Journal de la société statistique de Paris

Prix du statisticien d'expression française. Ambiguïtés de jargon et de fond dans le domaine des probabilités

Journal de la société statistique de Paris, tome 120, n° 2 (1979), p. 70-76
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1979__120_2_70_0>

I

PRIX DU STATISTICIEN D'EXPRESSION FRANÇAISE

Le prix du statisticien d'expression française, créé en 1975, a été conçu de la façon suivante. Il est décerné une année à un étranger de grande renommée, une deuxième année à un « jeune » statisticien français ou étranger, une troisième année à un statisticien français confirmé.

Les lauréats ont été :

— pour 1975, Robert A. HORVATH, professeur-docteur, Université de Szeged, Hongrie,
— pour 1976, Michel LEVY, administrateur de l'I. N. S. E. E. (Institut national de la statistique et des études économiques), chef du service de diffusion de l'I. N. E. D. (Institut national d'études démographiques),
— pour 1977, Louis HENRY, conseiller scientifique de l'I. N. E. D. (Institut national d'études démographiques),
— pour 1978, Bruno de FINETTI, professeur honoraire de calcul des probabilités à l'Université de Rome, Institut mathématique Guido Castelnuovo.

Monsieur le Professeur, Messieurs les Présidents, Mesdames et Messieurs, Chers collègues,

Laissez-moi vous dire, Monsieur le Professeur, combien le tout frais président que je suis se sent ému à l'idée de remettre le prix du Statisticien d'expression française à l'illustre savant que vous êtes. Vous honorez les Sociétés de statistique de Paris et de France en les laissant vous honorer, en les laissant honorer un des statisticiens probabilistes les plus prestigieux de sa génération, en les laissant honorer un éminent représentant de la science italienne, sœur s'il en est de la science française.

C'est bien sûr l'ancien professeur de la Faculté de calcul des probabilités de l'Université de Rome que nous honorons ce soir, dont l'œuvre se situe dans le concert glorieux de celles de Castelnuovo, de Cantelli et de Corrado Gini. Vous avez maintenu bien haute avec ces personnages illustres, dont les noms sont bien connus de vos collègues ici présents, la tradition italienne à son plus haut niveau dans les différents domaines de la statistique.

Il ne m'appartient guère, moi qui ne suis qu'un amateur en calcul des probabilités et qui n'ai pas eu la persévérance de prolonger des premiers pas mal assurés sur ce terrain, de rappeler l'œuvre étendue qui fut la vôtre au cours d'une carrière qui vous a conduit aux honneurs universitaires les plus grands. Si, en tant que professeur, vous avez bien sûr touché à tous les secteurs du calcul des probabilités, je me dois de dire brièvement que vous avez attaché votre nom au concept de probabilité subjective.

Ce fut en effet la grande idée qui vous a animé durant de nombreuses années et à laquelle vous avez attaché votre patronyme. Le professeur Frechet, qui était votre ami, aimait à dire à quel point il appréciait votre démarche de subjectiviste convaincu, qui admet que deux observateurs d'un même phénomène puissent attacher des jeux de probabilités subjectives différents aux diverses éventualités possibles et par conséquent des probabilités a posteriori différentes.

Les conférences, que vous avez données à l'Institut Henri Poincaré, il y a quarante ans déjà, ont été accueillies en France comme porteurs d'idées à la fois extrêmement riches et originales. Et vous savez en quelle estime vous tenait les regrettés Darmois et Frechet. Le grand Savage avait reconnu en vous l'un des esprits les plus fins de notre époque. Lui qui aimait passer l'été non seulement sous le ciel de votre Italie magnifique mais surtout auprès de vous dans le commerce de votre amitié et de votre esprit, passe auprès de la communauté scientifique comme l'homme de synthèse de trois grands noms : Ranusci, Von Neumann et de Finetti. Sa théorie de la décision vous doit énormément. Rappellerai-je ce titre étonnant que vous avez donné d'un ouvrage commun avec Savage, teinté de l'humour italien et anglo-saxon à la fois : « *How to Gamble, if you must* ».

Quel honneur pour la langue française que vous l'ayez utilisée pour publier une bonne part de votre œuvre ! Car depuis les conférences de l'Institut Henri Poincaré, publiées dans les Annales de l'Institut, vous avez, à de nombreuses reprises, utilisé avec maîtrise, élégance, clarté et concision le support de notre langue pour transmettre votre pensée. Soyez-en remercié, Monsieur le Professeur.

Il me plait encore, si vous me le permettez, Monsieur le Professeur, de rappeler que votre œuvre ne se limite pas aux réflexions théoriques sur l'essence même des probabilités mais, que vous avez pris plaisir à confronter théorie et vie concrète. En particulier votre étude attentive des joueurs du Totocalcio, qui a servi à former tant de générations d'étudiants, reste un modèle du genre. Vous avez eu le souci, pédagogique s'il en est, d'apprendre aux individus à apprécier leurs probabilités subjectives, et à adapter des comportements cohérents en univers incertain, compte tenu de l'idée qu'ils se faisaient des phénomènes qu'ils étudiaient. Vos expériences diverses sur les comportements rationnels témoignent de ce souci de confronter le raisonnement logique et les faits concrets.

Bien d'autres que moi auraient dû être ce soir les interprètes de la Société pour rappeler vos immenses mérites, qu'il s'agisse de Daniel Dugué, de Gaston Morlat, de Georges Guilbaud, des regrettés Frechet et Darmois. Ils auraient également défini l'homme et l'ami, l'esprit ouvert sur le monde dont la finesse subjugue, dont l'anticonformisme séduit, dont la pensée ne laisse pas indifférent. Car si vos thèses ont maintenant acquis une place prestigieuse dans la science probabiliste, il est sûr que vous avez dérangé plus d'un confort intellectuel et que vous avez dû lutter pour leur diffusion.

C'est en même temps à l'homme et au savant que va ce prix qui vous honore mais qui, je vous l'ai dit, nous honore aussi.

C'est pour moi une joie immense que de vous le remettre. Je regrette seulement qu'il ne vous ait pas été possible de corriger notre météorologie parisienne de ses fluctuations saisonnières. C'est le froid et la neige qui vous ont accueilli à Paris. Sachez combien chaude est notre reconnaissance de vous avoir parmi nous ce soir, de nous donner dans quelques instants le plaisir de vous entendre à nouveau sur le beau sujet que vous avez choisi. Recevez, Monsieur le Professeur, ce prix du Statisticien d'expression française 1978.

Gérard Calot
président des Sociétés de statistique de Paris et de France

AMBIGUITÉS DE JARGON ET DE FOND DANS LE DOMAINE DES PROBABILITÉS

Bruno de FINETTI

professeur honoraire de calcul des probabilités à l'Université de Rome, Institut Mathématique Guido Castelnuovo

Mesdames, Messieurs,

J'ai beaucoup apprécié l'invitation des Sociétés de Statistique de Paris et de France et l'intérêt qu'elle indique pour mes efforts visant à présenter et développer la théorie des probabilités comme « le bon sens réduit au calcul ». Cette définition est une des nombreuses sentences efficaces et essentielles dont sont particulièrement riches les ouvrages des probabilistes français.

De plus, la période et le lieu de cette rencontre ont bien une signification pour moi. En effet, il s'est écoulé exactement un demi siècle depuis le Congrès International des Mathématiciens de Bologna, en 1928, où j'avais exposé (en aperçu, pour la première fois) mes idées sur la probabilité, conçue et développée proprement comme la théorie du « bon sens réduit au calcul ».

Et, pour ce qui est du lieu, Paris ! c'est ici que l'on m'a donné l'occasion et l'honneur de présenter un premier exposé suffisamment achevé de mon point de vue dans une suite de leçons à l'Institut Henri Poincaré, 1935, et d'y revenir maintes fois pour des rencontres toujours stimulantes, ainsi que celles avec des collègues français en visite à Rome ou à des congrès en différents endroits. Il y a du moins trois noms, parmi beaucoup d'autres, que j'ai l'obligation de rappeler : Maurice Fréchet, Georges Darmois, Paul Lévy.

J'ai accepté d'autant plus votre invitation, que le point de vue que je soutiens, bien que partagé par une minorité croissante de collègues, est loin d'être accepté et apprécié par la plupart des savants. Mais ce serait dommage si les idées non-conformistes étaient rejetées sans analyser leur vraie signification.

En revanche, il semble bien que mon point de vue soit en accord avec celui de l'« homme de la rue », comme le confirme cette anecdote. Une fois, ayant noté, dans la vitrine d'un café à Rome, un tableau des matches de football du dimanche suivant, j'ai demandé au garçon ce qu'étaient les nombres indiqués à côté de chaque match, comme par exemple :

— *Torino — Milan : 45 — 35 — 20*,

et la réponse était :

— « Mais !.. ce sont les probabilités ! »

(naturellement, de victoire, de match nul, de défaite, de l'équipe qui joue chez elle). Pas de doute, il était étonné d'avoir rencontré une personne — sûrement la seule au monde — qui ne savait pas ce qu'était une probabilité !

Sur la valeur de cette méthode d'exprimer son opinion à propos de faits incertains et sur la façon de comparer ces « prévisions » avec les résultats effectifs, on aura l'occasion de revenir au moment de tirer les conclusions.

Afin d'aborder systématiquement une discussion critique sur la « probabilité », il faut s'entretenir quelque peu, préalablement, sur des querelles de principe concernant la sgnification de la probabilité. Il ne s'agira pas de faire allusion, ici, à des discussions abstraites — et jamais, il semble, universellement convaincantes — sur *ce qu'est* la probabilité, mais, plus concrètement, de discuter et d'individualiser la nature de l'information qui peut être contenue, au sens pragmatique, dans une assertion où l'on fait intervenir des jugements de probabilité.

Il s'agit, on peut dire, de questions qui semblent se réduire à des querelles terminologiques, ce qui constitue — bien sûr — une tâche très ennuyeuse. Mais on ne peut pas s'en passer : en effet, beaucoup de difficultés et de paradoxes que l'on rencontre (où que l'on croit rencontrer) dans les discussions sur les probabilités, découlent de malentendus qui ont leur origine dans les ambiguïtés dues à des différences de conception ou de langage.

C'est Hugo C. Hamaker qui a eu le mérite d'avoir signalé « l'usage de *jargons* différents » comme la cause de tout désarroi, et je suis parfaitement d'accord avec lui sur ce point, tout en étant du côté opposé par rapport au sujet en cause : la conception de la probabilité. Et, naturellement, chacun s'efforce de démontrer que c'est le langage de l'autre qui mérite l'appellatif de « jargon » (dans le sens de « langage confus, inintelligible, fourvoyant »). L'article de Hamaker sur ce sujet, « Subjective probabilities and exchangeability from an objective point of view », a paru dans la *Revue Internationale de Statistique* (*45*, 3, Déc. 1977, pp. 223-232); à ce propos j'ai préparé une brève réponse qui paraîtra dans la même revue, mais je suis persuadé, à la suite de ces discussions, que discuter sur les « jargons » vaut mieux que de discuter sur des « mots », et c'est ce que je veux faire même dans la présente occasion.

Discuter sur les « jargons » plutôt que sur les « mots » a l'avantage de considérer la notion et le nom de « probabilité » (ainsi que des notions liées) *dans le contexte* des discours où elle intervient, plutôt que *dans le vide* (ou : *in vitro*). C'est la même différence qui se passe entre la connaissance d'une seule cellule, ou d'un organe isolé, et celle qui en envisage les connecxions et la fonction dans l'organisme vivant dont il fait partie.

Dans notre cas, il s'agira, d'une manière analogue, non pas de chercher et discuter des « définitions de la probabilité », mais de préciser la signification concrète des messages dans lesquels on donne des informations en termes de probabilité.

La première demande qu'il faut se poser, à propos de la probabilité, n'est donc pas

« *La probabilité : qu'est-ce qu'elle est?*

mais

« *La probabilité : de quoi?*

La réponse sera sans doute unanime : « d'un événement ». Mais, en effet, une telle réponse n'est pas univoque, car il y a deux acceptions, deux différentes façons d'interpréter le mot « événement » : au sens *spécifique* et au sens *générique.*

Dans l'acception générique — celle habituelle des objectivistes — on appelle *événement,* par exemple, le fait d'obtenir « un double six » avec deux dés, et *épreuve* du dit événement chaque coup.

Dans l'acception spécifique — celle qui est naturelle pour les subjectivistes (mais qui — comme tous les changements terminologiques qu'elle implique — devrait, à mon avis, paraître préférable pour tout le monde) on devrait appeler, au contraire, *événement* le double six dans un coup donné, considéré singulièrement, et, si l'on veut souligner qu'il y a entre ces événements des analogies, on pourrait le faire en disant qu'ils sont des « épreuves d'un même phénomène », sans aucune implication. Par exemple : pas nécessairement supposées « également probables » ou « indépendantes » ou « échangeables », etc.; toutes les précisions éventuelles de ce genre devraient — le cas échéant — être expressément indiquées.

Au contraire, dans la terminologie « objectiviste », on entend habituellement que si l'on dit « épreuves d'un même événement » il doit s'agir d'événements également probables, et aussi, souvent, indépendants. C'est de ce fait et dans l'envie de la déguiser sous un visage objectiviste, que l'on arrive à penser *définir* la probabilité comme une *fréquence*, et même comme la fréquence-limite sur une suite illimitée d'épreuves : limite connaissable seulement après la fin de l'éternité par quelqu'un qui pourrait survivre *au-delà* de cette catastrophe!

Néanmoins, même les objectivistes contredisent leur thèse fréquentiste lorsqu'ils parlent des cas d'« événements » dont la probabilité change « d'une épreuve à l'autre ». Cela montre bien que les évaluations de probabilité se rapportent à chaque « épreuve » singulièrement (c'est-à-dire, aux « événements » dans le sens des subjectivistes et *non* aux « événements » dans le sens des objectivistes).

Et cela n'est pas tout. La probabilité non seulement peut être différente d'un événement à l'autre (d'une « épreuve » à l'autre d'un même « événement » si l'on fait usage du langage des objectivistes), mais dépend, elle aussi, de notre état de connaissance. En effet, comme il a été remarqué par un éminent savant, notre évaluation de la probabilité d'un événement dépend « en partie de ce que l'on sait et en partie de ce que l'on ne sait pas ». Synthétiquement, toute probabilité est une probabilité conditionnelle : la probabilité d'un événement quelconque, E, n'est pas une fonction, $P\ (E)$, de E seulement, mais aussi de notre état de connaissance. Si nous l'indiquons par H_0, l'écriture complète, au lieu de $P\ (E)$, serait alors $P(E|H_0)$: probabilité de E lorsque notre état d'information est H_0. D'une manière plus générale, une probabilité sera $P(E|\mathrm{H} \cdot H_0)$ si on indique spécifiquement par H une hypothèse ultérieure sous la dépendance de laquelle on a intérêt à considérer la probabilité. (Évidemment, afin d'abréger et simplifier l'écriture, H_0 sera d'ordinaire sous-entendu, et même ici; il faut, cependant, prendre garde que l'on ne peut sous-entendre quelque chose si ce n'est à la condition que ce qui est sous-entendu soit effectivement sous-entendu et non négligé, oublié ou ignoré.)

Les probabilités conditionnelles traduisent parfaitement en formules le raisonnement inductif : c'est-à-dire, la façon dont on peut « apprendre de l'expérience ». L'essence se traduit dans la formule de Bayes :

$$P(H|E) = P(H) \,.\, \frac{P(E|H)}{P(E)}$$

la probabilité qu'une hypothèse, H, soit vraie se modifie, si l'on apprend qu'un événement E s'est produit, dans le même sens et la même proportion que se modifie la probabilité de E si l'on apprend que l'hypothèse H est vraie.

C'est dommage, à mon avis, que des formules empiriques — dites parfois « objectivistes » par ses supporteurs, et plus plaisamment « Adhockeries » par Irving J. Good — soient fréquemment préférées par beaucoup de practiciens et même de savants.

Qu'il suffise de faire allusion ici au cas le plus simple dans lequel la diversité de conception et de « jargons » peut être clairement illustrée.

Les tirages (avec remise) d'une urne contenant des boules blanches et noires en proportion *connue* constituent une suite d'événements également probables et indépendants. Mais, quelle est la situation lorsque la dite proportion n'est pas connue? Si, par exemple, on sait que l'urne a été choisie au hasard parmi deux (ou plusieurs) urnes ayant des compositions connues mais différentes?

Dans le « jargon » courant, on parle, en ce cas, d'« épreuves indépendantes avec probabilité constante mais inconnue ». Toutefois, il n'y a, en effet, ni « indépendance » ni

« constance de la probabilité ». Le fait que la condition d'« indépendance » soit respectée *sous chacune des hypothèses possibles* n'implique pas (comme les jargons objectivistes pourraient le suggérer) qu'elle doit subsister, *tout court*, aussi dans le cas général d'un *mélange*. Ce qui subsiste, en effet, c'est seulement une condition plus faible (un seul aspect, on peut dire) de la condition d'indépendance : l'échangeabilité [1]. C'est cette notion, qui permet d'exprimer proprement ce qui était appelé, auparavant, de façon impropre : « *indépendance avec probabilité constante mais inconnue* », et d'indiquer, d'une manière analogue, le chemin propre pour une révision de tous les jargons qui cachent les problèmes de bon sens probabiliste sous des superfétations artificielles et obscures de saveur métaphysique.

C'est seulement, après ces remarques préliminaires de nature critique à propos de la probabilité et de son rôle, qu'il est possible de discuter ce qu'on peut et veut entendre lorsqu'on s'exprime en termes de probabilité. Je ne veux pas reprendre ou répéter ici mes réflexions déjà enveloppées maintes fois, mais seulement rappeler que toute prétention contre nature, visant à attacher au mot « probabilité » une signification objective ou métaphysique, n'a fait qu'engendrer des confusions inévitables qu'il n'est pas exagéré de qualifier de « babéliques ».

La seule signification acceptable, raisonnable, est — il n'y a pas de doute — celle de l'« homme de la rue », mentionné tout d'abord, qui cherche à supputer les chances dans des cas parfaitement individualisés, comme *un* match de football, *une* élection politique, la pluie à Paris pendant *un* jour donné, ou l'amélioration du record mondial de lancement du disque aux Olympiades de 1980.

L'évaluation des probabilités est le fondement des réflexions (quantitatives ou qualitatives, attentives ou sommaires) qui nous guident dans toutes les décisions, toutes les actions, comportant toujours des aspects de risque, d'incertitude.

Mais, comment doit-on évaluer les probabilités? La façon la plus directe est de le faire en pensant $P(E)$, probabilité de l'événement E, comme le *prix* (considéré *équitable*) pour avoir 1 si E s'avère; ceci est l'essentiel. On peut aussi faire une comparaison de p avec m/n dans les deux situations : pourcentage de boules blanches *existant* dans l'urne (et supposé connu), ou obtenues sur n tirages (avec remise). Il n'est pas défendu de recourir à ces critères; entendus non comme des préjugés basés sur des définitions dogmatiques, mais comme des conséquences de l'accord, dans des cas spécifiques, de l'opinion subjective avec un schéma « standard ».

Avoir l'habileté et l'habitude de penser ou de traduire ses degrés de confiance en évaluations numériques de probabilités est sans doute en enrichissement valable de la personnalité (non moins que pour des évaluations de quantités objectives : de longueurs, de poids, de températures, de vitesses, etc.).

Il est bien utile, si l'on accepte cette idée, d'avoir un entraînement visant à développer et encourager cette attitude, comme cela a été essayé en organisant, pendant plusieurs années, de 1960 à 1976, des concours de pronostics probabilistes sur les matches de football (Italie, Série A). Pour juger du rapprochement des prévisions avec les résultats réels, il s'agit d'appliquer une « règle de pénalisation *appropriée* » : c'est-à-dire telle que chacun est poussé (dans son propre intérêt) à exprimer *sincèrement* ses propres évaluations. Ces règles, « proper scoring rules » en anglais, ont été découvertes entre 1950 et 1960 indépendamment par plusieurs auteurs; probablement les premiers ont été le japonais Masanao Toda et

1. Cette dénomination (la plus heureuse, à mon avis) m'a été suggérée par M. Fréchet (1939); auparavant je disais « équivalence ».

l'américain Mc Charty. La plus simple (et largement appliquée) est la « règle de Brier » (Brier's rule), qui prend comme pénalisation le carré de la distance entre le point-prévision et le point-résultat. Par exemple, dans le cas mentionné (Torino-Milan), celui qui aurait donné les évaluations indiquées (45, 35, 20) aurait reçu une pénalisation :

$$(100 - 45)^2 + (35)^2 + (20)^2 = 186 \text{ dans le cas de victoire de Torino}$$
$$(45)^2 + (100 - 35)^2 + (20)^2 = 266 \text{ dans le cas de match nul}$$
$$(45)^2 + (35)^2 + (100 - 20)^2 = 672 \text{ dans le cas de victoire de Milan}$$

La méthode (au delà du divertissement) s'est révélée comme bien instructive pour quantifier sérieusement ses propres opinions sur des faits incertains, en comparant les classements (pour chaque journée et pour toute l'année de tous les concurrents).

La représentation sur un triangle équilatéral illustre la « règle de Brier » dans ce cas (avec 3 résultats possibles). Le « point prévision », P, est le centre de gravité des trois sommets « 1 » — « x » — « 2 » avec les probabilités respectives; la pénalisation est le carré de la distance de P au sommet qui représente le résultat du match. L'assertion que chacun a intérêt à indiquer ses évaluations (c'est-à-dire le point P) sincèrement peut être prouvée sans calculs en rappelant une propriété élémentaire et presque intuitive de mécanique : le point P est le centre de gravité des sommets « 1 », « x », « 2 » avec les poids (probabilités) P_1, P_x, P_2; la prévision de la pénalisation (somme pondérée des carrés des distances de P des sommets) est le moment d'inertie des trois poids par rapport à P; ce moment est minimum si l'on prend P comme indiqué. En s'en éloignant, on ajouterait une pénalisation additionnelle (donnée par le carré de l'éloignement de P à l'autre point P' que l'on aurait choisi).

Ce n'est pas seulement pour ces applications de sport ou de curiosité que mon intérêt se concentre surtout sur les « cas isolés », en dehors des visions statistiques de la probabilité. Dans le domaine des assurances, il y a toujours des cas isolés et des experts des Lloyds de Londres qui jugent les conditions à appliquer. Mais, plus encore, je voudrais attirer l'attention sur des décisions complexes, où les évaluations numériques de probabilités de différentes circonstances jouent le rôle effectif de prix dans le choix de la décision la meilleure. C'est dans le livre de Grayson, « Decisions under uncertainty : drilling decisions by oil and gas operators » (Harvard, 1960), que toutes les circonstances incertaines des nombreux aspects et des phases des études et de la décision sont évaluées en termes de probabilités numériques entrant directement dans la comparaison entre les différentes décisions possibles (avec tous les détails; même, par exemple, si cela vaut la peine de faire une inspection sismique). Est-ce une drôlerie? Avant de l'affirmer, il faut s'amuser à lire la collection de phraséologies plus ou moins évasives ou ambiguës qui étaient précédemment présentées, avec le soin de n'être pas démenties quel que soit ce qu'on allait trouver. Comme la sybille : « Ibis redibis non mereris in bello ».