité dans l'annuaire statistique de la France de 1966 : XVIII[e] (Duvillard), 1817-1831 (Demonferrand), 1840-1959 (Dr Bertillon père), 1861-1865, ...

Les tables récentes donnent, en particulier, par année d'âge à partir de la naissance et suivant le sexe, le quotient annuel de mortalité à l'âge x, c'est-à-dire la probabilité pour un individu d'âge x de mourir avant d'avoir atteint l'âge $x + 1$.

Pour la période 1966-1970, l'I.N.S.E.E. a également établi une table de mortalité par maladie; la méthode utilisée pour calculer une telle table suppose que la mortalité par maladie est indépendante de la mortalité accidentelle. On notera que pour la même période, P. Damiani a établi une table de mortalité non accidentelle qui ne suppose pas l'indépendance de ces deux types de mortalité [3].

On remarquera qu'une étude de A. Lery a montré, en vérifiant les avis de décès, que la mortalité aux grands âges augmentait moins rapidement que ne l'indiquaient les séries des quotients de mortalité extrapolés sur la base des observations faites aux âges inférieurs à 85 ans [4].

II.1.2. *Table de mortalité intra-utérine*

P. Damiani a évalué une table de mortalité intra-utérine pour les années 1926, 1954, 1962, 1968 [5]. Cette table établie à partir des statistiques d'état civil fournit les probabilités mensuelles de décès des fœtus à partir de 6 mois de gestation.

Les résultats obtenus montrent qu'il y a continuité dans l'évolution de la mortalité avant et après la naissance. On constate simplement, au moment de la naissance, une surmortalité due aux risques de l'accouchement.

II.2. *Lois de mortalité*

II.2.1. Lois de mortalité pour l'âge adulte

Les principales lois de mortalité proposées par les démographes et les actuaires ne représentent la mortalité qu'à partir de l'âge adulte. On trouvera un aperçu des différentes lois proposées dans le traité d'assurances de P.J. Richard [6].

On ne citera que la loi de Makeham, qui date de 1860 et est encore utilisée par les actuaires, car elle permet de simplifier le calcul des primes sur des groupes d'individus. Cette loi se prête, en outre, à une interprétation simple.

La probabilité pour un individu d'âge x de mourir avant d'avoir atteint l'âge $x + dx$, s'écrit μ_x dx où μ_x est le *taux instantané de mortalité* à l'âge x. Dans la loi de Makeham, on a :

$$\mu_x = a + bc^x$$

Ce taux se compose de deux parties :

— une partie constante a, représentant la mortalité indépendante de l'âge (hasard, accidents, ...);

— une quantité bc^x représentant la mortalité biologique qui croît de façon exponentielle avec l'âge.

La loi de Makeham s'applique bien à la mortalité observée à partir de 20 ou 25 ans jusqu'à 85 ans.

II.2.2. *Lois de mortalité pour la vie entière*

Des tentatives ont été faites pour représenter la mortalité de la vie entière par une formule unique. On trouvera une discussion à ce sujet dans une communication de M. Fréchet devant la Société de statistique de Paris [7].

Les lois proposées sont de deux types :

— formule mathématique unique s'appliquant à la vie entière comme par exemple la loi proposée par M. Fréchet, celle de Thiele et Steffensen et celle de Risser;

— somme de différentes lois correspondant chacune à une période de la vie. En particulier, K. Pearson représente la mortalité depuis la conception comme la somme de cinq courbes normales ou quasi-normales; Duc décompose la distribution des décès par âge en cinq courbes normales; P. Delaporte pense que la mortalité est la somme de plusieurs expressions correspondant chacune à une phase physiologique de la vie.

On remarque que les lois uniques proposées pour représenter la mortalité de la vie entière ont un grand nombre de paramètres et ne présentent pas de justification au point de vue biologique.

III — But de l'étude et méthode suivie

La loi cherchée doit représenter la mortalité de la vie entière à partir de la conception; elle doit être de forme aussi simple que possible et avoir une interprétation au point de vue physique.

On a pensé que, pour répondre à ces conditions, cette loi devait être formulée en fonction du temps physiologique réel et non en fonction du temps observé.

On a donc été amené à évaluer ce temps réel. Pour cela, on a fait appel aux résultats de la théorie de la relativité restreinte. Ce temps réel, appelé ici temps propre, est déterminé par les variations du poids du corps humain avec l'âge.

On a cherché ensuite expérimentalement une liaison statistique entre le temps et le quotient de mortalité correspondant au temps propre; on a essayé de justifier cette relation.

Enfin, on a proposé des lois représentant, en fonction du temps propre, les variables observées suivantes : temps, poids et quotient de mortalité.

IV – Changement de l'échelle des temps

IV.1. Existence d'un temps physiologique

L'existence d'un temps physiologique différent du temps observé peut être perçue subjectivement par tout être humain au cours de sa vie : le temps semble s'écouler plus rapidement au fur et à mesure que l'âge augmente. Ces constatations ont été vérifiées par des expériences telles que celles de Lecomte du Nouÿ qui ont montré que la vitesse de cicatrisation des plaies diminuait avec l'âge [8].

Pour définir ce temps réel, on a pensé à utiliser les résultats de la théorie de la relativité restreinte.

IV.2. Eléments de la théorie de la relativité restreinte.

Ces notions sont tirées du traité d'Arzeliès [9].

On considère deux trièdres de référence K et K_0 d'axes parallèles. On suppose que le trièdre K_0 est animé d'un mouvement uniforme par rapport au trièdre K. Soit un point matériel M de masse m et de coordonnées x, y, z, t dans le trièdre K, de masse m_0 et de coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 dans le trièdre K_0.

Les formules de la transformation de Lorentz permettent de déterminer les valeurs des coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 en fonction des valeurs de x, y, z, t.

En particulier si le point M est fixe dans K_0, on a la relation

$$\frac{dt}{dt_0} = \frac{m}{m_0} \tag{1}$$

Les valeurs des variables dans le trièdre K sont les valeurs observées ; celles dans le trièdre K_0 sont appelées valeurs *propres*.

IV.3. Définition du temps propre

On admet que la relation (1) s'applique à un individu de poids P sur la Terre dans son mouvement dans l'espace. Cette relation s'écrit alors :

$$\frac{dt}{dt_0} = \frac{P}{P_0} \tag{2}$$

Dans cette formule :

– t est le temps observé, compté à partir de la conception. Si x est l'âge observé à partir de la naissance, on a : $t = x + 0{,}75$, où t et x sont comptés en années ;

– t_0 est le *temps propre* ;

– P est le poids observé en kg de l'individu à partir de la naissance. Avant la naissance, le fœtus n'ayant pas de vie indépendante, le poids P est le poids de l'ensemble mère et fœtus ;

– P_0 est le *poids propre* de l'individu. On a pris arbitraitement, comme valeur de P_0, le poids à la naissance de l'individu, pour l'évolution à partir de la naissance, et le poids à la naissance de l'ensemble mère et fœtus pour la période avant la naissance. Ces poids sont exprimés en kg.

La formule (2) sert de définition au temps propre qu'on suppose être égal au temps physiologique réel.

On notera que les valeurs prises pour P_0 sont arbitraires et que par suite l'échelle des valeurs de t_0 est déterminée à un facteur multiplicatif près.

IV.4. Calcul pratique

Les données sur le poids du corps humain sont tirées d'une étude de P. Damiani [10] qui fournit le poids à partir de la conception jusqu'à l'âge de 75 ans, suivant le sexe. On trouvera, dans l'annexe 1, des précisions sur ces données.

Connaissant P et P_0 la relation (2) permet de calculer t_0.

Si on appelle t_i et t_{i+1}, P_i et P_{i+1} les temps et poids observés correspondant aux temps propres t_{0i} et $t_{0,i+1}$, la relation (2) s'écrit en première approximation :

$$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_{0i}} = \frac{1}{2}\left[\frac{P_i}{P_0} + \frac{P_{i+1}}{P_0}\right]$$

d'où :

$$\Delta t_{0i} = \frac{2P_0}{P_i + P_{i+1}} \Delta t_i \tag{3}$$

Cette formule permet de calculer Δt_{0i}. On détermine t_{0i} en supposant que l'origine du temps propre correspond à l'origine du temps observé.

Les valeurs du temps propre ainsi calculées en fonction du temps observé figurent, en annexe, dans le tableau A1, de la conception à la naissance, et dans le tableau A2, après la naissance.

V – Relation entre la mortalité et le temps

V.1. Définition du quotient propre de mortalité

Considérons une population soumise, depuis la conception, à la mortalité observée aux différents âges de la vie. Le nombre de survivants à l'âge t est noté l_t. Le taux instantané de mortalité à l'âge t a pour expression :

$$\mu_t = -\frac{1}{l_t}\frac{dl_t}{dt}$$

Le *taux propre instantané* de mortalité correspondant s'écrit :

$$\mu_{0t} = -\frac{1}{l_t}\frac{dl_t}{dt_0} = \mu_t \frac{dt}{dt_0}$$

Compte tenu de la relation (2), on a :

$$\mu_{0t} = \mu_t \frac{P}{P_0}$$

Cette formule peut s'appliquer au quotient annuel de mortalité q_t représentant la probabilité pour un individu d'âge t_t de mourir avant l'âge $t_t + 1$; elle définit le *quotient propre de mortalité* q_{0t} correspondant :

$$q_{0t} = q_t \frac{\Delta t_t}{\Delta t_{0t}}$$

Compte tenu de la relation (3), on a :

$$q_{0t} = q_t \frac{P_t + P_{t+1}}{2\,P_0} \tag{4}$$

V.2. Liaison statistique entre q_0 et le temps

On calcule par la formule (4) les quotients propres de mortalité q_{ot} correspondant aux quotients annuels de mortalité q_t de la table de mortalité par maladie 1966-1970.

On trouve expérimentalement la relation suivante :

$$-\mathrm{Log}\ q_{0t} = ct_t\ exp\ \{-\lambda t_{0t}\} \tag{5}$$

Les valeurs des coefficients c et λ sont les mêmes quel que soit le sexe. On trouve :

$$\left|\begin{array}{l} c = 12{,}8942 \\ \lambda = 1{,}130 \end{array}\right.$$

Compte tenu de la relation (4), la relation (5) s'écrit :

$$-\mathrm{Log}\ q_t = \mathrm{Log}\left(\frac{P_t + P_{t+1}}{2\,P_0}\right) + ct_t\ exp\ \{-\lambda t_{0t}\} \tag{6}$$

Pour les taux instantanés de mortalité, on aurait de même :

$$\mu_{0t} = \exp\ \{\,-\,kt\ exp\ [-\lambda t_0]\,\} \tag{7}$$

et

$$\mu_t = \frac{P_0}{P}\exp\ \{\,-\,kt\ exp\ [-\lambda t_0]\,\} \tag{8}$$

où k est une constante à déterminer.

Dans le cas de la loi de Makeham, la partie du taux instantané de mortalité représentant la mortalité biologique des adultes s'écrit :

$$\mathrm{b}\ \exp\ \{t\ \mathrm{Log}\ c\},\ \text{avec}\ c > 1.$$

Dans le cas présent, le temps t figurant dans l'exposant est corrigé par le facteur : $exp\ [-\lambda t_0]$, qui rend compte de la baisse de mortalité dans l'enfance et de l'accroissement à l'âge adulte.

V.3. Essai d'interprétation

Pour interpréter la relation obtenue, on utilise les démonstrations relatives à la répartition optimum des atomes entre niveaux quantifiés d'énergie [11].

V.3.1. Définition de l'entropie

On considère une population fermée soumise à une mortalité donnée. Chaque année, les entrées dans cette population sont constituées par un nombre de conceptions égal à l_0. Le nombre de survivants à l'âge t_{0i} est égal à l_i. Le nombre de décès entre t_{0i} et $t_{0,i+1}$ a pour valeur : $d_i = l_i - l_{i+1}$.

On a la relation : $\sum_i d_i = l_0$

La probabilité d'atteindre l'âge t_{0i} a pour valeur : $p_i = \dfrac{l_i}{l_0}$ et le quotient de mortalité à l'âge t_{0i} est : $q_{0i} = \dfrac{d_i}{l_i}$.

On appelle E_i l'énergie correspondant à l'âge t_{0i}. On suppose que l'énergie totale de la population reste constante dans le temps. Il s'ensuit que l'énergie nouvelle apportée par les conceptions est égale à l'énergie perdue par les décès dans l'année :

$$l_0 E_0 = \sum_i d_i E_i$$

Comme l_0 et E_0 sont des quantités constantes, il en est de même pour le deuxième membre de cette relation :

$$\sum_i d_i E_i = E$$

où E est une constante.

La probabilité d'avoir la distribution de décès par âge $\{ d_i \}$ a pour valeur :

$$\mathcal{P} = \frac{l_0!}{\Pi d_i!} \Pi p_i^{di}$$

La vraisemblance a pour expression :

$$\text{Log}\ \mathcal{P} = \text{Log}\ l_0! - \sum \text{Log}\ d_i! + \sum d_i\ \text{Log}\ p_i$$

On applique la formule de Stirling :

$$\text{Log}\ n! \sim n\ \text{Log}\ n - n$$

Il vient alors :

$$\text{Log}\ \mathcal{P} \sim l_0\ \text{Log}\ l_0 - l_0 - \sum (d_i\ \text{Log}\ d_i - d_i) + \sum d_i\ \text{Log}\ p_i$$
$$= l_0\ \text{Log}\ l_0 - \sum d_i\ \text{Log}\ \frac{d_i}{p_i}$$

On appelle *entropie* de la distribution la quantité :

$$S = k\ \text{Log}\ \mathcal{P} \sim S_0 - k \sum d_i\ \text{Log}\ \frac{d_i}{p_i} \tag{9}$$

où k est la constante de Boltzmann,
avec : $S_0 = k\ \text{Log}\ l_0$.

V.3.2. Répartition d'équilibre dans les niveaux d'énergie - Statistique de Maxwell-Boltzmann

Le système adopte la distribution la plus probable d'après le théorème du maximum de vraisemblance, c'est-à-dire la distribution dont l'entropie est maximum.

On cherche les valeurs de d_i telles que S est maximum avec les contraintes :

$$\begin{cases} \sum d_i = l_0 \\ \sum d_i E_i = E \end{cases}$$

En appelant α et β deux multiplicateurs de Lagrange, la solution de ce système s'obtient en annulant par rapport à d_i la dérivée de la fonction G suivante :

$$G = S + \alpha \sum d_i + \beta \sum d_i E_i$$

Or : $$\frac{\partial S}{\partial d_i} = - k \left[\operatorname{Log} \frac{d_i}{p_i} + 1 \right]$$

Il vient donc :

$$\frac{\partial G}{\partial d_i} = - k \left[\operatorname{Log} \frac{d_i}{p_i} + 1 \right] + \alpha + \beta E_i = 0$$

d'où : $$\operatorname{Log} \frac{d_i}{p_i} = \frac{\alpha}{k} - 1 + \frac{\beta}{k} E_i$$

En remplaçant p_i par sa valeur, on obtient :

$$\operatorname{Log} q_{0i} = K + \frac{\beta}{k} E_i \tag{10}$$

avec : $$K = \frac{\alpha}{k} - 1 - \operatorname{Log} l_0$$

On en déduit la valeur maximum de l'entropie :

$$S_m = S_0 - k \sum d_i \left[\frac{\alpha}{k} - 1 + \frac{\beta}{k} E_i \right]$$

d'où : $S_m = S_1 - \beta E$

avec : $S_1 = S_0 - (\alpha - k)\, l_0$

V.3.3. Application

On peut admettre que l'énergie élémentaire dépensée par un individu à l'âge t_{0i} est égal à $\frac{P}{P_0}$, à un facteur de proportionnalité près. Le niveau d'énergie E_i atteint à l'âge t_{0i} sera donc égal à :

$$E_i = \int_0^{t_{0i}} \frac{P}{P_0}\, dt_0$$

D'après la relation (2), on a :

$$E_i = \int_0^{t_i} dt = t_i \tag{11}$$

La relation (10) s'écrit alors :

$$\operatorname{Log} q_{0i} = K + \frac{\beta}{k} t_i$$

On retrouve l'équation (5), en prenant pour β une expression de la forme :

$$\beta = A \; exp \; \{-\lambda t_{0i}\} \tag{12}$$

où A est une constante.

Le paramètre β est un facteur correctif représentant l'amoindrissement de l'énergie avec l'âge.

On a d'autre part :

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E}$$

On remarquera que, dans le cas de la répartition des atomes dans différents niveaux d'énergie, d'après la statistique de Maxwell-Boltzmann, on trouve :

$$\beta = \frac{B}{T} \tag{13}$$

où B est une constante et T la température absolue.

VI – Lois du temps, du poids et du quotient de mortalité

VI.1. Expression théorique des lois

A partir des résultats obtenus, on a essayé d'ajuster des lois donnant, en fonction du temps propre, les valeurs observées du temps, du poids et du quotient de mortalité.

Après plusieurs essais, on a adopté pour représenter le temps observé une somme de trois exponentielles d'exposant imaginaire ou plus précisément le produit d'une exponentielle par la somme de trois sinusoïdes. Le temps observé est donc de la forme :

$$t = exp \; \{rt_0\} \sum_{j=1}^{3} a_j \sin \omega_j t_0 \tag{14}$$

La relation (2) permet d'en déduire l'expression de $\frac{P}{P_0}$:

$$\frac{P}{P_0} = exp \; \{rt_0\} \sum_{j=1}^{3} a'_j \sin (\omega_j t_0 + \theta_j) \tag{15}$$

où : $a'_j = a_j \sqrt{\omega_j^2 + r^2}$

$tg\theta_j = \frac{\omega_j}{r}$

L'expression du quotient de mortalité s'obtient en remplaçant, dans la formule (6), t et $\frac{P}{P_0}$ par leurs expressions tirées de (14) et (15).

VI.2. Valeurs des paramètres

On trouvera, dans l'annexe 2, des indications sur la méthode de calcul des paramètres de ces lois.

Les valeurs des paramètres sont les suivantes :

– *pour les deux sexes :*

$$r = 0{,}676$$

$$\omega_1 = \frac{\Pi}{8} , \; \omega_2 = \frac{3\Pi}{8} , \; \omega_3 = \frac{6\Pi}{8}$$

d'où les valeurs des angles θ_j en degrés décimaux :

$$\theta_1 = 30{,}153 \quad ; \theta_2 = 73{,}992 \quad ; \theta_3 = 60{,}153$$

– *pour le sexe masculin :*

$$a_{1M} = 1{,}7341 \quad ; a_{2M} = -0{,}0694 \quad ; a_{3M} = -0{,}0416$$

d'où :

$$a'_{1M} = 1{,}3557 \quad ; a'_{2M} = -0{,}0942 \quad ; a'_{3M} = -0{,}1020$$

– *pour le sexe féminin,* on trouve que les coefficients a_{jF} sont proportionnels aux coefficients a_{jM} :

$$a_{jF} = \gamma a_{jM} \quad , \text{avec : } \gamma = 1{,}07$$

d'où :

$$a'_{jF} = \gamma \, a'_{jM}$$

On en déduit que le temps et le poids du sexe féminin sont proportionnels à ceux du sexe masculin avec le même coefficient de proportionnalité :

$$t_F = \gamma \, t_M \tag{16}$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)_F = \gamma \left(\frac{P}{P_0}\right)_M \tag{17}$$

Les valeurs du temps, du poids et du quotient de mortalité, par sexe, calculées par ces formules, figurent dans le tableau 1. On a indiqué les valeurs des quotients de mortalité observés, tirés de la table de mortalité par maladie 1966-1970 de l'I.N.S.E.E., correspondant aux valeurs de t calculées. Le graphique 1 montre l'évolution du temps observé calculé en fonction du temps propre.

TABLEAU 1

Temps, poids et quotient de mortalité, suivant le sexe, en fonction du temps propre

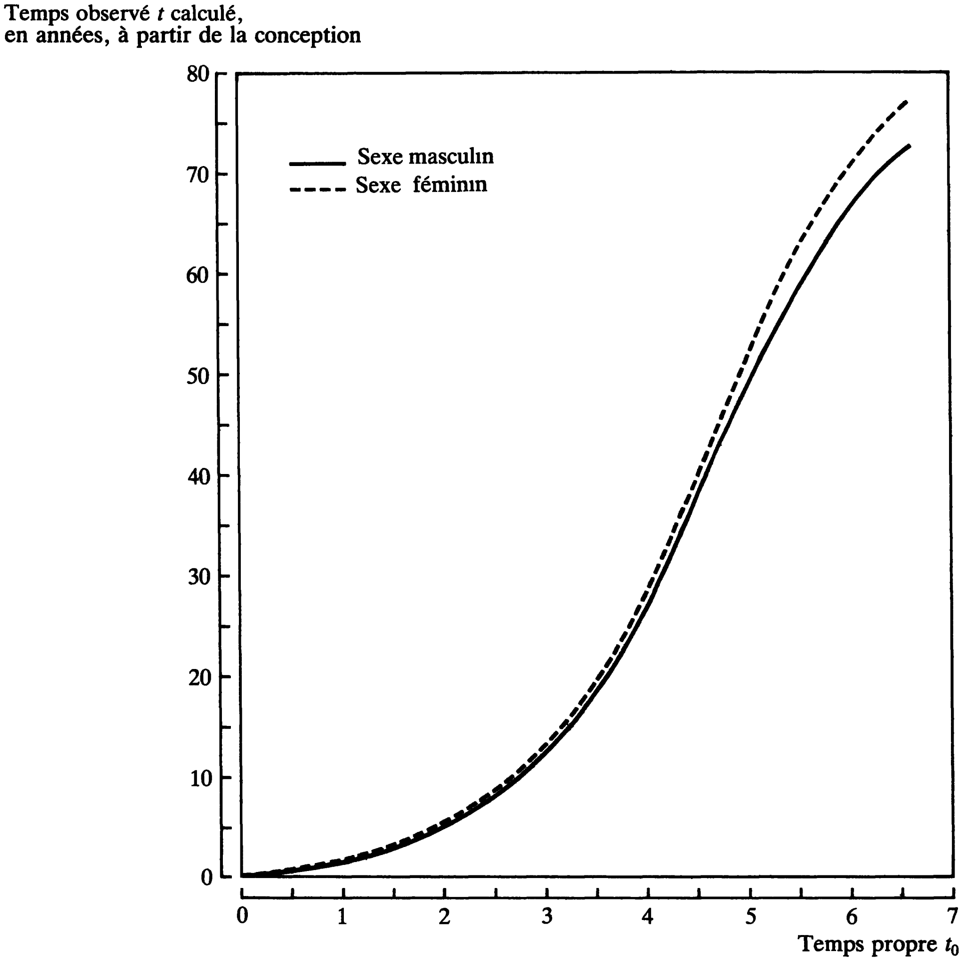
(Valeurs calculées par les formules proposées dans cette étude)

Temps propre t_0	Temps observé calculé (1) t	Poids calculé $\frac{P}{P_0}$	Quotient annuel de mortalité p. 100 000	
			calculé q	observé (2) q_{obs}
		Sexe masculin		
0	0	0,501	83 147	...
0,5	0,366	1,036	4 050	...
1	1,121	2,070	361	...
2	4,711	5,269	32	34
2,5	7,827	7,285	33	23
3	12,152	10,242	48	20
3,5	18,326	14,687	72	43
4	26,943	19,677	115	71
4,5	37,640	22,431	222	203
5	48,700	21,015	528	644
5,5	58,166	16,712	1 355	1 594
6	65,570	13,187	2 999	3 123
6,5	71,206	8,335	11 124	5 027
		Sexe féminin		
0	0	0,536	80 714	...
0,5	0,392	1,109	3 150	...
1	1,199	2,214	246	...
1,5	2,688	3,801	41	56
2	5,041	5,638	19	26
2,5	8,375	7,795	20	18
3	13,003	10,959	31	17
3,5	19,609	15,716	49	33
4	28,829	21,055	82	57
4,5	40,275	24,001	168	158
5	52,109	22,486	423	446
5,5	62,238	17,882	1 139	1 014
6	70,160	14,110	2 615	2 291
6,5	76,190	8,919	9 552	4 525

1. En années à partir de la conception.
2. D'après la table de mortalité par maladie 1966-1970, I.N.S.E.E.

GRAPHIQUE 1

Temps observé calculé en fonction du temps propre



VI.3. *Âge maximum, âge limite*

Âge maximum

Le poids $\frac{P}{P_0}$ s'annule pour une valeur de t_0 égale à 6,71 quel que soit le sexe. A cette valeur correspond un maximum du temps : t_{max} égal à 72,44 pour le sexe masculin et à 77,51 pour le sexe féminin (âge compté à partir de la conception).

Âge limite

Il existe une valeur limite t_{lim} du temps c'est-à-dire de l'âge au-delà duquel la vie n'est plus possible. Comme la vie indépendante de l'individu commence à $t = 0,75$, on peut supposer que cet âge limite a pour expression :

$$t_{lim} = t_{max} - 0,75 \tag{18}$$

La valeur de l'âge limite, comptée à partir de la conception, est de 71,69 pour le sexe masculin et de 76,76 pour le sexe féminin.

On remarquera que les âges limites ainsi trouvés sont inférieurs aux âges limites des tables de mortalité construites d'après les observations et qui sont de 100 ans et même de 105 ans. D'après l'hypothèse adoptée dans cette étude, ces tables de mortalité tiennent compte des évolutions différentes de poids constatées dans la population. La table définie ici se rapporte à une évolution moyenne du poids et correspond donc à une vie moyenne; l'âge limite ainsi trouvé doit plutôt être rapproché de l'espérance de vie de la population générale qui, pour la période 1966-1970 et pour la mortalité par maladie seule, est égale à 69,6 ans pour le sexe masculin et 76,1 ans pour le sexe féminin.

VI.4. *Commentaires*

Étant donné les erreurs d'observation non négligeables sur les poids qui sont les données de base de l'étude, les résultats obtenus doivent être considérés comme des approximations des valeurs réelles.

Il n'y a pas, pour le moment, de justification à la forme des lois adoptées.

VII — Conclusion

Dans une première partie de cette étude, on a défini un temps propre représentant le temps physiologique et on a trouvé une liaison statistique entre le quotient de mortalité relatif à ce temps propre et le temps observé. Les variations du temps propre en fonction du temps observé ainsi que la relation trouvée sont des résultats expérimentaux découlant des observations. On a justifié, ensuite, l'expression de cette liaison statistique.

Dans une deuxième partie, on a proposé des lois représentant le temps, le poids et le quotient de mortalité observés en fonction du temps propre. Ces lois ont été établies expérimentalement sans justification théorique contrairement à la relation trouvée précédemment. Il reste donc à compléter cette étude par la démonstration des lois proposées.

Annexes

A.1 — Données sur le poids du corps humain

Il n'existe pas d'enquête générale permettant de suivre, en France, l'évolution du poids du corps humain avec l'âge. L'étude de P. Damiani [10] est une synthèse des principales sources disponibles en France et aux États-Unis : dictionnaires Larousse pour le poids des fœtus et de la première enfance; enquêtes sur la taille et le poids des écoliers réalisées, en France, en 1950, par M. Aubenque et P. Thionet [12] et, en 1955, par M. Aubenque, J. Desabie et L. Deruffe [13]; enquêtes du National Center for Health Statistics entre 1960 et 1970 aux États-Unis [14].

Il convient de signaler que, par la suite, ont été publiés par A. Charraud et H. Valdelièvre des données sur le poids des adultes tirées de l'enquête sur la santé et la consommation médicale réalisée par l'I.N.S.E.E. et le C.R.E.D.O.C. en 1970 [15]. Les renseignements ainsi obtenus sont compatibles avec les données précédentes.

On a donc retenu, pour cette étude, les tables de poids établis par P. Damiani. Compte tenu des conditions dans lesquelles ont été établies ces tables, on doit considérer ces données comme des valeurs approchées.

Dans le tableau A1, figure le poids du fœtus suivant le mois de gestation, auquel on a ajouté le poids de la mère à la naissance, soit 54 kg. Le poids du corps humain, à partir de la naissance jusqu'à 75 ans, se trouve dans le tableau A2. Ces données sont fournies par sexe.

TABLEAU A.1

Calcul du temps propre de la conception à la naissance

Temps observé t_i		Poids P_i (en kg) (1)		Δt_{0i}		Temps propre t_0	
En mois	En années	Sexe masculin	Sexe féminin	Sexe masculin	Sexe féminin	Sexe masculin	Sexe féminin
0	0	54,000	54,000	0,0833	0,0833	0	0
1	0,0833	54,002	54,002	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833
2	0,1667	54,011	54,011	0,0833	0,0833	0,1666	0,1666
3	0,2500	54,066	54,066	0,0831	0,0831	0,2499	0,2499
4	0,3333	54,220	54,220	0,0827	0,0827	0,3330	0,3330
5	0,4167	54,560	54,560	0,0820	0,0820	0,4157	0,4157
6	0,5000	55,150	55,150	0,0811	0,0812	0,4977	0,4977
7	0,5833	55,800	55,700	0,0802	0,0804	0,5788	0,5789
8	0,6667	56,500	56,320	0,0790	0,0793	0,6590	0,6593
9	0,7500	57,400	57,200	///	///	0,7380	0,7386

1. Poids de la mère (54 kg) et du fœtus.

TABLEAU A2

Calcul du temps propre après la naissance

Temps observé t_i (1) (en années)	Poids P_i (en kg)		Δt_{0i}		Temps propre t_0 (2)	
	Sexe masculin	Sexe féminin	Sexe masculin	Sexe féminin	Sexe masculin	Sexe féminin
0,75	3,4	3,2	0,5000	0,4961	0,7380	0,7386
1,75	10,2	9,7	0,2969	0,2922	1,2380	1,2347
2,75	12,7	12,2	0,2482	0,2424	1,5349	1,5269
3,75	14,7	14,2	0,2179	0,2119	1,7831	1,7693
4,75	16,5	16,0	0,1971	0,1893	2,0010	1,9812
5,75	18,0	17,8	0,1766	0,1684	2,1981	2,1705
6,75	20,5	20,2	0,1563	0,1495	2,3747	2,3389
7,75	23,0	22,6	0,1402	0,1345	2,5310	2,4884
8,75	25,5	25,0	0,1271	0,1212	2,6712	2,6229
9,75	28,0	27,8	0,1160	0,1100	2,7983	2,7441
10,75	30,6	30,4	0,1062	0,0982	2,9143	2,8541
11,75	33,4	34,8	0,0962	0,0865	3,0205	2,9523
12,75	37,3	39,2	0,0858	0,0767	3,1167	3,0388
13,75	42,0	44,2	0,0767	0,0694	3,2025	3,1155
14,75	46,6	48,0	0,0698	0,0653	3,2792	3,1849
15,75	50,8	50,0	0,0648	0,0631	3,3490	3,2502
16,75	54,2	51,5	0,0610	0,0615	3,4138	3,3133
17,75	57,2	52,5	0,0583	0,0607	3,4748	3,3748
18,75	59,5	53,0	0,0563	0,0601	3,5331	3,4355
19,75	61,2	53,5	0,0548	0,0595	3,5894	3,4956
20,75	62,8	54,0	0,2619	0,2930	3,6442	3,5551
25,75	67,0	55,2	0,2500	0,2878	3,9061	3,8481
30,75	69,0	56,0	0,2462	0,2832	4,1561	4,1359
35,75	69,1	57,0	0,2458	0,2783	4,4023	4,4191
40,75	69,2	58,0	0,2457	0,2744	4,6481	4,6974
45,75	69,2	58,6	0,2457	0,2721	4,8938	4,9718
50,75	69,2	59,0	0,2471	0,2698	5,1395	5,2439
55,75	68,4	59,6	0,2511	0,2676	5,3866	5,5137
60,75	67,0	60,0	0,2560	0,2676	5,6377	5,7813
65,75	65,8	59,6	0,2613	0,2698	5,8937	6,0489
70,75	64,3	59,0	0,2688	0,2759	6,1550	6,3187
75,75	62,2	57,0	///	///	6,4238	6,5946

1. Calculé à partir de la conception.
2. Se reporter au tableau A1, pour les valeurs de t_0 avant la naissance.

A.2. Ajustement des lois des variables observées

A.2.1. Ajustement du poids et du temps observés

On a choisi d'ajuster une loi du poids observé en fonction du temps propre car les données sur le poids sont les données de base de l'étude. On a d'abord fait cet ajustement pour le sexe masculin.

Pour une valeur donnée de r, on détermine la valeur de ω_1 qui donne le meilleur ajustement pour le modèle :

$$z = \frac{P}{P_0} \exp \{-rt_0\} = a_1' \sin (\omega_1 t_0 + \theta_1) + z_1$$

avec : $tg\, \theta_1 = \frac{\omega_1}{r}$

On trouve ainsi $r = 0{,}676$ et une valeur de ω_1 voisine de $\frac{\Pi}{8}$. On prend $\omega_1 = \frac{\Pi}{8}$.

On détermine ω_2 et ω_3, en ajustant successivement :

$$z_1 = a_2' \sin (\omega_2 t_0 + \theta_2) + z_2$$

et :

$$z_2 = a_3' \sin (\omega_3 t_0 + \theta_3) + z_3$$

avec :

$$tg\theta_2 = \frac{\omega_2}{r} \quad , \; tg\theta_3 = \frac{\omega_3}{r}$$

En choisissant pour ω_2 et ω_3 des multiples de ω_1, on trouve :

$$\omega_2 = \frac{3\Pi}{8} \quad , \; \omega_3 = \frac{6\Pi}{8}$$

Pour le sexe féminin, on applique la même méthode. Les valeurs ainsi trouvées pour les paramètres r et ω_j étant très voisines des valeurs précédentes, on conserve, pour le sexe féminin, les valeurs obtenues pour le sexe masculin.

On calcule les coefficients a_j correspondants, par la relation :

$$a_j = \frac{a_j'}{\sqrt{\omega_j^2 + r^2}}$$

A.2.2. Ajustement du quotient de mortalité

La relation (5) permet d'écrire :

$$-\operatorname{Log} q_0 = c \exp \{(r-\lambda)t_0\} \sum_j a_j \sin \omega_j t_0$$

En posant :

$$u = [-\operatorname{Log} q_0] \exp \{(\lambda - r)t_0\}$$

on a :

$$u = c \sum_j a_j \sin \omega_j\, t_0 \tag{19}$$

On conserve pour r et ω_j les valeurs trouvées précédemment. On prend pour c et λ les valeurs obtenues par ajustement de la relation (5).