Journal de la société statistique de Paris

Paul Damiani

# Distances des planètes au soleil : recherche d'une loi

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 124, nº 2 (1983), p. 129-133
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1983__124_2_129_0>

© Société de statistique de Paris, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# DISTANCES DES PLANÈTES AU SOLEIL : RECHERCHE D'UNE LOI

Paul Damiani
*Administrateur de l'INSEE,*
*Secrétaire général des Sociétés de statistique de Paris et de France*

*L'auteur propose une loi donnant la distance d'une planète au soleil en fonction de son rang de classement, les planètes étant classées suivant la distance croissante au soleil. Cette loi remplace la loi de Titius Bode qui ne donne pas de résultats acceptables pour les planètes les plus éloignées. On a trouvé qu'il était nécessaire de supposer l'existence d'une planète entre le soleil et Mercure; cette planète avait déjà été prévue par Le Verrier qui l'avait appelée Vulcain. On peut également calculer, avec cette formule, les distances des planètes situées au-delà de Pluton, si elles existent.*

*We propose a law giving the distance from a planet to the Sun according to its ordering number, planets being classified according increasing distance to the Sun. This law replaces Titius-Bode law, the results of which are not satisfying for the farthest planets. We find it necessary to suppose a new planet between the Sun and Mercury; planet that was already presumed by Le Verrier who named it Vulcan. We can also assess, with this formula, the distances to the Sun of hypothetical planets beyond Pluto.*

## Introduction

Le problème est de déterminer une loi donnant la distance au Soleil d'une planète en fonction de son rang de classement, les planètes étant classées suivant la distance croissante au Soleil.

La loi de Titius-Bode trouvée au XVIII$^{e}$ siècle fournit de bons résultats jusqu'à la planète Uranus, mais elle ne convient pas pour les planètes suivantes.

On propose, dans cette étude, une nouvelle loi expérimentale s'appliquant à toutes les planètes connues. De l'application de cette loi, on tire un certain nombre de conclusions intéressantes.

## Données générales

### *Historique*

On connaît depuis l'Antiquité les cinq planètes visibles à l'œil nu, qui sont, d'après la distance croissante au Soleil : Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne.

Herschel découvrit Uranus, en 1781, au-delà de Saturne.

Pour expliquer les perturbations du mouvement d'Uranus, Le Verrier fut amené en 1846 à envisager l'existence d'une nouvelle planète au-delà d'Uranus. En suivant les indications données par Le Verrier, Galle découvrit cette planète qui fut appelée Neptune. L'existence de cette planète avait également été prédite par Adams.

En 1915, Lowell publia des calculs prévoyant la présence d'une planète après Neptune. Cette planète fut découverte en 1930 par Tombaugh et fut appelée Pluton.

Journal de la Société de statistique de Paris, tome 124, n° 2, 1983

Il convient de remarquer que, pour expliquer les anomalies du mouvement de Mercure, Le Verrier avait été amené à prévoir l'existence d'une planète entre le Soleil et Mercure, qu'il avait nommée Vulcain. Mais cette hypothèse n'a jamais été vérifiée par l'expérience.

### *Loi de Titius Bode*

Il s'agit d'une loi expérimentale reconnue en 1741 par Wolf, confirmée en 1772 par Titius et publiée en 1778 par Bode.

Ces astronomes ont constaté que pour les planètes qu'ils connaissaient, à partir de Vénus, les distances au Soleil suivaient une progression géométrique de raison 2.

L'application de cette loi a montré qu'il fallait prévoir, entre Mars et Jupiter, l'existence d'une planète. A la distance indiquée par la loi, les astronomes ont découvert non pas une planète mais plusieurs milliers de petits corps appelés Petites planètes ou Astéroïdes. Parmi ceux-ci, on peut citer Cérès découvert en 1801 par Piazzi, puis Pallas (1802), Junon (1804) et Vesta (1807).

Dans le tableau 1, on a classé les planètes, y compris les Astéroïdes, suivant leur distance croissante au Soleil. Si on appelle $j$ le rang de classement d'une planète et $x_j$ sa distance au Soleil, mesurée par le demi grand axe de l'orbite, la loi de Titius-Bode s'écrit :

$$x_j = a + b\,2^{j-2}$$

avec : $a = 0{,}4$, $b = 0{,}3$
et où $x_j$ est exprimée en unités astronomiques (l'unité de mesure étant la distance moyenne Terre-Soleil).

Cette loi donne de bons résultats pour les planètes de Vénus à Uranus. Elle fournit la distance de Mercure au Soleil, si dans la formule on remplace $j$ par $-\infty$. Les valeurs calculées s'écartent tout à fait des valeurs observées pour Neptune et Pluton.

TABLEAU 1

*Distance observée des planètes au soleil et distance calculée par la loi de Titius-Bode*

| Planètes | $j$ | Distance au Soleil $x_j$ (1) | |
|---|---|---|---|
| | | observée | calculée (2) |
| Mercure | 1 | 0,387 | 0,4 |
| Vénus | 2 | 0,723 | 0,7 |
| Terre | 3 | 1 | 1 |
| Mars | 4 | 1,524 | 1,6 |
| Astéroïdes | 5 | | 2,8 |
| Jupiter | 6 | 5,203 | 5,2 |
| Saturne | 7 | 9,539 | 10,0 |
| Uranus | 8 | 19,182 | 19,6 |
| Neptune | 9 | 30,058 | 38,8 |
| Pluton | 10 | 39,440 | 77,2 |

1 Demi grand axe en unités astronomiques U A (l'unité de mesure étant la distance moyenne Terre Soleil), d'après l'Encyclopédie d'astronomie de Cambridge, adaptation française

2 Distance calculée par la loi de Titius Bode (pour Mercure, on prend $j = -\infty$)

## RECHERCHE D'UNE LOI DES DISTANCES

Après plusieurs essais, on a choisi comme loi des distances des planètes au Soleil en fonction du rang de classement, le produit d'une exponentielle par une somme de sinusoïdes.

### *Existence de Vulcain*

On constate que, pour avoir un bon ajustement, il est nécessaire de prévoir l'existence d'une planète entre le Soleil et Mercure. On retrouve l'hypothèse faite par Le Verrier. Cette planète hypothétique, que nous appellerons Vulcain, pour reprendre le nom proposé par cet astronome, pourrait être constituée d'un ensemble d'astéroïdes analogues à ceux situés entre Mars et Jupiter.

Avec cette hypothèse, le rang $n$ de classement des différentes planètes est le suivant : Vulcain, 1; Mercure, 2; Vénus, 3; Terre, 4; Mars, 5; Astéroïdes, 6; Jupiter, 7; Saturne, 8; Uranus, 9; Neptune, 10; Pluton, 11.

### *Loi des distances*

On trouve, pour la distance $x_n$ de la planète $n$ au Soleil, la loi suivante :

$$x_n = e^{rn} \left\{a_1 \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \omega_1 + a_2 \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \omega_2\right\} \tag{1}$$

avec :

$$r = 0{,}422$$

$$\omega_1 = \frac{2\Pi}{40}\ ,\ \omega_2 = \frac{11\Pi}{40}$$

$$a_1 = 0{,}36\ ,\ a_2 = 0{,}08$$

Les détails de la méthode d'ajustement sont indiqués en annexe.

Les distances calculées par cette formule figurent dans le tableau 2. On constate que les différences relatives entre les valeurs calculées et les valeurs observées sont inférieures, en valeur absolue, à 7 %.

TABLEAU 2

*Distance observée des planètes au soleil et distance calculée par la loi*

| Planètes | Numéro d'ordre n | Distance au Soleil [1] | |
|---|---|---|---|
| | | observée | calculée |
| Vulcain | 1 | | 0,094 |
| Mercure | 2 | 0,387 | 0,375 |
| Vénus | 3 | 0,723 | 0,725 |
| Terre | 4 | 1 | 1,068 |
| Mars | 5 | 1,524 | 1,481 |
| Astéroïdes | 6 | | 2,438 |
| Jupiter | 7 | 5,203 | 4,938 |
| Saturne | 8 | 9,539 | 10,186 |
| Uranus | 9 | 19,182 | 18,730 |
| Neptune | 10 | 30,058 | 29,523 |
| Pluton | 11 | 39,440 | 40,108 |
| X | 12 | | 49,201 |

1 En unités astronomiques

### *Applications*

#### *1. Distance de certaines planètes*

En appliquant la formule trouvée, on trouve pour Vulcain une distance au Soleil égale à 0,094.

On peut également extrapoler les résultats pour estimer la distance de planètes situées après Pluton. On trouve que la première planète X après Pluton, si elle existe, est à une distance égale à 49,2 environ.

*2. Loi des périodes*

Si on appelle $T_n$ la période de révolution autour du Soleil de la planète $n$, on a d'après la 3ᵉ loi de Kepler :

$$T_n^2 = x_n^3 \qquad (2)$$

en prenant comme unités les valeurs correspondantes pour la Terre de la distance au Soleil et de la période de révolution. Il s'agit d'une formule approchée obtenue en négligeant la masse des planètes par rapport à celle du Soleil.

A partir de la formule (1), la formule (2) permet de déduire la loi des périodes.

*Validité des résultats*

Il convient de noter, tout d'abord, que le modèle utilisé a été adopté sans justification théorique et que d'autres modèles auraient pu être choisis.

Ce modèle étant admis, il faut souligner que le petit nombre de données ne permet pas de fixer de façon rigoureuse les valeurs du coefficient $r$ et des angles $\omega_1$ et $\omega_2$. Les valeurs proposées pour ces paramètres sont donc des valeurs approchées.

## CONCLUSION

On a montré, dans cet article, qu'il était possible de trouver une loi relativement simple permettant de calculer la distance d'une planète au Soleil, suivant le rang de classement de cette planète. Cette étude est un essai et les résultats obtenus peuvent sûrement être améliorés. En cherchant cette loi, on a été amené à reprendre l'hypothèse de Le Verrier de l'existence d'une planète entre le Soleil et Mercure. La loi proposée permet également de prévoir la distance au Soleil des planètes au-delà de Pluton, si elles existent.

## ANNEXE

### MÉTHODE D'AJUSTEMENT

On a constaté, après plusieurs essais, que les valeurs de la fonction :

$$y_n = x_n e^{rn}$$

pour une valeur donnée de $r$, pouvaient être représentées par une somme de sinusoïdes.

On a alors ajusté, pour différentes valeurs de $r$, une première régression :

$$y_n = a_1 \sin n\omega_1 + a'_1 \cos n\omega_1 + e_n$$

puis, sur les écarts $e_n$, une deuxième régression :

$$e_n = a_2 \sin n\,\omega_2 + a'_2 \cos n\omega_2 + f_n$$

On a trouvé que l'ajustement était meilleur en supposant l'existence d'une planète entre le Soleil et Mercure et que les équations de régression pouvaient se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} y_n = a_1 \sin\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\omega_1 + e_n \\[2mm] e_n = a_2 \sin\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\omega_2 + f_n \end{cases}$$

Pour différentes valeurs de $r$, on a déterminé les valeurs de $\omega_1$ et $\omega_2$ en ajustant ces deux nouvelles régressions. Pour simplifier, on a pris pour $\omega_1$ et $\omega_2$ des expressions de la forme :

$\omega_1 = 2\pi/k_1$, $\omega_2 = \pi k_2/k_1$, où $k_1$ et $k_2$ sont des entiers.

Pour chaque groupe de valeurs $r$, $\omega_1$ et $\omega_2$ ainsi trouvées, on a ajusté ensuite le modèle de régression à deux variables :

$$y_n = a_1 \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega_1 + a_2 \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega_2 + g_n$$

On a conservé la valeur des paramètres pour laquelle la part de la variance expliquée est maximale. On remarque que, pour d'autres groupes de valeurs des paramètres, on trouve des ajustements presque aussi satisfaisants.

Les calculs ont été réalisés avec 5 décimales. Les valeurs proposées pour les paramètres ont été arrondies.

## RÉFÉRENCES

FLAMMARION Camille. – *Astronomie populaire.* Édition refaite sous la direction de Gabrielle Camille FLAMMARION et André DANJON. Flammarion, 1955.

HOYLE Fred. – *Astronomy and cosmology.* W.H. FREEMAN and Co. San Francisco, U.S.A., 1975.

LEQUEUX James. – *Planètes et satellites.* Que sais-je? n° 383. P.U.F., 1964.

*Atlas d'astronomie.* Édition française, Stock, 1976.

*Encyclopédie d'astronomie de Cambridge.* Supervisée par Simon MITTON et Jean AUDOUZE. Éditions du Fanal, 1980.

*Grand Larousse encyclopédique.* 10 volumes. Larousse, 1964.