

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

MARIE-LOUISE DUFRÉNOY

JEAN DUFRÉNOY

Utilisation de l'échelle « arc-tangente » comme échelle des temps

Journal de la société statistique de Paris, tome 95 (1954), p. 137-144

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1954__95__137_0

© Société de statistique de Paris, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VII

VARIÉTÉ

Utilisation de l'échelle "arc-tangente" comme échelle des temps.

I. — LA PERSPECTIVE DÉFORMANTE DU TEMPS

En janvier 1954 paraissaient simultanément dans l'*Action Universitaire* (20^e année, n^o 2, p. 24-40), sous la plume de Claude Delmas, une pénétrante méditation philosophique, en réponse à la question : « Connaissons-nous mieux l'homme? » et, sous la signature de G. Truc, dans *Hommes et Mondes*, une discussion des rapports de l'Homme et de l'Histoire. L'un et l'autre auteurs envisagent l'histoire comme le « champ » des activités humaines. Ce « champ » n'est pas seulement la scène où se jouent les réactions d'un observateur sensible au sein d'un monde sensible, qu'il s'agisse de phénomène personnel comme la durée de la conscience et le vieillissement de l'individu, — ou de phénomènes biochimiques comme ceux qui déterminent la « courbe de croissance » d'un individu ou d'une vogue.

Du temps « historique » permettant de situer les événements selon un ordre chronologique, du temps « physique » s'écoulant inexorablement, toujours dans le même sens, du passé vers l'avenir, et qui nous sert à synchroniser des manifestations de l'activité humaine avec tel ou tel phénomène cosmologique, nous devons distinguer le temps lié à la notion d'évolution, le temps qui est ce par rapport à quoi peut être étudiée la variation de toute grandeur autre que le temps lui-même.

Dans certains cas, l'évolution ultérieure de cette grandeur est déterminée par la seule connaissance des données initiales, au temps t_0 ; c'est le cas, par exemple, pour un phénomène tel que celui de la propagation de la lumière, dont l'étude a conduit Maupertuis à énoncer le Principe de Moindre Action.

Mais, dans bien des cas, la connaissance des données initiales est insuffisante; il faut se donner à la fois les conditions initiale et finale : c'est le cas, par exemple, pour les phénomènes « autocalytiques » dont l'évolution peut se représenter graphiquement par une « courbe de croissance » telle qu'à chaque instant (t) la vitesse de croissance dépend non seulement de la croissance effectuée dans le passé, depuis le début (t_0) jusqu'au moment présent (t), mais encore de la croissance qui reste à effectuer dans l'avenir jusqu'au moment ultime (t_u) où la vitesse de croissance deviendra nulle. Alors s'introduit non seulement dans le domaine de la psychologie, mais aussi dans celui de la biologie, de la physique et des mathématiques même, la notion de finalité.

Dans les cas où intervient l'état final aussi bien que l'état initial, il est avantageux de supposer l'observateur situé sur l'échelle des temps au temps zéro, et tournant ses regards soit vers le passé, soit vers l'avenir; ainsi nous

évoquons cette « vue d'optique des années... d'une personne située dans la perspective déformante du temps » telle que la concevait M. Proust à la recherche du temps perdu (III, p. 613) lorsque notre passé projette devant nous « cette ombre de lui-même que nous appelons notre avenir » (I, 561).

C'est au cours d'une méditation sur « l'Église de Combray » que Proust acquiert la notion d'un espace à quatre dimensions — la quatrième étant celle du Temps — déployant à travers les siècles son vaisseau qui, de travée en travée, de chapelle en chapelle, semblait vaincre et franchir, non pas seulement quelques mètres, mais des époques successives dont il sortait victorieux (*Recherche du Temps Perdu*, I, 49).

De cette méditation, Proust tire d'une part sa « vue d'optique des années, la vue non d'un monument, mais d'une personne située dans la perspective déformante du Temps », perspective cependant qui lui fait intuitivement sentir les phénomènes observables dans le temps comme expression d'un principe de finalité : perspective qui l'incite à décrire « les hommes comme occupant dans le Temps une place aussi considérable que celle si restreinte qui leur est réservée dans l'espace »... place aussi considérable que celle que révèle au héros de *Je vivrais l'amour des autres* (p. 283) « cette nuit qui enfin se découvrait... immense comme une cathédrale dans laquelle on ne peut entrer que les yeux levés, implorants... cette nuit on n'en voyait pas les voûtes... Tant qu'il pouvait encore être là, rien ne pourrait attendre demain sans lui... il portait maintenant... la vérité d'un cœur qui n'a que les autres pour vivre... »

II. — RELATIVITÉ DU TEMPS CHRONOLOGIQUE

Pendant seize siècles, le monde chrétien a conféré une valeur objective au temps chronologique défini par le « Calendrier », encore que celui-ci eût reçu des retouches successives destinées à atténuer son manque de synchronisme avec les phénomènes cosmologiques.

Au ^{xvii}^e siècle, des érudits « découvrirent que les Chronologies des Chaldéens, des Égyptiens et des Chinois remontaient plus loin dans le passé que la tradition mosaïque » dont les Chrétiens se considèrent comme des héritiers. « Après la parution, en 1686, de la chronologie du Père Couplet », qui réconcilie les chronologies chinoise, égyptienne, chaldéenne et judaïque, « la conciliation des deux traditions orientale et judaïque fut exposée dans le traité du P. Couplet : *l'Antiquité des temps rétablie* (1687) » (Cf. M. L. DUFRÉNOY, *L'Orient Romanesque en France, 1704-1789*, I : 21-22, 1946).

Faisant état de cette acquisition de la valeur relative du « temps chronologique », les auteurs qui, au ^{xviii}^e siècle, écrivirent des romans inspirés de l'Orient, se sont efforcés de suggérer l'atmosphère de l'Orient non seulement dans l'Espace, mais encore dans le Temps : par exemple, Voltaire, en 1760, date de « l'an de l'Hégire 1215 » son *Épître écrite de Constantinople* (M. L. DUFRÉNOY, *loc. cit.*, I : 194).

« Le ^{xix}^e siècle a ramené une bonne partie de la pensée française et européenne vers la considération des caractères imprimés à la réalité par l'influence du temps sur elle. » (R. LE SENNE, *Introduction à la Philosophie*, p. 102-103, Presses Univ., Paris.)

« Le xx^e siècle sera surtout celui des « temps hétérogènes » ou, si l'on préfère, celui de la Relativité... » Le Physicien s'aperçoit « que si le temps est relatif, la raison dernière en est que chaque électron ou particule analogue possède leur rythme individuel... ils ont leur temps à eux... A la même époque, la biologie portait son attention sur le rythme vital de chaque être... Quand Kierkegaard, le maître de l'existentialisme chrétien, montre le destin d'Abraham suspendu à l'Instant où il doit choisir entre Dieu et son fils Isaac, « ...il ...accroche » une destinée à cette seconde qui contient la transcendance et l'Éternité de Dieu...

L'existentialisme athée, lui, suspend l'atome de temps à un Absolu humain, la Liberté divinisée de l'homme. Néanmoins, qui ne voit que de deux manières ce point qu'est le présent, engendre non plus un rythme de croissance vitale, ainsi que chez les biologistes, mais bien la courbe, temporelle pour les uns, « destinée » à une éternité pour les autres, d'une vie individuelle? Ici, nous entrons dans un domaine qui dépasse l'univers où nous sommes pour accéder à celui où nous allons. Le Temps trouve un sens qui « l'achève »; même quand c'est celui de n'en point avoir. (P. L.-A. DJARI, *L'Âge des Temps retrouvé, Études franciscaines*, III, 213-9, déc. 1952).

Pour Claude Delmas, chaque homme est libre, et sa vie est « en chacun de ses moments, une équation entre le passé et l'avenir; l'équation passé-avenir nous permet de vérifier la véritable constitution de l'homme : l'aspect que revêt pour nous notre avenir à chaque instant nous fait voir notre passé sous un certain aspect corrélatif.

Pour G. Truc, « si nous sommes enfermés dans le temps et dans l'espace, ce n'est point sans espoir d'y échapper : nous sommes ainsi victimes d'une illusion du moi, d'une illusion de l'ego. Cet ego, nous oublions que l'organisme y entre pour une bonne part et qu'il demeure de forme spatiale et temporelle ».

« Le passé a beau être révolu en lui-même, il est solidaire des autres phases du temps, c'est-à-dire de l'avenir qui le suit et qui constitue ainsi le présent d'où on le regarde...

« L'histoire est une perspective sur le passé et le centre de cette perspective est toujours le présent. » (L. LAVELLE, *loc. cit.*, p. 314.)

III. — LE PRÉSENT, « POINT INVISIBLE QUI COUPE EN DEUX

LA LONGUEUR DE LA LIGNE INFINIE »

Puisque le « temps chronologique » peut être compté à partir de tel ou tel fait historique, n'est-il pas loisible à chacun de fixer l'origine de son temps au moment présent, définissant, sur la ligne du temps, le point correspondant au « temps zéro » à partir duquel les durées seront comptées en arrière, vers le passé, et en avant, vers l'avenir.

« Présent, point indivisible et fluant, sur lequel l'homme ne peut non plus se tenir que sur la pointe d'une aiguille. » (DIDEROT, *Œuvres*, 18 : 97.)

« La nature de l'homme est d'osciller sans cesse sur ce fulcrum de son existence. Il se balance sur ce petit point d'appui, se ramenant en arrière ou se

portant en avant à des distances proportionnées à l'énergie de son âme. (Id, *ibid.*, 115.)

« L'âme contemplative... est attentive à la fois aux trois points de l'existence, le passé, le présent et l'avenir, ne cessant de revoir ce qui a été et l'évoquant par sa mémoire, de considérer ce qui est en le contemplant avec le jugement, de conjecturer les probabilités de ce qui sera, par l'imagination soumise aux calculs de la raison et aux lois de la volonté. » (VIGNY, *Journal*.)

« L'idée du passé ne prend un sens et ne constitue une valeur que pour l'homme qui se trouve en lui-même une passion de l'avenir. » (VALÉRY, *Regards sur le monde actuel*.)

Connaître les racines mêmes de ce jour qu'il a vécu jusqu'à l'espoir, voilà le sens de la vie, pour le héros que Jean Cayrol (*Je vivrai l'amour des autres*, p. 282) évoque au moment où « il n'était plus que lui-même au-delà de lui-même ».

La mémoire « dirigée vers l'avenir autant que vers le passé », est « un pouvoir autant qu'un savoir... le pouvoir qu'on a de faire appel au passé pour préparer l'avenir. Car... toute mémoire à un but ». « S'il est indispensable que la conscience soit consciente à travers une mémoire, que l'intentionnalité ait la structure d'une mémoire. » (Louis VAN HÆCHT, *Rev. Phil. Louvain*, 51, p. 583, nov. 1953.)

« La loi exprime une relation invariable entre les phénomènes dont le modèle nous est fourni par le passé et sur lequel l'avenir n'a pour ainsi dire pas de prise. »

« La loi ne permet de disposer de l'avenir par l'action que dans la mesure où elle permet de disposer du passé par la pensée. » (L. LAVELLE, *loc. cit.*, p. 311.)

« La cause de toutes les transformations réside dans une certaine potentialité qui se réalise dès qu'elle cesse d'être empêchée...

« ...Au lieu de considérer l'effet comme succédant à la cause par une sorte de déclenchement, nous devons le rapporter à une multiplicité d'actions concourantes dont le déterminisme nous échappe, et qui ne donne prise qu'au calcul des probabilités.

« ...Réintégrer ainsi l'idée de potentialité dans la causalité phénoménale, ce serait restituer au temps son sens véritable qui est la conversion de l'avenir en passé...

« ...C'est le rapport de l'avenir avec le présent et avec le passé, c'est-à-dire du possible avec le réel et avec le réalisé qui constitue la connaissance propre de l'avenir.

« Cette connaissance moyenne est celle que nous exprimons par le mot de probabilité... » (Louis LAVELLE, *Du Temps et de l'Éternité*, Aubier, Paris, 1945.)

« Toute loi est la formule statistique, à une échelle donnée, de phénomènes qui lui échappent à une échelle différente.

« S'il est une idée bien acquise aujourd'hui, avec celle de la structure statistique des lois naturelles et historiques, c'est qu'elles se modifient avec le temps, au moins à l'échelle humaine... » (E. MOUNIER, *Esprit*, nov. 1948, 689).

IV. — UNE VUE D'OPTIQUE DES ANNÉES, NON D'UN MONUMENT,
MAIS D'UNE PERSONNE SITUÉE DANS LA PERSPECTIVE DÉFORMANTE DU TEMPS

(PROUST, *A la recherche du Temps perdu*, III : 613)

Sur la ligne infinie du temps, au lieu de marquer à partir du présent, par d'égales longueurs (comme sur une échelle métrique) les espaces correspondant à d'égales durées du temps chronologique, télescopons les espaces, à mesure que nous nous éloignons du présent dans le passé ou vers l'avenir, pour obtenir « cette vue d'optique des années », « cette perspective déformante du temps, imaginée par Proust.

Pour obtenir cet effet, il suffit d'employer une simple transformation d'échelle, par exemple de substituer comme échelle du temps, à l'échelle métrique ou arithmétique, l'échelle *arc-tangente*. Sans essayer de justifier mathématiquement la signification de cette échelle, disons simplement qu'à partir du zéro, considéré comme le présent, une certaine longueur représente un siècle vers le passé ou vers l'avenir, deux fois cette longueur nous écartera du présent, vers le passé ou vers l'avenir d'une durée correspondant à 230 ans; trois fois cette longueur nous reculera vers le passé ou nous projettera vers l'avenir d'une durée de 400 ans, quatre fois cette longueur de 650 ans, et six fois cette longueur de 5 millénaires.

Un semblable « télescopage » pourrait être obtenu d'autre manière : par exemple, G. Backman (*Lunds Univ. Arsskrift*. 35 : 1-68, 1939), transforme logarithmiquement le temps physique (t) en « temps organique » (x); $x = c_1 \log. t \times c_2$. Nous préférons la transformation *arc-tangente* qui donne une échelle où le présent peut être situé à t_0 , entre le passé et l'avenir.

V. — IL N'Y A PAS DE TEMPS PROPREMENT PSYCHOLOGIQUE QUE L'ON PUISSE
DISSOCIER DU TEMPS PHYSIOLOGIQUE, C'EST-A-DIRE DU RYTHME MÊME DES
FONCTIONS DU CORPS (L. LAVELLE)

Sur cette échelle *arc-tangente*, un enfant qui vient de naître et qui se situerait au temps zéro de son temps psychologique verrait une distance aussi longue séparer l'âge zéro de l'âge 10, que l'âge 40 de l'âge 70.

Une telle échelle donne une représentation particulièrement compréhensible du « temps psychologique », qui, pour Leconte du Noüy, « s'écoule quatre fois plus vite pour un homme de cinquante ans que pour un enfant de dix ».

« A l'aube de la journée », écrit Carrel (*L'Homme, cet inconnu*, p. 221), « l'homme marche allègrement le long de la rive. Et les eaux lui paraissent paresseuses. Mais elles accélèrent peu à peu leur cours. Vers midi, elles ne se laissent plus dépasser par l'homme. Quand la nuit approche, elles accélèrent encore leur vitesse ».

Des recherches devenues classiques ont permis à Leconte du Noüy de montrer que, si chez un enfant de 10 ans, il suffit de 20 jours pour obtenir la cicatrisation d'une certaine plaie, cette cicatrisation demanderait 31 jours chez le jeune homme (20 ans), 41 jours chez l'homme jeune (30 ans), 55 jours à

40 ans et 100 jours chez l'homme âgé (60 ans). En d'autres termes, si le coefficient de vitesse de cicatrisation est de 0,40 à 10 ans, il décroît à 0,26 vers 20 ans, à 0,20 vers 32 ans...

Repérons sur une ligne horizontale les âges, chacun à sa place, sur une échelle *arc-tangente* : à chaque âge, élevons une droite verticale de longueur correspondant au coefficient de cicatrisation à cet âge : les sommets de ces verticales se situent sur une ligne droite descendante qui va couper l'échelle des temps vers un point correspondant à 120 ans. Cet âge, où l'aptitude à cicatrifier une blessure devient nulle, apparaît donc comme l'âge théorique qui marque la limite de la longévité humaine, sur l'échelle du « temps biologique » ; ce concept de temps biologique, lié par Leconte du Noüy au concept « d'horloge chimique », acquiert une nouvelle signification depuis que des agents chimiothérapeutiques sont devenus utilisables pour agir sur cette horloge chimique, et notamment pour modifier la vitesse de cicatrisation des blessures.

De nombreux autres exemples d'application de l'échelle *arc-tangente* pourraient être cités ; signalons par exemple que le nombre d'heures de sommeil exigées par chaque période de 24 heures décroît de près de 24 heures dans les quelques jours qui suivent la naissance, à 12 vers la fin de la première année et à 10 vers la fin de la dixième année de l'enfant ; si nous dressons, à chaque âge, repéré sur échelle *arc-tangente*, une droite de hauteur proportionnelle au nombre d'heures de sommeil exigibles à cet âge, nous voyons encore les sommets des verticales dessiner une ligne droite.

« L'individualité de l'être vivant... est un effet dans le temps lui-même, d'une victoire contre les forces de dissolution, qui triomphent dans la matière inanimée. » (L. LAVELLE, *loc. cit.*, p. 107.)

C'est de ce point de vue que l'on a pu concevoir l'être vivant comme facteur « d'entropie négative ».

VI. — TEMPS ET FINALITÉ

Déjà Diderot, comprenant que toute création intellectuelle embrasse le présent comme le passé et l'avenir, avait dit que « l'artiste n'avait qu'un instant, mais que cet instant peut subsister avec des traces de l'instant qui a précédé et des annonces de celui qui suivra » (*Œuvres*, 12 : 90).

« Cent instants divins ne construisent pas un poème, lequel est une durée de croissance et comme une figure dans le temps... »

« Un poème est une durée pendant laquelle, lecteur, je respire une loi qui fut préparée... » (VALÉRY, *Pièces sur l'art*, p. 91 et *Variétés*, III, p. 15.)

Cette loi, dans le cas de chaque création artistique, seul l'artiste peut en avoir conscience ; par contre la loi selon laquelle les créations intellectuelles se distribuent dans le temps, pour contribuer à la croissance d'un mouvement, d'une vogue, d'une tendance, cette loi, chacun d'entre nous peut vérifier que c'est la loi de la « croissance organique », c'est-à-dire celle même qui régit le cycle de vie d'un individu, et la grandeur puis la décadence des empires.

Cette loi exprime simplement que chaque cycle de croissance débute par une période de « démarrage » (celle que les auteurs de langue anglaise appellent « lag period ») ; suit une période au cours de laquelle la vitesse de croissance

augmente selon une progression géométrique (c'est la période de croissance dite logarithmique); cette vitesse de croissance atteint un maximum au moment même où a été réalisée la moitié de la « croissance théorique maxima », ensuite de quoi elle décroît progressivement pour s'y annuler.

Si nous repérons sur une ligne horizontale les divers moments de ce cycle de croissance, sur une échelle arithmétique du temps, et que, de chaque point correspondant à une certaine valeur (t) du temps, nous élevons une droite dont la hauteur est proportionnelle à la croissance déjà réalisée à ce moment (t), nous voyons les sommets de ces verticales dessiner une courbe en S, la courbe dite « sigmoïde », symétrique par rapport au moment où la moitié de la croissance a été réalisée; prenons maintenant pour origine de l'échelle des temps ce moment que nous appellerons t_0 ; substituons à l'échelle arithmétique l'échelle *arc-tangente*, et nous transformerons notre courbe sigmoïde en une droite.

Cette aptitude à réaliser l'anamorphose en droite de la « courbe sigmoïde » est une propriété remarquable de l'échelle *arc-tangente*, propriété qui lui confère des droits éminents à la représentation graphique du « temps biologique », temps caractérisé par une symétrie des événements dans le passé et dans l'avenir, par rapport à un présent convenablement choisi; temps où les événements sont déterminés par l'avenir autant que par le passé, temps par conséquent dans lequel s'intègre la finalité.

Cette notion du temps biologique nous ramène à notre concept initial du « champ » invoqué par G. Truc : « Les fonctions électrochimiques de l'atome relèvent exclusivement du champ nucléaire... mais comme il y a un principe régulateur d'intégration... inhérent au champ de forces biologiques, il y en a un dans le domaine psychologique... »

Il est d'ailleurs remarquable que la notion du temps ait été introduite en Physique sous la forme d'une notion de force.

VII. — LE TEMPS ET LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Pour Newton, « le temps est la variable indépendante de tout objet extérieur en fonction de l'intervalle minimum, de laquelle on calcule la fluxion, c'est-à-dire l'accroissement naissant de toute quantité fluente ».

Maupertuis, qui fut l'un des premiers sur le continent européen à comprendre la philosophie newtonienne, énonça le Principe de Moindre Action, que nous pouvons introduire ainsi : Le principe des *vitesse*s *virtuelles*, que Léonard de Vinci avait utilisé pour formuler les *lois du levier*, avait été exprimé par Stevin dans cette formule : « Ce qu'on gagne en force, on le perd en vitesse ». Maupertuis dénomma « action » la somme des produits de la distance par la vitesse. Ayant admis, pour des raisons métaphysiques, que la propagation de la lumière devait se faire « aux moindres frais », il montra que les faits expérimentaux ne démentent pas l'hypothèse que la lumière se propage par la voie de *moindre action*, et il en déduisit le Principe de Moindre Action, dans l'énoncé duquel le temps ne figure pas expressément.

Le mathématicien français Lagrange, puis le mathématicien écossais Hamilton, transférant le Principe de Moindre Action du domaine de la métaphysique

dans celui de la Physique mathématique ont proposé une formule dans laquelle apparaît un terme (t) représentant le temps (Cf. M. L. DUFRÉNOY et J. DUFRÉNOY, Le Bicentenaire du Principe de Moindre Action, *L'Action Universitaire*, 17 : 62-65, 1950; J. DUFRÉNOY, art. Maupertuis in *Critical Bibliography of French Literature*, IV : 287-90, 1951 : Albert LAUTMAN, Le Problème du Temps, *Actualités Scient. et Ind.*, 1012, p. 28, Paris, 1946).

Le Principe de Moindre Action peut s'écrire algébriquement sous la forme (1) : $m\nu ds = 0$, où $m\nu$ représente le vecteur « quantité de mouvement » et ds l'élément d'arc de courbe parcouru par un « point matériel »; dans l'espace à trois dimensions, x, y, z , les trois coordonnées sont trois fonctions du paramètre (t) qui représente le temps; soit E l'énergie cinétique du point, V , son énergie potentielle (qui est fonction des trois coordonnées x, y, z et du temps); s'il y a conservation de l'énergie, on peut écrire l'équation (1) sous la forme de la fonction de Lagrange : $L(x, y, z, t) = E - V$, ou sous la forme proposée par Hamilton : $L dt = 0$.

Dans l'équation (1) c'est l'arc de courbe (ds) qui représente le *paramètre d'évolution*; dans les formules suivantes c'est le temps (t).

Le temps qui intervient dans l'énoncé des lois de la Nature n'est donc pas le temps irréversible de la durée des choses, le « temps chronologique »; le rôle qu'il joue est seulement celui d'un *facteur d'évolution*; il serait donc possible d'étudier l'évolution des phénomènes en fonction d'une autre variable indépendante; du moins si nous conservons le temps comme variable indépendante nous est-il loisible de choisir comme échelle des temps telle échelle qui nous conviendra, ce qui justifie encore l'utilisation par exemple de l'échelle *arc-tangente*. En effet, le fait pour le temps d'être le paramètre d'évolution en fonction de quoi varient les autres grandeurs est indépendant du fait que des propriétés géométriques puissent être attachées au temps des Physiciens. Et c'est pourquoi le Principe que Maupertuis avait énoncé comme ayant une valeur métaphysique a acquis une signification nouvelle à la lumière de la physique quantique.

Marie-Louise DUFRÉNOY et Jean DUFRÉNOY.