JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

M. DUMAS

L'évaluation des probabilités des lois binômiales

Journal de la société statistique de Paris, tome 92 (1951), p. 227-233

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1951__92__227_0>

L'évaluation des probabilités des lois binômiales.

1° Le terme général de la loi binômiale est, avec des notations usuelles :

$$y = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\, p^r q^{n-r}. \tag{1}$$

La quantité à évaluer est, suivant les cas, un terme isolé ou une somme de termes consécutifs.

Il n'y aurait aucune difficulté pratique à évaluer un terme isolé, si l'on disposait couramment de tables de la fonction $\log n!$; c'est en partie cette considération qui nous a conduit à en publier une, avec sept décimales, valable jusqu'à 100, dans [2].

Il n'y a de même aucune difficulté à évaluer une somme de termes lorsque l'on dispose des tables de K. Pearson de la fonction $I_p(r, s)$, comme le signale spécialement M. Fréchet dans [4].

Ces deux possibilités ne détruisent pas l'intérêt qu'il y a à disposer de bonnes formules approchées, surtout si celles-ci sont accompagnées d'indications sur la précision qu'elles assurent. Bien des auteurs se sont penchés sur ces questions; leurs travaux nous ont inspiré quelques réflexions ainsi que le désir d'apporter une certaine contribution à cet édifice; la lecture de l'ouvrage [4] de M. Fréchet nous a incité à préciser, ainsi qu'il suit, notre point de vue sur ces questions. Les travaux antérieurs que nous avons plus spécialement pris en considération sont ceux de Mirimanoff [5] et [6], ceux de Feller, — sur lesquels notre attention a surtout été attirée par les quelques mentions faites de [3] par M. Fréchet dans [4] —, et enfin ceux de notre ouvrage [2].

2° Du point de vue de l'évaluation d'un terme isolé, les auteurs se limitent au cas des termes voisins du maximum; nous avons déjà marqué dans [2] que les formules à appliquer n'étaient pas les mêmes suivants que le terme est à une distance de ce maximum de l'ordre de $(n\,p\,q)^{1/2}$ ou de $(n\,p\,q)^{4/6}$; le cas où ce terme est très voisin du maximum est encore différent; enfin, nous aurions pu préconiser une formule spéciale pour le cas où le terme est à une extrémité; si par exemple p est inférieur à 1/2 et si r est petit, le rapport $n!/(n-r)!$ qui figure dans (1) paraît devoir être remplacé par $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$, produit auquel s'applique la formule qui suit, extraite de [2] :

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \left(n - \frac{r-1}{2}\right)^r \left[1 - \frac{(r+1)\,r\,(r-1)}{24\left(n-\frac{r-1}{2}\right)^2} + \frac{(r+1)\,r\,(r-1)\,(r-2)\,(r-3)\,(5\,r+7)}{5760\left(n-\frac{r-1}{2}\right)^4}\ldots\right] \tag{2}$$

3° Toujours du point de vue de l'évaluation d'un terme isolé dans la région du maximum, les auteurs diffèrent à la fois par la place de l'origine et par la formule qu'ils appliquent pour remplacer les factorielles. Examinons un peu ces points avant d'indiquer les résultats obtenus.

3-1. Presque tous les auteurs, et en particulier Mirimanoff, comptent les termes à partir de *np ;* pour nous, il y a une origine qui s'impose : c'est l'abscisse du sommet de la courbe représentative de la fonction continue :

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)}\, p^r q^{n-r}. \tag{3}$$

Nous avons dans [2] situé ce sommet à l'abscisse,

$$np + \frac{p-q}{2} + \frac{p-q}{24\,pq} \frac{n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \tag{4}$$

et nous pensons avoir établi que le premier terme négligé est en $1/n^4$.

Quant à Feller, il a, dans [3], pris pour origine

$$(n+1)\,p - 1/2, \tag{5}$$

ce qui est équivalent aux deux premiers termes de (4).

3-2. Pour remplacer les factorielles, chacun utilise la formule de Stirling; cependant la question vaut d'être examinée d'un peu plus près.

La formule usuelle est :

$$u\,! = \sqrt{2\,\pi\,u}\left(\frac{u}{e}\right)^u \mathrm{E}xp\left\{\frac{1}{12\,u} - \frac{1}{360\,u^3} + \frac{1}{1260\,u^5} - \cdots\right\} \tag{6}$$

Nous avons remarqué que Feller employait (6) sous une forme légèrement différente, à savoir :

$$u\,! = \frac{(u+1)\,!}{(u+1)} = \sqrt{\frac{2\,\pi}{u+1}}\left(\frac{u+1}{e}\right)^{u+1} \mathrm{E}xp\left\{\frac{1}{12\,(u+1)} - \cdots\right\}. \tag{7}$$

L'avantage qu'il y a à agir ainsi est double : on gagne un peu sur la précision, et surtout on peut appliquer la formule (7) quelle que soit la valeur de u, positive ou même nulle.

M. Fréchet a signalé en fin de [4] que nous avions attiré son attention sur l'expression suivante :

$$u\,! = \sqrt{2\,\pi}\left[\frac{u+\frac{1}{2}}{e}\right]^{u+\frac{1}{2}} \mathrm{E}xp\left\{-\frac{\omega_u}{24\left(u+\frac{1}{2}\right)}\right\} \text{ avec } 0 < \omega_u < 1. \tag{8}$$

Nous avons publié dans [2] cette même formule, sans toutefois la limiter, et depuis nous avons établi que l'exponentielle de (8) est toujours comprise entre une limite supérieure égale soit à 1, soit à

$$\mathrm{E}xp\left\{-\frac{1}{24\left(u+\frac{1}{2}\right)} + \frac{7}{2880\left(u+\frac{1}{2}\right)^3}\right\} \tag{9}$$

et une limite inférieure que l'on peut prendre égale soit à (10), soit à (11) :

$$\mathrm{E}xp\left\{-\frac{1}{24\left(u+\frac{1}{2}\right)}\right\} \tag{10}$$

$$\mathrm{E}xp\left\{-\frac{1}{24\left(u+\frac{1}{2}\right)} + \frac{7}{2880\left(u+\frac{1}{2}\right)^3} - \frac{31}{40320\left(u+\frac{1}{2}\right)^5}\right\} \tag{11}$$

On peut évidemment appliquer à (8) une remarque analogue à celle qui fait passer de (6) à (7); le terme principal est

$$\frac{\sqrt{2\,\pi}}{u+1}\left(\frac{u+\frac{3}{2}}{e}\right)^{u+\frac{3}{2}} \tag{12}$$

Voici pour quelques valeurs particulières de u, comment s'établit la comparaison entre les *termes principaux* de différentes formules que nous venons de passer en revue; des considérations pondérées de simplicité et de précision militent sérieusement en faveur de l'emploi de la formule (8). Il y a seulement que, pour les faibles valeurs de u données surtout à titre de curiosité, (7) et (12) paraissent préférables.

u	-1	$-1/2$	0	1	5
$\Gamma(u+1) = u!$	∞	$\sqrt{\pi}$	1	1	120
Formule (6). .	»	»	0	0,922	118,02
» (7). .	∞	$0{,}86\sqrt{\pi}$	0,922	0,959	118,34
» (8). .	»	$1{,}41\sqrt{\pi}$	1,075	1,028	120,91
» (12). .	∞	$1{,}04\sqrt{\pi}$	1,028	1,017	120,77

4° Voici maintenant les résultats auxquels on est conduit.

4-1. Les résultats exposés par Mirimanoff et Dovaz dans [6] peuvent être regardés comme très classiques, en ce sens que l'origine est prise en np, et que c'est la formule usuelle (6) qui a été utilisée par ces auteurs. L'expression établie est valable seulement pour npq au moins égal à 9 et pour $|x_1| = |r - np| \leqslant 2\sqrt{npq}$; de ce point de vue elle est incomplète; quoi qu'il en soit, elle est :

$$(13)\quad y = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}} \left\{ 1 + \frac{(q-p)x_1}{2npq}\left(-1 + \frac{x_1^2}{3npq}\right)\right\} + \frac{\varepsilon}{npq\sqrt{npq}} \text{ avec } |\varepsilon| < 0{,}1.$$

4-2. Feller, dans [3], prend pour origine $np + (p-q)/2$; pour $n!$, il utilise la formule (7), non pas d'ailleurs pour l'un des avantages signalés à propos de cette formule, mais sans doute parce que son emploi constitue en l'occurrence une véritable astuce de calcul, favorable à l'obtention d'un résultat relativement simple. Pour $r!$ et pour $(n-r)!$, c'est la formule (8) qui est utilisée. Plus précisément voici les formules qui ont servi aux calculs de Feller :

$$(14)\quad u! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{e}\right)^{u+\frac{1}{2}} \operatorname{E}xp\left\{\frac{-1}{24\left(u+\frac{1}{2}\right)} + \frac{7(1+\Theta_1)}{2880\left(u+\frac{1}{2}\right)^3}\right\}$$

$$(15)\quad u! = \sqrt{\frac{2\pi}{u+1}}\left(\frac{u+1}{e}\right)^{u+1} \operatorname{E}xp\left\{\frac{1}{12(u+1)} - \frac{1+\Theta_2}{360(u+1)^3}\right\}$$

$$\text{où } |\Theta_i| < \frac{1}{6} \text{ et où } \Theta_i \longrightarrow 0 \text{ lorsque } u \longrightarrow \infty.$$

Le résultat de Feller est :

Si r et $n-r$ sont au moins égaux à 4, posant

$$x_2 = r - np - (p-q)/2 \quad\text{et}\quad \sigma^2 = (n+1)pq$$

$$(16)\quad y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \operatorname{E}xp\left\{-\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{p^{\nu-1} - (-q)^{\nu-1}}{\nu(\nu-1)} \frac{x_2^\nu}{\sigma^{2\nu-2}} + \frac{1}{24}\sum_{\nu=3}^{\infty}(p^{\nu-1} - (-q)^{\nu-1})\frac{x_2^{\nu-2}}{\sigma^{2\nu-2}} + \frac{1+2pq}{24\sigma^2} - \rho\right\}$$

avec

$$0 \leqslant \rho \leqslant \frac{7}{6}\left\{\frac{1}{360(n+1)^3} + \frac{7}{2880}\left(\frac{1}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(n-r+\frac{1}{2}\right)^3}\right)\right\}$$

Ce résultat est remarquable à plus d'un titre; il suit certainement la réalité de très près, et les termes en x_2 sont donnés sous forme de séries infinies, pour la première fois semble-t-il. S'il y a mieux à faire, ce ne peut guère être que dans les voies suivantes : partir d'une origine plus précise, utiliser (8) au lieu de (7) même pour $n!$, et surtout limiter (8) de façon plus stricte que cela est fait par le Θ_i de Feller.

4-3. Nous avons publié dans [2] ce à quoi conduit ce qui nous paraît pouvoir être fait de mieux à la fois des points de vue de l'origine et des expressions des factorielles, mais nous n'avions pas eu alors l'idée, comme Feller dont les travaux n'étaient pas publiés au moment où nous établissions notre manuscrit, de les présenter sous forme de séries infinies.

Nous donnons ci-après (17) qui est extrait de [2], et nous y ajoutons une expression inédite — l'expression (18) — dans laquelle se trouvent, de façon explicite ou sous l'un des signes Σ, tous les termes qui figurent dans (17). Cette expression (18) est obtenue en écrivant que de la quantité $n!/r!\,(n-r)!$ on a d'une part une limite *supérieure* si l'on remplace $n!$ par une de ses limites supérieures — en l'occurrence, celle donnée par (9) — et $r!$ ainsi que $(n-r)!$ par des limites inférieures — en l'occurrence celles données par (10) — et on a d'autre part une limite *inférieure* si l'on fait usage de (11) pour $n!$ et de (9) pour $r!$ et pour $(n-r)!$

Posant :

$$a = \frac{p-q}{24\,p\,q}\,\frac{n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$x = r - n\,p - (p-q)/2 - a \qquad \text{et} \qquad \sigma_1^2 = \left(n+\frac{1}{2}\right) p\,q$$

$$(17) \qquad y = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{Exp}\left\{ \frac{1}{\sigma_1^2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{(p-q)^2}{24}\right) + \frac{1}{\sigma_1^4}\left(-\frac{x^3\,(p-q)}{6} + \frac{x^2\,p\,q}{4} - \frac{(1-p\,q)\,p\,q}{48}\right) \right.$$
$$+ \frac{1}{\sigma_1^6}\left[-\frac{x^4\,(1-3\,p\,q)}{12} + \frac{x^3\,(p-q)\,p\,q}{6} + \frac{x^2\,(1-2\,p\,q-6\,p^2\,q^2)}{48} + \frac{-9+22\,p\,q+60\,p^2\,q^2-16\,p^3\,q^3}{5760}\right]$$
$$+ \frac{1}{\sigma_1^8}\left[-\frac{x^5\,(p-q)\,(1-2\,p\,q)}{20} + \frac{x^4\,(1-3\,p\,q)\,p\,q}{8} + \cdots\right]$$
$$\left. + \text{ termes en } 1/\sigma_1^{2b}\ (b \text{ entier} > 4) \text{ et } x \text{ (au plus à la puissance } b+1) \right\}$$

$$(18)\ y = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{E}xp\left\{ -\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{p^{\nu-1}\left(x-\frac{q}{2}+a\right)^{\nu} - (-q)^{\nu-1}\left(x+\frac{p}{2}+a\right)^{\nu}}{\nu\,(\nu-1)\,\sigma_1^{2\nu-2}} \right.$$
$$+ \frac{1}{24}\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1^{2\nu-2}}\left[p^{\nu-1}\left(x-\frac{q}{2}+a\right)^{\nu-2} - (-q)^{\nu-1}\left(x+\frac{p}{2}+a\right)^{\nu-2}\right]$$
$$\left. + \frac{1-p\,q}{24\,\sigma_1^2} - \frac{7}{2880}\,\frac{1-3\,p\,q-p^3\,q^3}{\sigma_1^6} - \lambda \right\}$$

avec

$$-\frac{7}{2880}\,\frac{1-3\,p\,q}{\sigma_1^6} \leqslant \lambda \qquad \text{et}$$

$$\lambda \leqslant \frac{7}{2880}\left[\frac{1}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(n-r+\frac{1}{2}\right)^3} - \frac{1-3\,p\,q}{\sigma_1^6}\right] + \frac{31}{40320\left(n+\frac{1}{2}\right)^5}$$

L'expression (18) ci-dessus comparée à (16), c'est-à-dire à celle de Feller, n'a pas pour elle le mérite de la simplicité, mais elle a des qualités qui méritent de retenir l'attention, et qui apparaissent surtout si l'on considère son développement partiel que constitue (17); ainsi :

— le coefficient de x est de l'ordre de $1/n^2$ dans (16); il est de l'ordre de $1/n^4$ dans (18);

— pour $p=q=1/2$, le terme constant sous Exp est de l'ordre de $1/4n$ dans (16); il est de l'ordre de $1/256\, n^2$ dans (18);

— l'écart entre les deux limites soit de ρ, soit de λ est sensiblement plus faible dans le cas de (18) que dans celui de (16);

— et surtout, le résultat (18), au contraire de (16), est donné comme valable quels que soient r et $n-r$ qui, analytiquement, doivent seulement être supérieurs à $-1/2$.

4-4. Peut-être est-il parfois avantageux de gagner en simplicité, quitte à perdre un peu en précision; dans cet ordre d'idées, on peut dans (18) supprimer le terme $7\,(1-3\,pq)/2880\sigma_1{}^6$ à la fois sous Exp et dans l'une et l'autre des limites de λ, car ce terme n'a été mentionné à ces endroits qu'afin de pouvoir écrire de façon complète le terme en $1/\sigma_1{}^6$ de la formule (17); mais on peut surtout partir, comme l'a fait Feller, de la formule (7) pour évaluer $n!$: si pour tout le reste on suit la voie qui conduit aux formules (17) et (18), on retrouve exactement la formule (16), sauf à remplacer dans cette dernière x_2 par $x+a$ et à remplacer par l'unité le coefficient 7/6 de l'inégalité limitant ρ supérieurement: du point de vue analytique, il suffit encore que r et $n-r$ soient supérieurs à $-1/2$.

5° Si l'on se borne au cas $p=q=1/2$, de nombreuses simplifications se produisent; en particulier tous les auteurs comptent les abscisses à partir de la même origine $n/2$. Posons donc uniformément

$$x = r - n/2.$$

5.1. Mirimanoff indique dans [5] que moyennant les conditions

$$|x| \leqslant 3\sqrt{n/2} \;\text{ si } n \geqslant 32 \text{ ou } |x| \leqslant 4\sqrt{n/2} \text{ si } n \geqslant 50,$$

on a

$$(19) \qquad y_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\,\mathrm{E}xp\left\{-\frac{2x^2}{n} + \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{4} + \frac{2x^2}{n} - \frac{4x^4}{3n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\chi\right\}$$

$$\text{avec } |\chi| < \frac{1}{9}\,\mathrm{E}xp\left\{\frac{2x^2}{n}\right\}.$$

5.2. La formule de Feller améliorée comme il est dit en 4—4, donne sans aucune restriction concernant n :

$$(20) \qquad y_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi\,(n+1)}}\,\mathrm{E}xp\left\{-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{x^{2t}}{t\,(2t-1)}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{2t-1}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{12}\sum_{t=2}^{\infty} x^{2t-2}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{2t-1} + \frac{1}{4\,(n+1)} - \rho\right\}$$

avec

$$0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{360\,(n+1)^3} + \frac{7}{2880}\left[\frac{1}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(n-r+\frac{1}{2}\right)^3}\right]$$

5.3. Les formules (17) et (18) donnent respectivement :

$$(21)\qquad y_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,\mathrm{E}xp\left\{-\frac{2x^2}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(x^2-\frac{1}{16}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}\left(-\frac{4x^4}{3}+\frac{x^2}{6}\right)+\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}(2x^4\ldots.)\right\}$$

$$(22)\quad y_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,\mathrm{E}xp\left\{-\sum_{\nu=2}^{\infty}2^{\nu-1}\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^{\nu}-(-1)^{\nu-1}\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\nu(\nu-1)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24}\sum_{\nu=3}^{\infty}2^{\nu-1}\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^{\nu-2}-(-1)^{\nu-1}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\nu-2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}}+\frac{1}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)}-\frac{7}{192\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}-\lambda_1\right\}$$

avec

$$-\frac{7}{180\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}\leqslant\lambda_1 \qquad \text{et}$$

$$\lambda_1\leqslant\frac{7}{2880}\left(\frac{1}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{1}{\left(n-r+\frac{1}{2}\right)^3}\right)-\frac{7}{180\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{31}{40320\left(n+\frac{1}{2}\right)^5}.$$

5.4 Un résultat intermédiaire des points de vue simplicité et précision entre ceux de 5.2 et de 5.3, s'obtient en faisant apparaître dans l'expression de y préparée pour aboutir à (18) puis à (22), le facteur $\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)/(n+1)\right]^n$; il est :

$$(23)\qquad y_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,\mathrm{E}xp\left\{-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{x^{2t}}{t(2t-1)}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{2t-1}\right.$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{t=2}^{\infty}x^{2t-2}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{2t-1}$$

$$\left.-\frac{1}{16(n+1)^2}\frac{n+\frac{2}{3}}{n+\frac{1}{2}}-\sum_{t=4}^{\infty}\frac{1}{t\times 2^t(n+1)^{t-1}}-\frac{7}{192\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}-\lambda_1\right\}$$

avec pour λ_1 la même valeur qu'en 5.3.

La formule (23) se prête à une évaluation des erreurs commises si l'on se borne aux premiers termes des sommes qui se trouvent sous le signe Exp. Ainsi, avec $0<\varepsilon_t<1$:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{x^{2t}}{t(2t-1)}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{2t-1}=\frac{2x^2}{n+1}+\frac{4x^4}{3(n+1)^3}+\varepsilon_1\frac{16x^6}{3(n+1)^5}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(n+1)^2}}$$

$$\frac{1}{12}\sum_{t=2}^{\infty}x^{2t-2}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{2t-1}=\frac{2x^2}{3(n+1)^3}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(n+1)^2}}.$$

$$\sum_{t=4}^{\infty}\frac{1}{t\times 2^t(n+1)^{t-1}}=\varepsilon_2\frac{1}{64(n+1)^3}\frac{1}{1-\frac{1}{2(n+1)}}$$

6° Les différentes expressions passées en revue au 5° attirent l'attention sur les valeurs qu'elles font correspondre à $x=0$, suivant d'ailleurs que l'on accepte ou non le calcul d'un terme sous le signe Exp. Le tableau suivant est caractéristique des résultats que l'on obtient; il fait en particulier apparaître la grande précision qui correspond au terme principal des formules (21) à (23), sans aucun terme sous Exp.

FORMULE (1)	n vraie valeur	0 1,000	1 0,6366	2 0,50000	6 0,31250	32 0,13995
(19)	$\sqrt{2/\pi\, n}$		0,7979	0,5642	0,32574	0,14105
(20)	$\sqrt{2/\pi\,(n+1)}$	0,798	0,5642	0,4607	0,30157	0,13889
(21) à (23)	$\sqrt{2/\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$	1,128	0,6515	0,5046	0,31296	0,13996
(19)	$\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\,\mathrm{E}xp\left\{-\frac{1}{4n}\right\}$	0,000	0,6214	0,4979	0,31213	0,13995
(20)	$\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1)}}\,\mathrm{E}xp\left\{\frac{1}{4(n+1)}\right\}$	1,024	0,6398	0,5007	0,31254	0,13995
(21) et (22)	$\sqrt{\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,\mathrm{E}xp\left\{-\frac{1}{16\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right\}$	0,879	0,6336	0,4996	0,31249	0,13995
(23)	$\sqrt{\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,\mathrm{E}xp\left\{-\frac{1}{16(n+1)^2}\cdot\frac{n+\frac{2}{3}}{n+\frac{1}{2}}\right\}$	1,038	0,6401	0,5009	0,31255	0,13995

7° *Bibliographie.*

[1] Bernstein S. *Académie des Sciences de l'URSS*. Série Math. 1943, p. 3 à 16 (non consulté directement).

[2] Dumas M. et Maheu P. *Les méthodes statistiques et leurs applications dans le domaine des techniques industrielles*. Mémorial de l'artillerie française, 1948 et suivantes et Eyrolles, éditeur, 1951.

[3] Feller W. *On the Normal Approximation to the Binomial Distribution*. The Annals of Mathematical Statistics. Vol. XVI. Déc. 1945.

[4] Fréchet M. *Généralités sur les probabilités*. 2e édition 1950. Gauthier-Villars.

[5] Mirimanoff. C. R. des séances de l'Académie des Sciences. Tome 182, 1926, p. 1119.

[6] Mirimanoff et Dovaz. *Les épreuves répétées et la formule de Laplace*. C. R. Ac. des Sciences T. 185. 1927, p. 827.

M. Dumas.