Journal de la société statistique de Paris

Jean-Claude Hentsch

Calcul d'un critère qualitatif pour les séries de valeurs définissant l'échelonnement des signes monétaires

Journal de la société statistique de Paris, tome 116 (1975), p. 309-315

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1975__116__309_0>

CALCUL D'UN CRITÈRE QUALITATIF POUR LES SÉRIES DE VALEURS DÉFINISSANT L'ÉCHELONNEMENT DES SIGNES MONÉTAIRES

La monnaie fiduciaire est matérialisée par un système de coupures de différentes valeurs qui permettent de stocker un pouvoir d'achat et de composer les montants à payer.

On propose une méthode qui permet de comparer objectivement les qualités respectives des systèmes de coupures comportant des échelonnements différents.

The coins and banknotes making up the legal tender of a country consist of various denominations which can be used to store purchasing power and make up any desired amount.

A method is proposed to compare objectively the merits of different systems of denominations using different sets of values.

Papiergeld setzt sich aus einem System verschiedener Wertgrössen zusammen, welches es sowohl erlaubt die Kaufkraft zu speichern, als auch die zu zahlenden Beträge zusammenzustellen.

Man empfiehlt eine Methode, die es objektiv erlaubt die jeweiligen Vorzüge der verschiedenen Sortensysteme mit diverser Abstufung zu vergleichen.

La moneda fiduciaria esta materializada por un sistema de monedas y billetes de banco de varios valores que permiten de constituir una reserva del poder de compra y de componer los importes a pagar.

Se propone un método que permite de comparar objetivamente las calidades respectivas de los sistemas que comportan escalonamientos diferentes.

Dans notre article de 1973 (1) nous avons proposé plusieurs méthodes destinées d'une part à l'étude de la circulation des coupures constituant la monnaie fiduciaire, et d'autre part à la formulation d'un jugement sur la qualité des divers échelonnements de valeurs qu'on peut utiliser pour ces coupures. Nous avions alors indiqué trois domaines dans lesquels des études complémentaires pourraient donner des résultats utiles :

— études comparatives des volumes en circulation au moyen du graphique proposé;

— étude sur un modèle théorique pour chercher s'il existe une justification de principe à la proportionnalité entre les montants en circulation et la racine carrée de la valeur des coupures;

— calculs améliorés pour l'établissement du critère qualitatif dont l'emploi était suggéré pour comparer les diverses possibilités d'échelonnement des coupures.

1. *Journal de la Société de statistique de Paris*, n° 4, 1973.

C'est sur ce dernier point que porte le présent complément; il est rappelé que le critère proposé peut être défini comme « le nombre minimum moyen de coupures qu'on doit utiliser pour former un montant quelconque ». Les chiffres qui avaient été donnés étaient basés sur un calcul très simplifié. Ceux qui sont donnés ici permettent une comparaison qualitative beaucoup plus précise des séries les unes par rapport aux autres. Ils ne constituent pas nécessairement toutefois une norme définitive.

Les séries

Il faut préciser que nous effectuons le calcul en convenant que les séries sont illimitées vers le haut et vers le bas. En d'autres termes, la série désignée 1-2-10, par exemple, représente

... 0,1 0,2 1 2 10 20 100 200 ...

On n'a donc pas tenu compte du fait que toute gamme réelle de coupures est nécessairement limitée aussi bien en bas qu'en haut et que cela introduit des effets particuliers quand on s'approche de ces limites.

Nombre de coupures par décade

Chaque série est caractérisée par le nombre de valeurs qu'elle comporte entre une puissance de dix et la suivante. Ce nombre est important à deux points de vue :

d'une part, pour l'émetteur, car plus il y a de types de pièces ou billets différents plus le coût est important et plus il est difficile de créer des coupures qui puissent être aisément distinguées les unes des autres;

d'autre part, au point de vue de l'utilisateur, le nombre de coupures par décade étant proportionnel au nombre de pièces et de billets différents qu'il devra manipuler. Plus ce nombre est grand, plus il est difficile de reconnaître les différents éléments, de les classer, de trouver rapidement la coupure nécessaire, etc. Dans un pays où le rapport entre la plus petite et la plus grande coupure est de 1 à 100 000 une série comportant *une* coupure par décade correspond à six coupures différentes, *deux* coupures par décade à onze coupures différentes, *trois* coupures par décade à seize coupures différentes.

Distorsion de l'harmonie

Ce chiffre mesure l'irrégularité de la série, c'est-à-dire la mesure dans laquelle les rapports entre valeurs consécutives s'écartent d'une constante. Par exemple, dans la série 1-5-10-50, etc. les rapports entre valeurs consécutives sont de 5 ou de 2. Le rapport de 5 à 2 est égal à 2,5; il s'écarte donc de l'unité de 1,5 ou 150 %. Dans une série parfaitement harmonique, le rapport entre deux valeurs consécutives est une constante; la distorsion est nulle.

$\bar{N}$, nombre moyen de coupures utilisées

Ce chiffre est le critère que nous proposons pour la qualification d'une série de valeurs à usage de numéraire. Il s'agit du nombre minimum de coupures nécessaires pour former une variété de montants; ce nombre est divisé par le nombre de chiffres que comporte l'échantillon de montants en question. Le nombre moyen ainsi obtenu peut varier suivant le choix des montants à composer. La division du total des coupures par le nombre de chiffres de l'échantillon produit toutefois une moyenne normalisée qui varie peu en fonction des montants pourvu que l'échantillon soit assez riche. Malgré cela, il est évidemment préférable de comparer les séries entre elles sur la base d'un seul et même échantillon de montants. Nous avons utilisé principalement pour calculer les moyennes un échantillon composé des nombres de 10 à 99 avec un système de pondération expliqué plus loin, qui tient compte de la fréquence probable d'utilisation de chaque nombre.

Il faut dire encore que pour calculer $\overline{N}$ nous avons fait la moyenne du nombre de coupures nécessaires pour composer les montants par trois méthodes différentes, à savoir :

$\overline{N}_+$ moyenne du nombre minimum de coupures nécessaires pour composer les montants de manière additive, c'est-à-dire en ajoutant les valeurs des coupures les unes aux autres. Pour illustrer cette méthode additive, nous pouvons constater que par exemple avec les éléments de la série 1-2-5-10 il faut 4 coupures pour former additivement le nombre 82 : $50 + 20 + 10 + 2$.

$\overline{N}_\pm$ moyenne du nombre minimum de coupures nécessaires pour composer les montants en les utilisant de manière additive ou soustractive. Par exemple, toujours avec la série 1-2-5-10 le minimum absolu de coupures nécessaires pour faire 82 est ainsi ramené à 3 : $100 + 2 - 20$.

$\overline{N}_R$ est la moyenne du nombre minimum de coupures nécessaires pour former chaque montant par le mécanisme comportant un retour de monnaie. Chaque montant est acquitté par la remise d'une seule coupure immédiatement supérieure au montant. La différence est rendue de façon additive. Dans notre exemple, il faut alors 5 coupures pour former 82 : $100 - (10 + 5 + 2 + 1)$.

Nous n'avons pas pensé qu'il faille donner à chaque méthode de composition une importance différente et la moyenne générale est donc une moyenne non pondérée des chiffres obtenus par les trois méthodes :

$$\overline{N} = \frac{1}{3}(\overline{N}_+ + \overline{N}_\pm + \overline{N}_R)$$

Il existe en réalité une quasi-infinité de moyens de composer un montant donné, mais les trois méthodes ci-dessus donnent une bonne représentation des diverses possibilités d'emploi du numéraire. Dans la réalité pratique, la méthode ($\pm$) joue un rôle assez modeste quand l'utilisateur dispose d'une série de valeurs nombreuses comme 1-2-5-10. La méthode ($\pm$) gagne par contre en importance si la série est plus pauvre. A l'extrême, si on ne dispose que des seules valeurs 1-10-100, il arrivera forcément assez souvent que 82 soit formé par $100 + 1 + 1 - 10 - 10$ plutôt que par $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1$. Cette variation de l'importance relative de la méthode ($\pm$) tendra à atténuer un peu les écarts entre les critères calculés pour chaque série.

Choix de l'échantillon des montants a composer

On peut étudier la composition de cet échantillonnage de différents points de vue. La méthode la plus directe consisterait à se livrer à un échantillonnage statistique de tous les prix et sommes payées dans un pays donné pendant une période donnée, ce qui permettrait de se baser sur une distribution réelle. Ce système aurait toutefois l'inconvénient d'exiger un travail considérable. D'ailleurs, un assez grand nombre d'essais nous ont permis de nous rendre compte que les résultats obtenus ne sont pas très sensibles à la composition de l'échantillon. Il est donc raisonnable de chercher à définir un échantillon plus simple qui représente symboliquement « l'ensemble des prix ». Il est entendu par ailleurs que le résultat obtenu pour notre critère de qualité est « normalisé » en divisant le grand total du nombre de coupures utilisées par le nombre de chiffres que comporte l'échantillon.

Ceci étant, on peut encore choisir comme échantillon des prix une série de nombres choisis de façon aléatoire en fonction de certaines règles ou encore un ensemble de nombres consécutifs tels que la série des nombres de 10 à 99 ou la série des nombres de 100 à 999. Il est évident qu'en pratique le nombre de chiffres significatifs qui expriment un prix ou une somme à payer est variable, pouvant aller en fait de 1 à 6. Les prix qu'on acquitte par du numéraire recouvrent toute la gamme et même plus que la gamme des coupures existantes, soit quelque chose comme un rapport de 1 à 10^7. Leur distribution est d'une grande variété, mais nous avons résolu pour simplifier de ne considérer que des chiffres répartis sur une seule puissance de 10 et de considérer par ailleurs que nous disposons pour les composer d'une série illimitée de coupures.

Si nous prenons comme échantillon la série des nombres de 10 à 99, nous pensons qu'on s'approchera le mieux de la réalité en tenant compte d'une fréquence d'utilisation qui sera sensiblement plus grande pour les nombres les plus petits que pour les nombres les plus grands de l'échantillon. Il y a lieu d'utiliser un facteur de pondération correspondant à la fréquence probable d'utilisation de chaque nombre. Ce facteur sera le logarithme du rapport entre ce nombre et le suivant.

Cette manière de voir peut être contestée et seule une étude des fréquences qui se rencontrent dans la réalité permettrait de trancher la question de manière indiscutable. Nous pensons toutefois qu'il est beaucoup plus vraisemblable de penser que des nombres commençant par exemple par 12, c'est-à-dire des nombres tels que 125, 1237, 12,35 etc., se rencontreront avec une fréquence plus élevée que des nombres commençant par 98, ceci par le seul fait que l'écart relatif entre 12 et 13 est plus grand que l'écart relatif entre 98 et 99 ([1]).

En pratique, nous avons donc établi les moyennes $\overline{N}_+$, $\overline{N}_\pm$ et $\overline{N}_R$ sur la base des nombres consécutifs de 10 à 99, la moyenne étant pondérée par le logarithme des écarts. Nous donnons par ailleurs pour comparaison les moyennes obtenues sans pondération.

Le résultat des calculs est présenté dans le tableau I, tableau pour lequel les séries ont été rangées en tenant compte d'abord du nombre de coupures par décade, puis du nombre $\overline{N}$.

On peut y constater, par exemple, que la série 1-5-10 a un $\overline{N}$ de 2,25 soit 46 % de plus que la série 1-2-5-10 pour laquelle $\overline{N}$ égale 1,54. La série 1-5-20-100 a un $\overline{N}$ de 2,50 soit une péjoration de 11 % seulement par rapport à 1-5-10, alors que le nombre de coupures passe de 2 à 1,5 se réduisant donc de 25 %. Rappelons que la série 1-2-3-6-10 est trop riche pour être utilisable dans l'échelonnement des coupures d'une monnaie. Elle est mentionnée ici à titre comparatif. Elle a un intérêt pratique éventuel pour échelonner des timbres-poste.

Si on examine le détail des nombres obtenus pour $\overline{N}_+$, $\overline{N}_\pm$ et $\overline{N}_R$ on constate des corrélations intéressantes; plus la série est « maigre » et plus $\overline{N}$ est grand, plus l'écart entre $\overline{N}_\pm$ et $\overline{N}_R$ augmente. A peu de choses près, l'ordre de qualité des séries reste le même sur quelque

1. Pour une discussion détaillée de cette question, voir en particulier « The Peculiar Distribution of First Digits » par Ralph A. Raimi, *Scientific American*, décembre 1969, p. 109.

Tableau I

Caractéristiques des plus importants systèmes de coupures

($\overline{N}$ calculé avec pondération logarithmique)

Série	Nombre de coupures par décade	Distorsion de l'harmonie	Nombre moyen de coupures utilisées			
			$\overline{N}$	$\overline{N_+}$	$\overline{N_\pm}$	$\overline{N_R}$
1-10	1	0	3,95	3,81	2,59	5,46
1-5-20-100	1,5	0,25	2,50	2,52	1,91	3,08
1-5-10	2	1,5	2,25	2,31	1,70	2,75
1-2,5-10	2	0,6	2,19	2,30	1,70	2,58
1-2-10	2	1,5	2,15	2,18	1,62	2,64
2-5-20	2	0,6	2,00	2,05	1,62	2,35
1-4-10	2	0,6	1,91	1,98	1,51	2,23
1-3-10	2	0,11	1,88	1,92	1,56	2,16
1-2,5-5-10	3	0,25	1,71	1,78	1,46	1,90
1-2-5-10	3	0,25	1,54	1,58	1,33	1,70
1-2-4-10	3	0,25	1,53	1,57	1,34	1,69
1-2-3-6-10	4	0,33	1,30	1,34	1,16	1,39

Tableau II

Nombres moyens non pondérés

A titre complémentaire, nous donnons ici les nombres moyens de coupures calculés sans tenir compte de la pondération logarithmique sur les nombres de 10 à 99.

Série	$\overline{N}$	$\overline{N_+}$	$\overline{N_+}$	$\overline{N_R}$
1-10-100	4,11	4,75	2,84	4,75
1-5-20-100	2,71	2,90	2,07	3,15
1-5-10	2,36	2,64	1,79	2,64
1-2,5-10	2,40	2,67	1,86	2,67
1-2-10	2,36	2,64	1,79	2,64
2-5-20	2,23	2,22	1,75	2,72
1-4-10	2,01	2,22	1,59	2,22
1-3-10	2,04	2,22	1,68	2,22
1-2,5-5-10	1,85	1,99	1,57	1,99
1-2-5-10	1,67	1,79	1,43	1,79
1-2-4-10	1,69	1,79	1,47	1,79
1-2-3-6-10	1,41	1,48	1,27	1,48

Tableau III

Nombre $\overline{N_+}$ calculé sur différents échantillons de nombres

(avec pondération logarithmique)

Série	1-9	10-99	100-999
1-10-100	3,44	3,81	4,03
1-5-20-100	2,43	2,52	2,59
1-5-10	2,24	2,31	2,37
1-2,5-10	2,54	2,30	2,24
1-2-10	2,02	2,18	2,28
2-5-20	2,08	2,05	2,06
1-4-10	1,96	1,98	2,02
1-3-10	1,86	1,92	1,98
1-2,5-5-10	1,92	1,78	1,75
1-2-5-10	1,54	1,58	1,62
1-2-4-10	1,53	1,57	1,61
1-2-3-6-10	1,33	1,34	1,35

critère qu'on se base et en particulier on constate une très grande proximité entre les chiffres exprimant $\overline{N}$ et ceux exprimant $\overline{N}_+$. *Nous pouvons en conclure que les chiffres basés uniquement sur $\overline{N}_+$ sont probablement suffisants en pratique.*

Le calcul de $\overline{N}$ pour chaque série sur la base des nombres de 10 à 99 représente un travail numérique important. On est évidemment tenté de comparer les résultats obtenus avec ceux qu'on obtient sur un échantillon comportant des nombres de 100 à 999. Ce travail ne peut être réalisé que par un ordinateur et nous ne l'avons effectué que pour $\overline{N}_+$, travail qui a été obligeamment réalisé par I. C. G., ingénieurs conseils pour la gestion, Genève.

Le tableau III donne la comparaison entre les valeurs de $\overline{N}_+$ (avec pondération logarithmique) telles qu'on les obtient sur 9 nombres (de 1 à 9), sur 90 nombres (de 10 à 99) ou sur 900 nombres (de 100 à 999). On constatera le peu d'écart qui existe entre ces résultats. Un examen des écarts ne conduit pas à des conclusions simples à leur sujet. On peut dire néanmoins que les plus gros écarts concernent des systèmes de coupures où les valeurs 0,5 et 0,25 doivent intervenir dans la composition de certains nombres.

Conclusion

Il est vraisemblable que les critères calculés sur 900 nombres sont en concordance plus précise avec l'usage réel que ceux calculés sur 90 nombres. On serait informé plus précisément encore si on disposait des critères $\overline{N}_\pm$ et $\overline{N}_R$ calculés sur 900 nombres. Ce calcul implique néanmoins un effort important en matière de programmation d'ordinateur. Quel critère doit-on finalement choisir? c'est au praticien de le dire, mais il nous semble que le raffinement des calculs ne modifie les résultats obtenus que dans une mesure très limitée. En conséquence, on devrait pouvoir en pratique se contenter de la moyenne $\overline{N}_+$ calculée sur les nombres de 10 à 99 avec pondération.

Sur un plan plus concret, l'examen des chiffres du tableau I nous montre que, *dans les séries à trois coupures par décade*, la série 1-2-5-10 qui nous est bien connue donne un nombre moyen $\overline{N}$ de 1,54 coupures par chiffre à composer; c'est un point de repère.

Parmi les séries à deux coupures par décade, c'est la série 1-3-10 qui a les caractéristiques les plus avantageuses; son $\overline{N}$ est de 1,88 coupures par chiffre, soit 22 % de plus que pour 1-2-5-10. Sa distorsion n'est que 11 %. La série 1-3-10 utilise toutefois la valeur 3 avec laquelle personne n'est familiarisé et c'est là un défaut majeur. Il faut donc considérer comme intéressante la série 2-5-20 dont les valeurs sont familières, dont la distorsion n'atteint que 60 % et dont le critère d'utilisation égal à 2,00 n'est que de 6 % plus élevé que celui de la série 1-3-10. Relevons la mauvaise qualité de la série 1-5-10 qui comporte 150 % de distorsion de l'harmonie et dont le critère d'utilisation est de 20 % plus élevé que celui de la série 1-3-10.

Si on accepte une péjoration qui n'est que de 11 % de plus on peut adopter la série 1-5-20-100 qui a l'avantage de compter encore une coupure de moins par deux décades et dont la distorsion n'est que de 25 %.

Il est utile et intéressant de procéder à l'essai pratique de différents systèmes de coupures. Cela peut se faire, entre autres, sous la forme de jeux de société utilisant de la monnaie. On voit alors très clairement que la fluidité d'un système de coupures est d'autant moins bonne que $\bar{N}$ est élevé. Les problèmes d'échange de monnaie se posent plus fréquemment et sont plus difficiles à résoudre pour les utilisateurs.

Jean-Claude HENTSCH
Banquier, ingénieur E.P.F.Z.