JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

E. BATICLE

A propos du problème du tricheur de Poincaré

Journal de la société statistique de Paris, tome 94 (1953), p. 214-215
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1953__94__214_0>

VII

VARIÉTÉ

A propos du problème du tricheur de Poincaré

On sait que Poincaré (1) a donné comme exemple d'application du théorème de Bayes sur la probabilité des causes, le calcul de la probabilité qu'un joueur avec qui on engage une partie d'écarté et qui retourne un roi à la première donne soit un tricheur.

Émile Borel (2) a repris ce problème et a critiqué le résultat de Poincaré, mais surtout en raison du choix de la probabilité qu'un tricheur retourne le roi dès la première donne, probabilité que Poincaré avait admise égale à l'unité. La nécessité de faire intervenir une probabilité *a priori* n'avait pas été mise en doute.

On peut se demander si une telle donnée, qui présuppose que, dans un ensemble de joueurs, on sait *a priori* qu'il y a une proportion connue de tricheurs, est bien indispensable; ou plutôt si, *en se plaçant dans le cas où l'on ne sait rien sur cette proportion*, l'expérience de Poincaré ne permet pas néanmoins de tirer une conclusion sur la probabilité qu'on a eu affaire à un tricheur.

Je supposerai qu'il s'agit d'un tricheur *ayant effectivement triché*, comme dans le problème traité par Poincaré.

Je joue n parties — soit avec le même joueur, soit avec n joueurs différents — et le roi est retourné k fois à la première donne : je me propose de calculer la probabilité que le joueur a triché x fois (ou qu'il y a x tricheurs). J'appelle p la probabilité de retourner un roi sans tricher.

Éliminant les x parties où mon partenaire a triché, la probabilité de retourner un roi $k - x$ fois est

$$C_{n-x}^{k-x}\, p^{k-x} (1-p)^{n-k}.$$

Considérons maintenant, x étant supposé donné, l'expression

$$z = \sum_{k=x}^{k=n} C_{n-x}^{k-x}\, p^{k-x} (1-p)^{n-k}. \qquad (1)$$

C'est la probabilité que la variable aléatoire K, qui peut prendre toutes les valeurs entières depuis x jusqu'à n inclus, est inférieure ou égale à k. C'est une fonction discontinue, non décroissante. A toute valeur de k correspond une seule valeur de z, et réciproquement. Mais c'est aussi une fonction non décroissante de x, si on considère k comme donné; et à une valeur de k correspond, pour tout z entre 0 et 1, une seule valeur de x, et réciproquement.

---

(1) Calcul des probabilités, rédaction Quiquet, Paris (Gauthier-Villars).
(2) Éléments de la théorie des probabilités, Paris (Hermann).

Donc, si X est la variable aléatoire susceptible de prendre les valeurs x, il y a équivalence entre les événements :

$$[\mathrm{K} \leqq k, \text{ pour } x \text{ donné}]$$

et

$$[\mathrm{X} \leqq x, \text{ pour } k \text{ donné}]$$

k et x étant liés à z par la relation (1).

Il en résulte que la probabilité z que K est inférieur ou égal à k, si on connaît x, est aussi celle que X est inférieur ou égal à x, si on connaît k. On a donc :

$$Pr \{ \mathrm{X} \leqq x \} = z = \sum_{k=x}^{k=n} \mathrm{C}_{n-x}^{k-x}\, p^{k-x} (1 - p^{n-k}).$$

En prenant la différence première de cette expression par rapport à x, on a la probabilité que X est égal à x. D'où on pourrait déduire E [X].

Il me paraît inutile de faire ce calcul. Je me contenterai de donner une application numérique.

Je suppose que j'ai joué 6 parties ($n = 6$) et que le roi a été retourné 4 fois à la première donne ($k = 4$). Je cherche la probabilité que mon partenaire a triché 0, 1, 2, 3 ou 4 fois. On a successivement, p ayant la valeur 1/8 :

$$\begin{aligned}
Pr \{ \mathrm{X} \leqq 4 \} &= \mathrm{C}_2^0 \quad (1-p)^2 + \mathrm{C}_2^1\, p \ (1-p) + \mathrm{C}_2^2\, p^2 = 1,\\
Pr \{ \mathrm{X} \leqq 3 \} &= \mathrm{C}_3^1\, p \ (1-p)^2 + \mathrm{C}_3^2\, p^2 (1-p) + \mathrm{C}_3^3\, p^3 = 0{,}330,\\
Pr \{ \mathrm{X} \leqq 2 \} &= \mathrm{C}_4^2\, p^2 (1-p)^2 + \mathrm{C}_4^3\, p^3 (1-p) + \mathrm{C}_4^4\, p^4 = 0{,}079,\\
Pr \{ \mathrm{X} \leqq 1 \} &= \mathrm{C}_5^3\, p^3 (1-p)^2 + \mathrm{C}_5^4\, p^4 (1-p) + \mathrm{C}_5^5\, p^5 = 0{,}016,\\
Pr \{ \mathrm{X} \leqq 0 \} &= \mathrm{C}_6^4\, p^4 (1-p)^2 + \mathrm{C}_6^5\, p^5 (1-p) + \mathrm{C}_6^6\, p^6 = 0{,}003.
\end{aligned}$$

D'où je tire par différences :

$Pr \{ \mathrm{X} = 0 \} = 0{,}003$, $\quad Pr \{ \mathrm{X} = 1 \} = 0{,}013$, $\quad Pr \{ \mathrm{X} = 2 \} = 0{,}063$,
$Pr \{ \mathrm{X} = 3 \} = 0{,}251$, $\quad Pr \{ \mathrm{X} = 4 \} = 0{,}670$.

Envisageons maintenant le cas où le roi a été retourné à la première donne dans toutes les parties ($k = n$). On a alors :

$$Pr \{ \mathrm{X} \leqq x \} = p^{n-x}$$

et

$$Pr \{ \mathrm{X} = x \} = p^{n-x} (1 - p).$$

Il en résulte que, si j'ai affaire à un seul joueur ($n = 1$), la probabilité, s'il retourne un roi à la première donne, qu'il soit un tricheur est égale à $1 - p = 7/8$. (1)

Paris, le 5 mars 1953.

E. BATICLE.

(1) *Remarque.* — Il est clair que le mode de raisonnement utilisé ci-dessus est susceptible de s'appliquer aux problèmes où l'on se propose de rechercher la loi de probabilité du paramètre inconnu qui s'introduit dans le calcul de la probabilité du résultat d'une épreuve.