Journal de la société statistique de Paris

Paul Vincent

Potentiel d'accroissement d'une population

Journal de la société statistique de Paris, tome 86 (1945), p. 16-39

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1945__86__16_0>

IV

POTENTIEL D'ACCROISSEMENT D'UNE POPULATION

PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE THÉORIQUE

I. — *Généralités.*

On sait que Lotka a démontré (1) que toute population soumise indéfiniment à des lois de mortalité et de fécondité invariables tend à acquérir une composition par âge fixe, indépendante de la composition par âge initiale, et que son effectif tend asymptotiquement vers la loi exponentielle suivante :

$$N(t) = K e^{\rho t} \tag{1}$$

où ρ est une constante appelée par l'auteur « taux intrinsèque d'accroissement naturel » ne dépendant que des lois de mortalité et de fécondité fixes qui régissent la population envisagée, et K une constante dépendant de la composition par âge initiale, de l'effectif initial de cette population et de ces lois de mortalité et de fécondité.

Il en résulte que, si deux populations A et B sont soumises aux mêmes lois de mortalité et de fécondité à partir d'un instant pris pour origine, elles tendent à adopter la même composition par âge et que leurs effectifs pourront s'exprimer, à une date suffisamment éloignée ($t > T$ choisi suffisamment grand), par les formules : $N_A(t) = K_A e^{\rho t}$, et $N_B(t) = K_B e^{\rho t}$, à des quantités très petites près. De sorte que le rapport $\frac{N_B(t)}{N_A(t)}$ de l'effectif de la population B à celui de la population A, à la même date, tend vers une limite fixe $\nu_A^B = \frac{K_B}{K_A}$, et que nos deux populations demeurent, à partir de l'époque T, en complète similitude dans ce rapport. Nous supposerons, dans la suite de cet exposé, que les effectifs des deux populations A et B sont égaux à l'unité à l'instant choisi pour origine, de sorte que la limite ν_A^B est définie par les compositions par âge initiales des deux populations A et B et par les lois de mortalité et de fécondité invariables et identiques auxquelles elles sont soumises à partir de l'instant initial.

(1) Voir à ce sujet notamment : Alfred J. LOTKA : *Théorie analytique des associations biologiques.* — Deuxième partie : *Analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine.* Paris, 1939, chez Hermann et Cie. Collection des « Actualités scientifiques et industrielles », n° 780. — Nous adopterons dans cet exposé les notations de cet ouvrage.

II. — *Énoncé de la loi.*

Ayant établi des perspectives démographiques pour la France (Population A) et l'Italie (Population B) en supposant les populations de ces pays soumises, à partir de 1945, aux mêmes lois de mortalité et de fécondité invariables dans les deux hypothèses suivantes :

1° Les taux de mortalité et de fécondité par âge sont ceux constatés en France vers 1931 ;

2° Les taux de mortalité et de fécondité par âge sont ceux constatés en Italie vers la même époque, nous avons formé le rapport $\frac{N_B(t)}{N_A(t)}$ dans chacune de ces hypothèses et nous avons trouvé les résultats, figurant dans le tableau ci-dessous :

TABLEAU I

DATE (1945 + t)	Valeur de $\frac{N_B(t)}{N_A(t)}$		DATE (1945 + t)	Valeur de $\frac{N_B(t)}{N_A(t)}$	
	HYPOTHÈSE I	HYPOTHÈSE II		HYPOTHÈSE I	HYPOTHÈSE II
1945.	1,000	1,000	1985	1,171	1,162
1950.	1,024	1,023	1990	1,179	1,167
1955.	1,048	1,047	1995	1,184	1,170
1960.	1,076	1,071	2000	1,187	1,172
1965.	1,099	1,095	2005	1,188	1,174
1970.	1,124	1,118	2010	1,188	1,174
1975.	1,144	1,138	2015	1,187	1,173
1980.	1,159	1,153	2020	1,185	1,171

On ne peut manquer d'être frappé par la concordance des valeurs de $\frac{N_B(t)}{N_A(t)}$ dans les deux hypothèses et, quoique les perspectives ne soient pas poussées assez loin dans le temps pour qu'on puisse considérer comme atteintes les limites ν_A^B correspondant à chaque hypothèse, on a l'impression que ces valeurs, déterminées rigoureusement, seraient fort peu différentes entre elles puisque l'écart maximum constaté, sur ce tableau, entre les valeurs de $\frac{N_B(t)}{N_A(t)}$ correspondant à la même date t dans les deux hypothèses, n'atteint pas la valeur très faible de 1,3 %. C'est là un résultat fort curieux qui semble indiquer que la limite ν_A^B est, en première approximation, indépendante des lois de mortalité et de fécondité appliquées. En effet, les différences entres les lois de fécondité de l'Italie et de la France sont considérables et parmi les plus importantes que puissent présenter deux pays de civilisation occidentale. Les différences de mortalité, sans être aussi marquées, ne sont pas non plus négligeables : la mortalité infantile de l'Italie en particulier était, vers 1931, beaucoup plus forte que celle de la France (10,2 °/₀₀ contre 7,2 °/₀₀ pour le sexe féminin ; 11,5 °/₀₀ contre 9 °/₀₀ pour le sexe masculin) et la mortalité des adultes était par contre plus faible en Italie qu'en France à cette époque.

Si donc, dans deux hypothèses aussi dissemblables, correspondant à des taux intrinsèques d'accroissement naturel non seulement très différents, mais de signes opposés, les limites ν_A^B sont très voisines, il semble que, dans certaines limites qui doivent correspondre aux situations pratiques pouvant se présenter dans nos pays, on puisse énoncer la loi suivante :

La limite vers laquelle tend le rapport des effectifs de deux populations soumises aux mêmes lois de mortalité et de fécondité invariables est indépendante de ces lois.

Naturellement, cette loi a besoin, pour que sa validité soit reconnue avec certitude, d'être soit justifiée théoriquement par les ressources de l'analyse démographique, soit vérifiée empiriquement sur d'autres cas que celui que nous signalons.

III. — *Définition du « potentiel d'accroissement » d'une population.*

Admettons pour l'instant la validité de cette loi dans certaines limites qu'il importera de préciser, mais correspondant aux cas pratiques que nous aurons à examiner. Il en résulte une conséquence remarquable : ν_A^B ne dépend plus que de la composition par âge initiale des populations A et B. ν_A^B prend ainsi la valeur d'un indice du potentiel d'accroissement relatif d'une des populations par rapport à l'autre impliqué par les compositions par âge différentes des deux populations. Une des conséquences principales du vieillissement de la population étant de modifier les perspectives d'accroissement de cette population, ν_A^B nous fournira un moyen de mesurer les différences de situation de deux pays à cet égard. Bien plus, il est possible de comparer entre elles de cette manière non pas seulement deux populations, mais tout un ensemble de populations par un choix convenable d'une population de référence.

L'idée qui vient tout naturellement à l'esprit est, puisque le choix de ces lois ne modifie pas, par hypothèse, la valeur de ν_A^B, de nous fixer arbitrairement des lois de mortalité et de fécondité correspondant à une population stationnaire (lois que nous désignerons par la suite, pour simplifier, par l'expression « lois stationnaires »), et de prendre pour population de référence la population stationnaire d'effectif unité ainsi déterminée. L'effectif de toute population A, d'effectif initial $N_A(o) = 1$, soumise indéfiniment à ces lois stationnaires, tend vers une limite ν_A, puisque les lois choisies sont telles que le taux intrinsèque d'accroissement naturel ρ soit nul. Cette limite ν_A ne dépend que de la composition par âge initiale de A et nous fournit donc le moyen de repérer, dans une échelle définie par le choix de la population stationnaire de référence, le potentiel d'accroissement impliqué par la composition par âge de notre population. Mais il y a lieu de faire la très importante remarque suivante : si une autre population B, d'effectif initial unité $N_B(o) = 1$, tend, soumise aux mêmes lois, vers la valeur ν_B, nous avons :

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \nu_A^B \qquad (2)$$

indépendant de la population stationnaire de référence choisie. Notre échelle est donc arbitraire à un facteur constant près, mais les comparaisons qui découleront du rapprochement des valeurs de ν trouvées pour différentes populations seront indépendantes du choix de la population de référence.

Puisque les comparaisons entre populations ne peuvent s'établir qu'en effectuant des rapports entre les valeurs de ν correspondantes, il est logique d'introduire la considération du logarithme de ν et de poser : $\nu = e^{v}$, l'échelle des v étant ainsi définie à une constante près, cette constante étant déterminée par le choix de la population stationnaire de référence.

Pour préciser le caractère de v, introduisons-le dans la formule (1) donnant l'effectif $N_B(t)$, à l'instant $t > T$, d'une population B soumise à des lois de mortalité et de fécondité arbitraires, mais invariables, correspondant à une certaine valeur de ρ, et que nous appellerons désormais, pour la commodité du discours, « lois ρ ».

On a donc, pour $t > T$: $N_B(t) = K_B\, e^{\rho t}$.

D'autre part, si nous considérons la population A définie par le fait qu'elle a, dès l'instant origine, la composition par âge invariable vers laquelle tend toute population soumise aux lois ρ, elle aura, soumise à ces lois ρ, un effectif, à un instant t quelconque, égal à : $N_A(t) = e^{\rho t}$.

Il en résulte que d'après (2), nous avons :

$$\nu_A^B = \frac{N_B(t)}{N_A(t)} = K_B = \frac{\nu_B}{\nu_A}$$

d'où :

$$N_B(t) = \frac{\nu_B}{\nu_A}\, e^{\rho t} = e^{\rho t + (v_B - v_A)} \qquad (3)$$

Si nous examinons cette formule, nous y voyons apparaître la décomposition de $N_B(t)$ en deux facteurs :

1° Le facteur $e^{\rho t}$ qui exprime ce que serait devenue la population B à l'instant t, si elle avait eu dès l'origine la composition par âge stable vers laquelle elle tend, autrement dit si elle avait eu la composition de A,

2° Le facteur $e^{v_B - v_A}$ qui indique l'accroissement relatif de la population résultant à l'instant $t > T$ de la différence de composition par âge de la population B par rapport à la population A. Ce facteur est constant pour des lois ρ données, et l'effectif de B s'en trouve, à tout instant $t > T$, modifié d'une proportion fixe.

Lorsque les lois ρ varient, v_B reste fixe, mais v_A, qui dépend de ces lois, varie. La formule (3) nous montre la possibilité d'existence de lois ρ telles que $v_A = v_B$ et telles, par conséquent, que l'influence de la composition par âge initiale de B soit nulle à la limite. Ce résultat est intéressant, car il y a lieu de remarquer que l'égalité de v_A et de v_B n'implique pas que la population B ait, à l'origine, une composition par âge correspondant à une limite stable. Au contraire, on peut concevoir une population B arbitraire et un système de lois ρ telles que $v_A = v_B$. A chaque détermination de ce système correspondra un ρ déterminé et la population B, soumise à ces lois, tendra vers $e^{\rho t}$, en oscillant en général autour de cette valeur, sauf dans le cas très particulier où la composition initiale de B peut représenter une limite stable et pour les lois ρ correspondant à cette composition. Mais naturellement, il se peut que les lois ρ correspondent à l'égalité $v_A = v_B$ soient, pour certaines populations B, complètement hors du champ de l'observation possible, ou même tout simplement en dehors des limites de validité de la loi que nous avons admise (1).

(1) Remarquons que la formule (3) nous fournit un moyen commode d'avoir une approximation de la population N (t) pour les valeurs assez grandes de t, lorsqu'on établit des perspectives « à taux cons-

La quantité ρ, que nous avons introduite, mesure ce que nous appellerons le « potentiel d'accroissement » de la population étudiée (1). La suite de cet exposé nous montrera que, pratiquement, la considération de ρ ne ferait qu'introduire un calcul supplémentaire sans bénéfice pratique, puisqu'il sera toujours loisible, en cas de besoin, de prendre le logarithme de ν et que nous pourrons toujours adopter pour les représentations graphiques de ν une échelle logarithmique. C'est pourquoi nous n'utiliserons désormais que la quantité ν à laquelle nous donnerons le nom d' « indice d'accroissement potentiel ».

IV. — *Calcul de l'indice d'accroissement potentiel.*

Examinons maintenant comment nous pouvons effectuer pratiquement le calcul de ν pour les différentes populations dont nous voulons étudier le potentiel d'accroissement. Nous allons tout d'abord supposer choisie notre population stationnaire de référence, sous la forme suivante :

1° Une table de mortalité du sexe féminin;
2° Une table de fécondité féminine;
3° Un taux de masculinité des naissances;
4° Une table de mortalité du sexe masculin.

Soit à calculer, à une certaine date, le ν d'une population dont on connaît, la répartition par âge et par sexe à la date donnée prise pour origine.

Le problème revient à chercher ce que deviendra, à une époque très éloignée, l'effectif de cette population soumise aux lois stationnaires définies ci-dessus. Considérons un élément de population féminine d'âge a de notre population, soit $c\ (a)\ da$, et cherchons quelle population lui correspond à l'instant fixe $t > T$. Nous étudierons successivement plusieurs cas.

1° $a < a_1$, âge limite inférieur de la fécondité féminine. Nous pouvons considérer l'élément de population féminine $c\ (a)\ da$ comme issu de $\frac{c\ (a)}{p\ (a)}.da$ naissances féminines survenues à l'instant - a, les filles de cette génération ayant été dès la naissance soumises à la loi de mortalité de notre population stationnaire — $p\ (a)$ désignant la probabilité de survie des filles à l'âge a, mesurée à la naissance.

Au cours de leur vie, les filles de notre élément de population donneront naissance à un nombre de filles égal à : $\frac{c\ (a)}{p\ (a)}\ .\ da$, puisque, par hypothèse, nos lois de mortalité et de fécondité correspondent à une population stationnaire. Mais la distribution des naissances féminines issues de cette génération s'étalera dans le temps et, à la limite, elle aura une valeur annuelle constante égale à :

$$\frac{c\ (a)\ .\ da}{A_0\ .\ p\ (a)}$$

où A_0 désigne l'âge moyen auquel une mère donne naissance à ses filles :

$$A_0 = \int_0^\infty a.\ p\ (a).\ m\ (a).\ da$$

— $m\ (a)\ .\ da$ désignant la probabilité pour une mère d'âge a de donner naissance à une fille dans le temps élémentaire da . A cette valeur constante des naissances féminines annuelles issues, à la limite, de notre élément de population initiale, correspond un effectif de population féminine à l'instant $t > T$ égal à :

$$\frac{c\ (a)\ .\ da}{b_0\ .\ A_0\ .\ p\ (a)} \qquad (4)$$

où b_0 désigne le taux de natalité féminine dans la population stationnaire, inverse de l'espérance de vie des filles à l'âge 0 :

$$b_0 = \frac{1}{\int_0^\infty p\ (a)\ .\ da} = \frac{1}{L_0}.$$

La formule (4) nous permet donc de calculer la population féminine élémentaire correspondant à l'instant t à l'élément de population initiale envisagé.

---

tants » : il suffit de déterminer la composition par âge de la population limite stable A correspondant aux lois ρ choisies comme base de ces perspectives, et de calculer ν_A et ν_B par la méthode que nous indiquons plus loin. Rappelons qu'avec les notations dont nous ferons usage, la composition par âge de la population A est donnée par la formule : $c_\rho\ (a) = b_\rho\ .\ e^{-\rho a}\ .\ p\ (a)$.

(1) Il est bien entendu que le mot « accroissement » doit être compris ici comme une augmentation relative de la population obtenue une fois pour toutes, notion complètement différente de celle à laquelle correspondent les divers taux d'accroissement naturel qui impliquent des accroissements cumulatifs.

2° $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$, a_2 désignant l'âge limite supérieur de la fécondité féminine. Notre élément de population initiale $c\ (a)\ .\ da$ peut toujours être considéré comme issu de $\frac{c\ (a)}{p\ (a)}\ .\ da$ filles nées à l'époque - a ; mais une fraction seulement de la première génération féminine issue de ces filles naîtra après l'époque 0, cette fraction ayant pour valeur :

$$f_0\ (a) = \frac{\int_a^\infty p\ (x)\ .\ m\ (x)\ .\ dx}{\int_0^\infty p\ (x)\ .\ m\ (x)\ .\ dx}$$

ou, puisque le dénominateur est égal à 1 :

$$f_0\ (a) = \int_a^\infty p\ (x)\ .\ m\ (x)\ .\ dx.$$

Les filles, de la première génération issue de notre élément de population, nées postérieurement à l'instant 0 seront donc en nombre égal à :

$$\frac{c\ (a)\ .\ f_0\ (a)}{p\ (a)}\ .\ da.$$

Nous pouvons répéter pour ces naissances le raisonnement fait au paragraphe précédent, et il en résulte qu'à notre élément de population initiale correspond à l'instant $t > \mathrm{T}$ une population féminine élémentaire égale à :

$$\frac{c\ (a)\ .\ f_0\ (a)}{b_0\ .\ \mathrm{A}_0\ .\ p\ (a)}\ .\ da. \tag{5}$$

3° $a > a_2$. Les filles d'âge a meurent, au cours de la période postérieure à l'instant 0, sans donner naissance à aucune fille au cours de cette période, la population féminine qui leur correspond à l'instant $t > \mathrm{T}$ est donc nulle.

Finalement, nous pouvons remarquer que la formule (5) est générale et s'applique aux trois cas que nous avons envisagés, puisque $f_0\ (a) = 1$ pour $a < a_1$ et que (5) se confond alors avec (4), et puisque $f_0\ (a) = 0$ pour $a > a_2$, ce qui rend (5) nul dans le troisième cas.

A notre population initiale totale correspond donc à l'instant $t > \mathrm{T}$ un effectif de la population féminine égal à :

$$\int_0^\infty \frac{c\ (a)\ .\ f_0\ (a)}{b_0\ .\ \mathrm{A}_0\ .\ p\ (a)}\ .\ da$$

et pour avoir ν, il suffira de multiplier la quantité précédente par le rapport $\frac{1}{\mathrm{F}_0}$ de la population totale à la population féminine dans notre population stationnaire :

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{F}_0\ .\ b_0\ .\ \mathrm{A}_0} \int_0^\infty \frac{c\ (a)\ .\ f_0\ (a)}{p\ (a)}\ .\ da. \tag{6}$$

Au point de vue pratique, l'intégrale précédente sera remplacée pour le calcul, par la sommation :

$$\nu = \sum_0^{a_2} \frac{1}{\mathrm{F}_0\ .\ b_0\ .\ \mathrm{A}_0}\ .\ \frac{f_0\ (a)}{p\ (a)}\ .\ c\ (a).$$

Si nous remarquons que tous les facteurs autres que $c\ (a)$ ne dépendent que de la population stationnaire de référence choisie, nous pouvons calculer pour cette population de référence les coefficients :

$$\mathrm{H}_a = \frac{1}{\mathrm{F}_0\ .\ b_0\ .\ \mathrm{A}_0}\ .\ \frac{f_0\ (a)}{p\ (a)} \tag{7}$$

et les réunir dans une table correspondant à notre population de référence. Le calcul de ν se ramènera ainsi au calcul de :

$$\nu = \sum_0^{a_2} \mathrm{H}_a\ .\ c\ (a). \tag{8}$$

Si nous calculons les coefficients H_a année par année d'âge, nous aurons ainsi une table de 50 coefficients, puisqu'à partir de cinquante ans $f_0\ (a) = 0$, et le calcul de ν se ramènera à effectuer 50 multiplications et une addition. En opérant par groupe de cinq années d'âge, le calcul de ν se réduira à onze opérations arithmétiques élémentaires. Remarquons enfin que si nous voulons calculer simultanément les ν de différentes populations, nous pourrons effectuer les multiplications en série, ce qui facilitera encore le travail.

ν nous apparaît ainsi, d'après la formule (8), comme une somme pondérée des effectifs proportionnels des générations constituant la population étudiée (1). Du point de vue des perspectives d'avenir, cette population nous semble alors comprendre deux fractions bien différentes : une fraction « active », constituée par les femmes âgées de moins de cinquante ans, et un « poids mort », constitué par le reste de la population; cette dernière fraction n'intervient en effet dans le calcul que pour diminuer tous les $c\ (a)$ de la fraction active dans la proportion de la part du «poids mort» dans la population totale. On voit la différence considérable qui existe entre ν et un indice tel que l'âge moyen d'une population, par exemple, puisque dans le calcul de l'âge moyen les vieillards interviennent pour une grande part, alors qu'il est bien évident qu'il n'y a à tenir compte que de leur proportion numérique globale pour mesurer les perspectives d'accroissement d'une population. L'examen de la formule (7) nous montre que lorsque a augmente à partir de 0, H_a commence par croître proportionnellement à $\frac{1}{p\ (a)}$, ce qui est bien normal puisque chaque génération féminine d'âge a doit intervenir d'autant plus dans la population future qu'elle a déjà subi plus longtemps la mortalité du jeune âge et qu'elle aura par conséquent moins à être réduite désormais par la mortalité avant d'arriver à l'âge de procréation. A partir de l'âge limite inférieur de la fécondité a_1, l'effet de $f_0\ (a)$ commence à se faire sentir, et l'influence de sa décroissance; qui va devenir bientôt plus rapide que celle de $p\ (a)$, ne va pas tarder à devenir prépondérante, si bien que H_a va se mettre à décroître pour atteindre la valeur *0* à l'âge limite supérieur de la fécondité a_2.

V. — *Choix d'une population de référence et calcul de la table des coefficients.*

Pour préciser davantage la variation de H_a en fonction de a, il nous faut entreprendre le calcul de la table de H_a et, pour cela, choisir une population stationnaire. Pour ce faire, nous avons défini une population stationnaire correspondant aux tables de mortalité de la Suède pour la période 1921-1930. Les raisons ayant motivé ce choix sont les suivantes : il y a naturellement intérêt à prendre une population stationnaire se rapprochant le plus possible de conditions réalisées dans la pratique. D'autre part, nous aurons besoin d'une bonne table de fécondité et on sait que les statistiques des naissances suivant l'âge de la mère sont assez récentes. Il nous fallait donc trouver un pays ayant eu, dans une période récente, un taux net de reproduction voisin de 1. La Suède répondait à ces conditions pour la période choisie, puisque son taux net de reproduction est passé de 1,06 pour la période 1921-1925, à 0,86 pour la période 1926-1930. Les statistiques suédoises nous donnent le classement des accouchements par âge de la mère, année par année d'âge, pour la période 1921-1930, une évaluation des effectifs moyens des femmes de chaque âge au cours de la même période, ainsi que des tables de mortalité pour cette période. Nous avons donc tous les éléments d'un calcul précis. Le choix de la Suède présente encore un autre intérêt : les effectifs des générations successives sont assez constantes, et on n'a pas à craindre que la présence de « classes creuses » ait apporté des perturbations dans le calcul des divers éléments à notre disposition. Par contre, on peut considérer que la position de la Suède est légèrement excentrique par rapport à celle de l'ensemble des autres pays civilisés, à deux points de vue. Tout d'abord, la mortalité y est faible : mais il faut espérer que les autres pays s'acheminent vers les mêmes taux, et notre population stationnaire, si elle doit en paraître un peu moins bien adaptée aux études historiques, aura ainsi l'avantage de ne pas « vieillir » trop vite. D'autre part, la fécondité est, en Suède, comme dans tous les pays nordiques, assez tardive. Ceci est certainement un inconvénient, mais il est largement compensé par les autres avantages.

Muni de ces éléments, nous avons donc commencé par calculer les effectifs féminins de notre population stationnaire jusqu'à quarante-neuf ans. Pour ce faire, nous nous sommes souvenu de ce que les populations auxquelles nous avons affaire dans la pratique ne nous sont pas données par des effectifs de personnes nées toutes le même jour et atteignant le même âge précis a à un instant donné. Les naissances s'y répartissent tout le long de l'année et les effectifs que nous connaissons sont ceux des personnes dont l'âge est compris, à une date déterminée, entre le nombre entier d'années a et le nombre $(a + 1)$. Nous avons donc supposé les naissances réparties également tout le long de l'année pour notre population stationnaire et nous avons calculé les $p\ (a)$ correspondants. Pour $a \geqslant 1$, nous avons pris : $p\ (a) = \frac{l_a + l_{a+1}}{2\, l_0}$ (2), ce qui revient à supposer que l_a varie linéairement dans l'intervalle $(a, a + 1)$. Pour $a = 0$, nous avons procédé à une intégration pour tenir compte des grandes variations de la mortalité dans les premiers jours qui suivent la naissance. Ensuite, nous avons choisi un taux de masculinité des naissances : $\tau = 1{,}05$, indépendant de l'âge de la mère.

---

(1) Il en résulte notamment, ainsi qu'on le verra aisément, que pour calculer le ν d'un groupe de populations à partir des ν_i des populations composantes, il suffira d'effectuer la somme : $= \Sigma\ q_i\ .\ \nu_i$ où : $q_i = \frac{N_i}{\Sigma\ N_i}$ indique la proportion de chaque population dans l'ensemble; cette règle peut être utile dans la pratique (Royaume-Uni, annexions territoriales, etc...).

(2) l_a désignant ici les survivants d'âge a de la table de mortalité (notation actuarielle.

Connaissant l'espérance de vie à la naissance : $L_0 = 63{,}16$ pour le sexe féminin, et $L'_0 = 60{,}97$ pour le sexe masculin, d'où :

$$\frac{1}{F_0} = \frac{L_0 + \tau L'_0}{L_0},$$

nous possédions tous les éléments dont nous avions besoin pour le calcul, à l'exception de la loi de fécondité $m\ (a)$. Nous avons calculé des taux moyens de fécondité féminine à chaque âge pour la Suède en 1921-1930. Appliqués aux effectifs $p\ (a)$ déterminés précédemment, ces taux nous ont donné un nombre de naissances féminines de 0,95.759. Nous avons alors déformé légèrement la courbe de fécondité correspondante pour amener ce nombre à être exactement égal à 1,00.000. Conformément à la règle qui veut que la courbe de fécondité se déforme dans sa partie descendante, à droite du maximum (puisque la fécondité baisse pratiquement par suppression des naissances de rang élevé), nous avons fait porter les corrections sur les taux des âges supérieurs à vingt-quatre ans. Les corrections que nous avons été ainsi amené à effectuer deviennent très faibles à partir de quarante ans, et n'atteignent à aucun âge 9 % des taux réellement observés en Suède pendant la période 1921-1930. Les produits $p\ (a)\ .\ m\ (a)$ effectués ne sont pas directement utilisables, sous la forme où on les obtient, pour le calcul de $f_0\ (a)$. En effet, les femmes de l'effectif $p\ (a)$ ayant un âge compris entre a et $(a + 1)$ au milieu de l'année d'observation, donnent naissance au cours de cette année d'observation à $p\ (a)\ .\ m\ (a)$ filles, mais, postérieurement au milieu de l'année d'observation pris pour origine, puisque nos effectifs $p\ (a)$ sont ceux de cette date, elles ne donnent naissance qu'à un nombre de filles égal approximativement à :

$$f_0\ (a) = \frac{p\ (a)\ .\ m\ (a)}{2} + \sum_{a+1}^{a_1} p\ (a)\ .\ m\ (a). \tag{9}$$

Cette remarque permet le calcul très simple de $f_0\ (a)$ et la somme des nombres inscrits dans la colonne $f_0\ (a)$ permet un calcul rapide de A_0, trouvé égal à 30,534 (1). Il ne reste plus qu'à effectuer les produits par :

$$\frac{L_0 + \tau L'_0}{L_0\ .\ b_0\ .\ A_0} = \frac{63{,}16 + 1{,}05 \times 60{,}97}{30{,}534} = 4{,}165$$

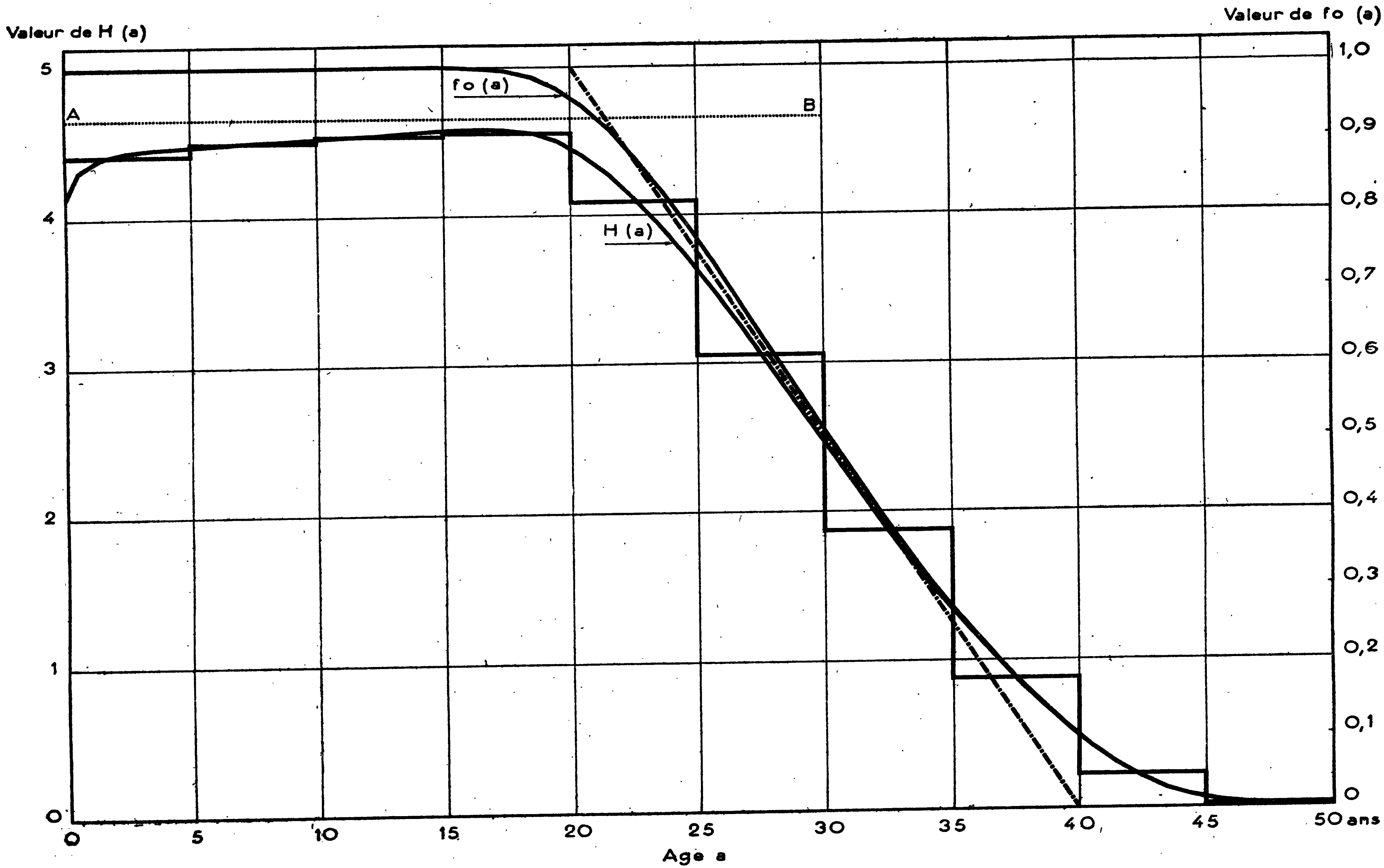
des quotients $\dfrac{f_0\ (a)}{p\ (a)}$ pour avoir la table de H_a.

Le tableau II donne les éléments suivants du calcul : $p\ (a)$, $m\ (a)$, $f_0\ (a)$ et H_a, année par année d'âge.

TABLEAU II

AGE a	$p\ (a)$	$m\ (a)$	$f_0\ (a)$	H_a	AGE a	$p\ (a)$	$m\ (a)$	$f_0\ (a)$	H_a
0	0,96 653	»	1,00 000	4,310	25	0,87 821	0,05 700	0,74 199	3,519
1	94 488	»	»	4,408	26	87 450	5 920	69 108	3,292
2	93 816	»	»	4,440	27	87 076	6 050	63 885	3,056
3	93 463	»	»	4,457	28	86 707	6 120	58 597	2,815
4	93 199	»	»	4,469	29	86 348	6 080	53 319	2,572
5	0,92 972	»	»	4,480	30	0,85 984	0,05 950	0,48 136	2,332
6	92 775	»	»	4,490	31	85 615	5 800	43 095	2,097
7	92 599	»	»	4,498	32	85 246	5 600	38 225	1,868
8	92 430	»	»	4,507	33	84 872	5 400	33 546	1,647
9	92 267	»	»	4,515	34	84 493	5 150	29 079	1,434
10	0,92 112	»	»	4,522	35	0,84 117	0,04 880	0,24 850	1,230
11	91 960	»	»	4,530	36	83 740	4 570	20 884	1,039
12	91 800	»	»	4,537	37	83 360	4 230	17 207	0,860
13	91 629	»	»	4,546	38	82 961	3 867	13 840	0,695
14	91 433	»	»	4,556	39	82 548	3 500	10 791	0,544
15	0,91 211	0,00 037	0,99 983	4,566	40	0,82 127	0,03 050	0,08 093	0,410
16	90 956	0 189	99 880	4,574	41	81 694	2 600	5 779	0,295
17	90 658	0 592	99 526	4,572	42	81 253	2 050	3 884	0,199
18	90 340	1 317	98 662	4,549	43	80 807	1 550	2 424	0,125
19	90 016	2 212	97 072	4,491	44	80 341	1 050	1 376	0,071
20	0,89 681	0,03 114	0,94 680	4,397	45	0,79 860	0,00 641	0,00 698	0,036
21	89 328	3 860	91 559	4,269	46	79 360	322	314	0,016
22	88 950	4 491	87 838	4,113	47	78 833	154	125	0,007
23	88 567	4 995	83 628	3,933	48	78 278	62	40	0,002
24	88 192	5 345	79 059	3,734	49	77 691	20	8	0,000

(1) On remarquera que cette valeur élevée de A_0 ne provient pas seulement de la fécondité tardive de la population suédoise, mais aussi de la composition par âge de notre population stationnaire. L'âge moyen des femmes à la naissance de leurs enfants en Suède était en 1921-1930, de 29,86; le calcul effectué aux taux de la Suède, sur la base de la composition par âge de la population stationnaire fait passer cet âge à 30,41 et les corrections effectuées sur les taux de fécondité modifient à peine ce chiffre.



Graphique n° I. — Courbes représentatives de H (a) et de f_o (a).

TABLEAU III

GROUPES D'AGES	p (a)	m (a)	f_0 (a)	H_a
0-4	0,94 324	»	1,00 000	4,416
5-9	0,92 609	»	»	4,498
10-14	0,91 787	»	»	4,538
15-19	0,90 636	0,04 330	0,99 025	4,550
20-24	0,88 944	0,21 784	0,87 353	4,090
25-29	0,87 080	0,29 869	0,63 822	3,053
30-34	0,85 242	0,27 913	0,38 416	1,877
35-39	0,83 345	0,21 066	0,17 514	0,875
40-44	0,81 244	0,10 330	0,04 311	0,221
45-49	0,78 804	0,01 211	0,00 237	0,013

Le tableau III donne les mêmes éléments par groupe de cinq années d'âge. Les chiffres de ce tableau ayant été obtenus, pour plus de précision, à partir de ceux du tableau précédent, il n'y a naturellement aucune relation simple du genre de la relation (9) entre les quantités $f(a)$, $p(a)$ et $m(a)$ qui y figurent. Les coefficients H_a du tableau III sont extrêmement voisins de ceux qu'on obtiendrait en prenant la moyenne des coefficients correspondants du tableau II. Ceci provient du fait que les coefficients exacts du tableau III sont proportionnels aux quantités $\dfrac{\sum_a^{a+4} f_0(a)}{\sum_a^{a+4} p(a)}$, où $f_0(a)$ et $p(a)$ désignent des nombres figurant dans le tableau II, alors que la moyenne des H_a de ce tableau apparaît comme proportionnelle à $\dfrac{\sum_a^{a+4} \frac{f_0(a)}{p(a)}}{5}$. Or ces deux expressions sont très voisines en raison de la faiblesse de la variation de $p(a)$ dans tout intervalle assez étroit tel que $(a, a+4)$. Cette remarque présente un intérêt pratique, car elle permet de calculer immédiatement, à partir des coefficients du tableau II, les coefficients relatifs à des groupes d'âges quelconques qu'il n'est pas rare de trouver dans les statistiques.

La question que nous allons nous poser maintenant est la suivante : quelle approximation obtenons-nous pour le calcul de ν par l'emploi de la table abrégée de H_a par groupe de cinq années d'âge? Pour la résoudre, représentons graphiquement les variations de H_a en fonction de a : nous obtenons ainsi les courbes figurées sur le graphique nº I. La courbe continue correspond à la fonction H (a) représentée par le tableau II, la courbe en escalier correspond à la table abrégée III. Nous voyons que, grossièrement, la courbe représentative de H (a) peut être assimilée à un ensemble de deux segments de droite formant un point anguleux vers dix-neuf ans. L'approximation réalisée par la courbe en escalier est bonne jusqu'à cet âge en raison de la faible pente de la courbe dans ce premier intervalle de la variation de a, elle devient, par contre, assez douteuse à partir de vingt ans. Toutefois, en raison de la décroissance à peu près linéaire de H (a) au-dessus de cet âge, nous pouvons remarquer que l'erreur introduite dans le calcul de ν par l'usage de coefficients par groupe d'âges dépendra de la forme de la fonction $c(a)$ dans l'intervalle 20-49 ans. Si les effectifs $c(a)$ compris dans un même groupe d'âges ne sont pas trop différents entre eux, l'approximation pourra être bonne, surtout si on peut s'attendre au jeu de compensations. Mais ces compensations ne pourront pas se produire si, par exemple, $c(a)$ possède une décroissance beaucoup plus marquée que les effectifs correspondants de notre population stationnaire : dans ce cas, les erreurs entraînées sur le calcul de ν seront toutes de même sens (négatif) et se cumuleront. De même, dans le cas d'une perturbation importante à l'intérieur d'un même groupe d'âges (due à la présence de classes creuses, par exemple) les circonstances les plus défavorables se produiront lorsque les classes d'âge anormales seront situées d'un même côté de l'âge moyen dans le groupe d'âges, car dans ce cas aucune compensation ne pourra jouer. Ces remarques nous permettent de nous faire une idée de l'ordre de grandeur de l'erreur commise, en effectuant le calcul de ν par les deux méthodes dans des cas particuliers correspondant à ceux que nous venons d'indiquer, et en comparant les résultats obtenus.

Un premier calcul effectué sur la composition par âge de la province de Québec en 1931, qui correspond à une décroissance particulièrement marquée de $c(a)$ entre vingt et quarante-neuf ans, nous donne pour ν les valeurs 1,447 et 1,444 suivant que nous appliquons les coefficients par année d'âge ou par groupe de cinq ans. L'erreur absolue n'est donc que de — 0,003 et l'erreur relative de l'ordre de — 2 ‰.

Comme exemple de perturbation dans les effectifs $c(a)$, nous avons choisi le passage des cinq « classes creuses » au voisinage du point anguleux dans la population française évaluée au 1er janvier 1937. Le calcul donne comme valeurs de ν, par emploi de la table détaillée, puis de la table abrégée, respectivement 1,0398 et 1,0414, ce qui correspond à une erreur relative de 0,0015.

Ces résultats nous montrent que les fluctuations de $c(a)$ occasionnées par des circonstances exceptionnelles ne peuvent entraîner, dans l'immense majorité des cas, qu'une erreur tout à fait négligeable sur ν lorsque nous procédons à son calcul au moyen d'une table abrégée. Au contraire, pour les populations dont la pyramide des âges se rétrécit de façon particulièrement rapide entre vingt et quarante-neuf ans, nous devrons nous méfier du groupement des âges. Tant que celui-ci ne dépasse pas cinq années, l'exemple rapporté plus haut nous montre que l'erreur commise demeure faible, mais il n'en serait plus de même, par exemple, si nous opérions sur des groupes de dix années d'âge. Dans ces conditions, nous adopterons la table abrégée de H_a pour nos calculs, ne conservant le tableau II que pour le calcul des coefficients correspondant aux groupes d'âge autres que ceux de cinq ans figurant dans le tableau III. Nous pourrons garder 3 décimales, en général, pour les valeurs de ν ainsi calculées, sous réserve naturellement de l'approximation autorisée par la loi énoncée, question sur laquelle nous reviendrons.

Malgré l'inconvénient signalé du groupement trop large des âges sur la précision obtenue dans le calcul de ν, on peut se demander, en raison de l'importance exceptionnelle attribuée par la forme de $H(a)$ au groupe d'âges 0-19 ans et à la constance approximative de H_a dans cet intervalle, si l'indice ν ne pourrait pas être obtenu, avec une approximation malgré tout acceptable, en calculant tout simplement le rapport de la proportion, dans la population à étudier, des femmes de 0 à 29 ans, à la même proportion considérée dans la population stationnaire, ce qui revient à procéder au calcul de ν en supposant H_a constant et égal à 4,66 jusqu'à vingt-neuf ans et nul ensuite — autrement dit à remplacer la fonction $H(a)$ par la fonction représentée par le segment de droite AB tracé en pointillés sur le graphique n° I. L'expérience montre (comme nous le verrons plus loin) que cette méthode de calcul approché n'a pas une précision suffisante; c'est ainsi que le calcul effectué de cette manière pour la population de la France, estimée au 1er janvier 1945, donne une erreur de 3 % sur ν. Cependant, cette méthode peut rendre des services pour des populations sur lesquelles on n'a que des données grossières : elle revient à faire la constatation qu'étant donné la forme de la fonction $H(a)$, on peut, pour comparer deux populations au point de vue qui nous occupe et déterminer le ν relatif de l'une d'elles par rapport à l'autre, se contenter, en première approximation, d'effectuer le rapport des proportions, dans ces populations, des femmes (ou même de la population des deux sexes) au-dessous d'un certain âge compris entre vingt et quarante ans.

Pour terminer cette partie de notre travail, nous avons calculé les indices ν correspondant aux populations évaluées de la France et de l'Italie en 1945 ayant servi de base à l'établissement des perspectives que nous signalions au début. Les valeurs trouvées ont été les suivantes :

France (A) : 1,027; Italie (B) : 1,209.

Le rapport $\frac{\nu_B}{\nu_A} = 1{,}177$ se trouve compris entre les valeurs 1,171 et 1,185 trouvées pour l'année 2020 dans nos perspectives, ce qui est une nouvelle vérification de la validité de la loi approchée qui a servi de base à l'élaboration de l'indice ν.

VI. — *Justification théorique de la loi énoncée.*

Reprenons maintenant l'étude du rapport ν_A^B dans le cas le plus général, et explicitons sa valeur exacte en fonction des données $c_A(a)$, $c_B(a)$, $p(a)$, $m(a)$ et ρ, définissant respectivement les compositions par âge des populations A et B et les lois ρ auxquelles elles sont indéfiniment soumises à partir de l'instant origine.

Rappelons tout d'abord que, dans une population soumise aux lois ρ, si nous considérons un effectif élémentaire dB de naissances se produisant à l'instant y borné supérieurement (dans la suite de cet exposé nous aurons $0 \leqslant y \leqslant a_2$) la descendance féminine de cet élément dB donnera naissance annuellement à l'instant $t > T$ à : $\frac{dB}{A_\rho} \cdot e^{\rho(t-y)}$ filles, A_ρ désignant l'âge moyen des mères à la naissance de leurs filles dans la population limite stable : $A_\rho = \int_0^\infty a \cdot e^{-\rho a} \cdot p(a) \cdot m(a) \cdot da$, d'où il résulte que la population féminine correspondant à l'instant t à cet élément de naissances féminines dB sera :

$$\frac{1}{b_\rho} \cdot \frac{dB}{A_\rho} \cdot e^{\rho(t-y)}$$

où $b_\rho = \dfrac{1}{\int_0^\infty e^{\rho a} \cdot p(a) \cdot da}$ désigne le taux annuel de natalité féminine dans la population limite stable. Par conséquent, en introduisant la proportion F_ρ de la population féminine dans la population limite stable, à tout élément de naissances dB, se produisant à l'instant y, correspond une population élémentaire totale, à l'instant $t > T$, donnée par la formule :

$$\frac{dB}{F_\rho \cdot b_\rho \cdot A_\rho} \cdot e^{\rho(t-y)}.$$

Considérons maintenant, à l'instant 0, un élément de population féminine $c(a) \, . \, da$. A l'instant y il est devenu : $c(a) \, . \, da \, . \, \frac{p(a+y)}{p(a)}$ et il donne naissance, dans l'intervalle de temps dy, à un nombre de filles égal à : $d\mathrm{B} = \frac{c(a) \, . \, da}{p(a)} \, . \, p(a+y) \, . \, m(a+y) \, . \, dy$, auxquelles il correspondra, à l'instant $t > \mathrm{T}$, un élément de population totale égal à :

$$\frac{c(a) \, . \, da}{\mathrm{F}_\rho \, . \, b_\rho \, . \, \mathrm{A}_\rho \, . \, p(a)} \, . \, p(a+y) \, . \, m(a+y) \, . \, e^{\rho(t-y)} \, . \, dy$$

d'où, pour la population totale correspondant à l'instant $t > \mathrm{T}$ à toutes les filles nées de notre élément initial $c(a) \, . \, da$ postérieurement à l'instant 0 :

$$\frac{c(a) \, . \, da}{\mathrm{F}_\rho \, . \, b_\rho \, . \, \mathrm{A}_\rho \, . \, p(a)} \, . \int_0^\infty p(a+y) \, . \, m(a+y) \, . \, e^{\rho(t-y)} \, . \, dy$$

soit, en posant $(a+y) = x$:

$$\frac{c(a) \, . \, e^{\rho(t+a)} \, . \, da}{\mathrm{F}_\rho \, . \, b_\rho \, . \, \mathrm{A}_\rho \, . \, p(a)} \, . \int_a^\infty e^{-\rho x} \, . \, p(x) \, . \, m(x) \, . \, dx.$$

On reconnaît dans cette expression le facteur :

$$f_\rho(a) = \int_a^\infty e^{-\rho x} \, . \, p(x) \, . \, m(x) \, . \, dx \tag{10}$$

qui joue ici le même rôle que $f_0(a)$ dans la formule (5), et nous avons finalement la relation :

$$\mathrm{N}(t) = \frac{e^{\rho t}}{\mathrm{F}_\rho \, . \, b_\rho \, . \, \mathrm{A}_\rho} \, . \int_0^\infty \frac{c(a) \, . \, f_\rho(a)}{p(a)} \, . \, e^{\rho a} \, . \, da$$

où le coefficient de $e^{\rho t}$ représente la quantité K de la formule (1). Les quantités F_ρ, b_ρ, A_ρ, étant indépendantes de $c(a)$ et déterminées par des lois ρ données, on en déduit :

$$\nu_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{c_{\mathrm{B}}(a)}{p(a)} \, . \, f_\rho(a) \, . \, e^{\rho a} \, . \, da}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{c_{\mathrm{A}}(a)}{p(a)} \, . \, f_\rho(a) \, . \, e^{\rho a} \, . \, da}$$

Telle est l'expression rigoureuse de $\nu_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$. Désignons, pour simplifier le langage, par φ_{A} et φ_{B} les quantités figurant respectivement au dénominateur et au numérateur de cette expression, de sorte que : $\nu_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \frac{\varphi_{\mathrm{B}}}{\varphi_{\mathrm{A}}}$. On voit que $\nu_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$ est, ainsi qu'on pouvait le prévoir, une fonction dépendant non seulement de $c_{\mathrm{A}}(a)$ et de $c_{\mathrm{B}}(a)$, mais des lois ρ. De sorte que la loi empirique que nous avons énoncée ne saurait prétendre à une exactitude rigoureuse.

Nous devons maintenant chercher à nous rendre compte des raisons pour lesquelles $\frac{\varphi_{\mathrm{B}}}{\varphi_{\mathrm{A}}}$ est approximativement indépendant des lois ρ et, pour cela, nous allons étudier la forme de :

$$\varphi = \int_0^\infty \frac{c(a)}{p(a)} \, . \, e^{\rho a} \, . \, f_\rho(a) \, . \, da.$$

Remarquons tout d'abord que, $m(x)$ étant nul pour toute valeur de x extérieure à l'intervalle (a_1, a_2), nous avons : $f_\rho(a) = 0$ pour $a > a_2$, et $f_\rho(a) = 1$ pour $a < a_1$, car :

$$f_\rho(0) = \int_0^\infty e^{-\rho x} \, . \, p(x) \, . \, m(x) \, . \, dx = 1.$$

Par suite, $p(x)$ et $m(x)$ étant des fonctions essentiellement positives, $f_\rho(a)$ décroît de 1 à 0 lorsque a croît de a_1 à a_2.

Nous allons maintenant nous servir d'une remarque faite à l'occasion de l'étude de la fonction H (a). Nous avons remarqué que sa décroissance était très approximativement linéaire entre vingt et quarante-neuf ans. Traçons donc la courbe représentative de la fonction $f_0(a)$ correspondant à notre population stationnaire, d'après les valeurs qui figurent sur le tableau II. Nous constatons que la décroissance de $f_0(a)$ est encore beaucoup plus proche d'une décroissance linéaire que celle de H (a). Nous allons donc supposer que pour toutes les lois ρ auxquelles la loi que nous tentons de justifier s'applique $f_\rho(a)$ varie linéairement entre

1 et 0 lorsque a passe de la valeur $\alpha_1 = 20$ à la valeur $\alpha_2 = 40$. De sorte que nous assimilerons $f_\rho(a)$ à une fonction ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{— pour } a < \alpha_1 &&: f_\rho(a) = 1, \\ &\text{— pour } \alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2 &&: f_\rho(a) = \frac{\alpha_2 - a}{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ &\text{— pour } a > \alpha_2 &&: f(a) = 0. \end{aligned}$$

Par suite, φ s'écrira :

$$\varphi = \int_0^{\alpha_1} \frac{c(a)}{p(a)} . e^{\rho a} . da + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{c(a)}{p(a)} . e^{\rho a} . (\alpha_2 - a) . da.$$

Remarquons maintenant que, dans les populations civilisées modernes, la mortalité féminine est assez faible jusqu'à quarante ans, sauf dans la première année de l'existence. Nous allons donc remplacer $\frac{1}{p(a)}$ par une approximation linéaire de la forme : $\frac{1}{p_0}(1 + \beta a)$, où p_0 et β sont des constantes dont nous nous réservons de discuter plus tard la valeur.

Si nous supposons en outre ρ assez petit pour que $e^{\rho a}$ puisse être assimilé aux deux premiers termes $(1 + \rho a)$ de son développement en série pour les valeurs de a inférieures à α_2, nous obtenons l'expression approchée :

$$\varphi = \frac{1}{p_0}\left[\int_0^{\alpha_1} c(a) . (1 + \beta a) . (1 + \rho a) . da + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} c(a) . (1 + \beta a) . (1 + \rho a) . (\alpha_2 - a) . da\right]$$

En intégrant et en posant :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \int_0^{\alpha_1} c(a) . da\ ; & \lambda'_0 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} c(a) . da; \\ \lambda_1 &= \int_0^{\alpha_1} a . c(a)\, da; & \lambda'_1 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} a . c(a) . da; \\ \lambda_2 &= \int_0^{\alpha_1} a^2 . c(a) . da; & \lambda'_2 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} a^2 . c(a) . da; \\ & & \lambda'_3 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} a^3 . c(a) . da; \end{aligned}$$

quantités qui ne dépendent que de la forme de la fonction $c(a)$, puisque α_1 et α_2 ont été fixés une fois pour toutes, nous obtenons, pour la valeur approchée de φ, une expression de la forme :

$$\varphi = \frac{1}{p_0(\alpha_2 - \alpha_1)}(P + Q\rho)$$

$$\text{où : } P = [(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_0 + \alpha_2 \lambda'_0 - \lambda'_1] + \beta[(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_1 + \alpha_2 \lambda'_1 - \lambda'_2],$$

$$\text{et : } Q = [(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_1 + \alpha_2 \lambda'_1 - \lambda'_2] + \beta[(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_2 + \alpha_2 \lambda'_2 - \lambda'_3].$$

P et Q ne dépendant que de la fonction $c(a)$, il en résulte que $\nu_A^B = \frac{P_B + Q_B \rho}{P_A + Q_A \rho}$ (11)

est équivalent, pour ρ suffisamment petit, à : $\frac{P_B}{P_A}\left[1 + \rho\left(\frac{Q_B}{P_B} - \frac{Q_A}{P_A}\right)\right]$.

Si nous appelons $\Delta\nu$ la variation de la valeur de ν_A^B lorsqu'on passe d'un système de lois stationnaires à un système de lois ρ, on peut écrire, pour ρ suffisamment petit :

$$\frac{\Delta\,\nu}{\nu} = \rho\left(\frac{Q_B}{P_B} - \frac{Q_A}{P_A}\right) \qquad (12)$$

de sorte que la sensibilité de ν_A^B à la valeur de ρ nous sera donnée par la variation du rapport $\frac{Q}{P}$ lorsqu'on passe de la population A à la population B.

Nous voyons que dans l'expression de ν_A^B, la quantité $\frac{1}{p_0}$ a disparu. C'est qu'en effet, ν_A^B étant un rapport, ce n'est pas tant l'effectif des survivants qui compte pour modifier sa valeur que les variations de cet effectif lorsque a varie de 0 à α_2; de sorte que dans notre approximation de $\frac{1}{p(a)}$ nous pouvons faire dépendre p_0 de la loi de mortalité appliquée, pourvu que β soit à peu près indépendant de cette loi. Or, si nous étudions les valeurs de $\frac{1}{p\ (a)}$ pour différentes tables de mortalité (Angleterre et Galles, France, Italie, Suède, Suisse) vers 1930-1935, nous constatons que l'on peut obtenir une bonne approximation de $\frac{1}{p\ (a)}$ avec des valeurs de β comprises entre 0,003 et 0,005. Nous prendrons donc pour β la valeur invariable de 0,004, quelle que soit la loi de mortalité.

Ayant ainsi fixé $\alpha_1 = 20$, $\alpha_2 = 40$ et $\beta = 0{,}004$, évaluons, sur l'exemple des populations de la France (A) et de l'Italie (B) en 1945, l'ordre de grandeur de la variation de $\frac{Q}{P}$ lorsqu'on passe de A à B. Le calcul donne approximativement les résultats suivants :

	λ_0	λ_1	λ_2	λ_0'	λ_1'	λ_2'	λ_3'
France (A)......	0,148	1,56	21,3	0,143	4,30	134,7	4,357
Italie (B	0,180	1,81	23,9	0,155	4,62	142,7	4,559

d'où :

	FRANCE (A)	ITALIE (B)
$(\alpha_2-\alpha_1)\ \lambda_0+\alpha_2\ \lambda'_0-\lambda'_1$	4,38	5,18
$(\alpha_2-\alpha_1)\ \lambda_2+\alpha_2\ \lambda'_1-\lambda'_2$	68,5	78,3
$(\alpha_2-\alpha_1)\ \lambda_2+\alpha_2\ \lambda'_2-\lambda'_3$	1.457	1.627
Q	74,3	84,8
P	4,65	5,49
$\frac{Q}{P}$	15,98	15,44

d'où la différence : $\left(\frac{Q}{P}\right)_B - \left(\frac{Q}{P}\right)_A = -\ 0{,}54$ (13).

On voit que, malgré l'importance de la quantité $\frac{Q}{P}$, sa variation, dans les cas concrets, demeure assez faible et de l'ordre de l'unité. Si bien que pour des valeurs de ρ atteignant $\pm\ 0{,}01$, les variations relatives de ν ne seront que de l'ordre du centième.

Remarquons aussi la faible influence de la valeur choisie pour β sur cette variation de $\frac{Q}{P}$. Le calcul donne pour $\beta = 0{,}005$ et pour $\beta = 0$ respectivement les valeurs — 0,55 et — 0,53 pour la variation de $\frac{Q}{P}$ dans le cas qui nous occupe, si bien que nous aurions pu supposer $p\ (a)$ assimilable à une constante sans que nos résultats en fussent modifiés.

Les perspectives dont nous avons parlé pour la France et l'Italie correspondent à des valeurs de ρ qui sont approximativement les suivantes, calculées (1) pour la France et l'Italie dans la période 1930-1932 :

$$\text{Hypothèse I} : \rho = -\ 0{,}0027,$$
$$\text{Hypothèse II} : \rho = +\ 0{,}0080.$$

Reportons ces valeurs ainsi que celle de (13) dans (12). On trouve pour $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ respectivement $+\ 0{,}0015$ et $-\ 0{,}0043$, et comme ν_A^B est voisin de 1,18, on en déduit que l'ordre de grandeur, en valeur absolue, de l'écart entre les valeurs de ν_A^B dans les deux hypothèses, doit être de 0,007, la valeur de ν_A^B correspondant à l'hypothèse I devant être la plus élevée.

Or, les valeurs trouvées expérimentalement pour l'année 2020 s'écartent de 0,014 dans ce sens : l'accord est bon quant à l'ordre de grandeur. De même, la formule (11) nous donne pour $\rho = 0$: $\nu_A^B = \frac{P_B}{P_A} = 1{,}181$, qui est en bon accord avec la valeur 1,177, trouvée par le calcul à l'aide de la table de H_a, et avec les valeurs encadrantes 1,171 et 1,185 trouvées expérimentalement pour l'année 2020. Tout ceci concourt à nous faire penser que les approximations que nous avons dû introduire dans le calcul, pour établir le bien-fondé

(1) Voir *Statistique du Mouvement de la Population*. Année 1933, 1^re^ partie, p. 83.

de la loi énoncée, sont assez légitimes. Si nous examinons la vraisemblance de la validité de ces approximations, nous ferons les constatations suivantes :

1° L'assimilation de $\frac{1}{p\ (a)}$ à une fonction linéaire de l'âge a déjà été discutée. Nous avons vu le peu de sensibilité de la valeur de ν à la forme de cette fonction. C'est seulement dans le tout premier âge que $p\ (a)$ varie de façon rapide, mais cette variation n'intéressant pratiquement que la classe d'âge zéro, qui ne correspond qu'à une faible proportion de la fraction « active », ne saurait avoir d'influence notable sur ν;

2° L'hypothèse de la petitesse de ρ limite théoriquement la validité de la loi énoncée à un intervalle assez faible de part et d'autre des lois stationnaires. En réalité, l'expérience semble montrer que ρ peut atteindre les valeurs les plus fortes rencontrées dans la pratique sans que la loi cesse d'être vérifiée d'une façon acceptable;

3° L'assimilation de la loi de décroissance de $f_\rho\ (a)$ à une fonction linéaire de l'âge entre vingt et quarante ans paraît tout d'abord beaucoup plus critiquable. Toutefois, nous devons remarquer que $f_\rho\ (a)$ décroît de 1 à 0 lorsque a varie de a_1 à a_2. Pratiquement, dans toutes les populations, $m\ (x)$ demeure assez faible au-dessous de vingt ans et au-dessus de quarante ans et surtout son influence sur la valeur de l'intégrale $f_\rho\ (a)$ aux deux extrémités de la distribution peut être négligée. Il en résulte que l'on peut admettre que $f_\rho\ (a)$ décroît de 1 à 0 lorsque a varie de vingt à quarante ans. Assimiler sa loi de décroissance dans cet intervalle à une loi linéaire reconnue valable dans le cas particulier de la population stationnaire choisie, revient à admettre que l'influence du facteur $\epsilon^{-\rho x}$ compense approximativement la variation du facteur $p\ (x)\ .\ m\ (x)$ lorsqu'on passe de ces lois stationnaires à des lois ρ. Or il y a lieu de remarquer que, pratiquement, c'est la variation de $m\ (x)$ qui, dans le produit $p\ (x)\ .\ m\ (x)$, est prépondérante et que cette variation est surtout sensible aux âges élevés. Or la variation de $m\ (x)$ entraîne celle de ρ et par conséquent une variation de $e^{-\rho x}$ en sens inverse et d'autant plus forte que x est plus élevé. Ces considérations, si elles ne justifient pas pleinement l'approximation admise, peuvent du moins permettre de comprendre pourquoi les résultats obtenus grâce à elle sont satisfaisants.

On aurait pu songer à introduire, comme approximations de $p\ (x)$ et de $m\ (x)$, des fonctions analytiques qui eussent mieux représenté la réalité. Toutefois, la complexité des calculs qu'une telle méthode eût entraînés nous a paru hors de proportion avec le résultat à obtenir. En effet, la meilleure justification à la fois de la loi énoncée et des approximations admises pour sa démonstration nous semble résider dans le faisceau concordant des résultats obtenus, dans le cas particulier que nous avons signalé de la France et de l'Italie, par trois méthodes différentes et indépendantes les unes des autres : la méthode empirique fondée sur l'établissement des perspectives, la méthode de calcul par la table de H_a qui a pour base la loi admise comme valable, et le calcul théorique à l'aide des approximations indiquées.

Il nous reste à nous demander combien de décimales nous conserverons pour ν. Les résultats précédents ne semblent pas s'opposer à ce que nous en conservions trois, puisque le calcul est établi pour ρ nul. En raison du mode de calcul adopté on n'y trouvera même que des avantages pour l'étude des fluctuations de ν dans le temps pour une même population. Naturellement, si nous devons utiliser les valeurs de ν ainsi calculées pour des applications pratiques, on se souviendra que, dès que ρ devient considérable, la loi n'est plus qu'approchée, et que la présence de la troisième décimale peut alors devenir complètement illusoire. Les analyses précédentes permettront d'ailleurs d'évaluer le sens et l'ordre de grandeur de l'erreur commise et, par conséquent, d'effectuer une correction grossière sur les résultats obtenus.

DEUXIÈME PARTIE : APPLICATIONS

I. — *Évolution du potentiel d'accroissement en quelques pays.*

Choisissant quelques pays pour lesquels nous disposions de statistiques par âge remontant à une époque assez lointaine, nous avons procédé, pour chacun d'eux, au calcul des ν correspondant aux différents recensements. Les calculs ainsi effectués se rapportent aux pays suivants pour lesquels nous indiquons entre parenthèses la date du premier recensement utilisé : France (1851), Suède (1750), Finlande (1751), Angleterre et Pays de Galles (1821), Pays-Bas (1830), Belgique (1846), États-Unis d'Amérique (1850), Suisse (1860), Italie (1861), Norvège (1865), Allemagne (1871). Pour l'Angleterre nous avons tenu compte, en outre, des estimations officielles (1) de la composition par âge effectuées pour les années 1801, 1811 et 1831 à partir de la population globale donnée par les recensements correspondants, des statistiques par âge des recensements de 1821 et de 1841 et des statistiques de l'état civil pendant la période 1801-1841. Pour la France, nous avons également procédé, à titre indicatif, au calcul de ν à des dates antérieures au recensement de 1851, d'après des estimations dont nous parlerons plus loin.

Les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux IV à XIV. Un astérisque placé à côté de la date indique que le calcul a été effectué d'après une estimation et non d'après un

---

(1) Voir *Census* de 1871, p. 54.

recensement. Il n'a pas été tenu compte des modifications territoriales subies par les pays en question, les chiffres se rapportent donc au territoire de recensement à la date indiquée, sauf pour la Suède et la Finlande, pays pour lesquels ils sont relatifs au territoire actuel à toutes les époques. D'autre part, nous n'avons conservé que deux décimales pour ν chaque fois que la précision des données à notre disposition nous a paru entacher la valeur obtenue par le calcul d'une trop forte erreur. Tel a été notamment le cas lorsque nous avons utilisé des statistiques par âge pour les sexes réunis (Suède pour la période 1750-1850, Norvège jusqu'en 1920) ou pour des groupes d'âges de dix ans (Suède, en 1860 et 1870; Finlande, jusqu'en 1920; Angleterre et Pays de Galles, de 1801 à 1861) ou tout simplement quand les données des recensements nous ont paru entachées d'incertitude. Des contrôles ont en effet montré que, dans les cas les plus défavorables, la deuxième décimale pouvait être elle-même entachée d'une erreur de une et même de deux unités. Pour la France, nous avons tenu compte, pour les recensements allant de 1851 à 1896, des chiffres rectifiés fournis par M. Depoid dans *Reproduction nette en Europe depuis l'origine des statistiques de l'état civil* (p. 12), ce qui nous a conduit à des corrections dépassant 1 %. Par contre, on peut estimer que, dans tous les pays étudiés, la troisième décimale donnée pour les valeurs de ν correspondant aux recensements les plus récents est exacte à moins de trois unités près dans presque tous les cas.

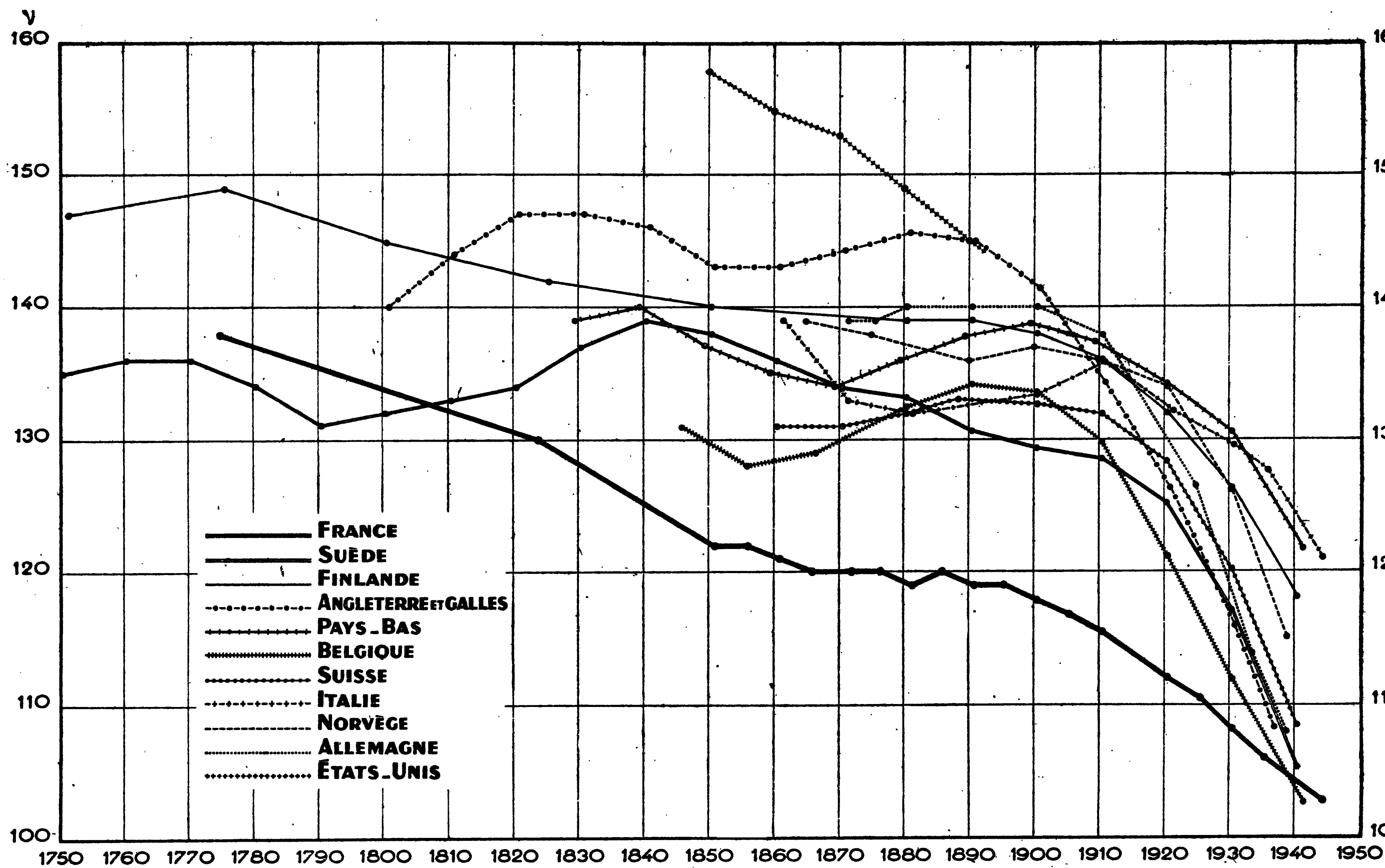
Ajoutons enfin que nous avons procédé sur la série des données relatives à la France, au calcul de ν par la méthode approchée, ne tenant compte que de la proportion des femmes de moins de trente ans dans la population totale. L'écart entre les valeurs exactes et les valeurs approchées varie de façon assez notable, ainsi qu'on s'en rendra compte à la lecture du tableau suivant :

DATE	1775	1824	1851	1856	1861	1866	1872	1876	1881	1886
Valeur de ν obtenue :										
a) par le calcul approché	1,407	1,318	1,230	1,229	1,221	1,209	1,208	1,204	1,198	1,208
b) par le calcul exact.	1,384	1,302	1,221	1,219	1,211	1,201	1,199	1,196	1,190	1,198
Erreur absolue : (*a*—*b*) ×(1.000)	+23	+16	+9	+10	+10	+8	+9	+8	+8	+10

DATE	1891	1896	1901	1906	1911	1921	1926	1931	1936	1944
Valeur de ν obtenue :										
a) par le calcul approché	1,201	1,194	1,186	1,175	1,157	1,117	1,105	1,079	1,051	0,996
b) par le calcul exact.	1,191	1,187	1,178	1,167	1,154	1,120	1,105	1,081	1,060	1,027
Erreur absolue : (*a*—*b*) ×(1.000)	+10	+7	+8	+8	+3	—3	0	—2	—9	—31

Le sens de la variation générale de la différence (a — b) correspond au vieillissement de la population féminine à l'intérieur du groupe d'âges 0-49 ans. On voit que, ce vieillissement s'effectuant d'ordinaire progressivement, le sens de variation de ν ne sera pas, en général, affecté par l'erreur commise, de sorte que le calcul approché pourrait, à la rigueur, être employé pour l'étude de l'évolution dans le temps du potentiel d'accroissement d'un même pays. Mais ce n'est précisément pas dans ce cas que son usage serait le plus commode. Or on ne saurait songer à remplacer le calcul exact, lorsqu'il est possible, par le calcul approché pour la comparaison des populations de deux pays : en effet, l'exemple ci-dessus nous montre que si deux populations avaient respectivement les compositions par âge correspondant à celles de la France en 1891 (A) et en 1944 (B), l'erreur commise sur le rapport $\frac{\nu_A}{\nu_B}$ par le calcul approché atteindrait 4 %. Or, on trouverait aisément, dans la pratique, des cas beaucoup plus défavorables que celui-ci dans la comparaison de deux pays.

Le graphique n° II représente les variations de ν dans le temps pour les différents pays envisagés. On voit qu'à l'exception de la France et de la Finlande, tous les pays européens examinés présentent, dans la période étudiée, un minimum de ν suivi d'un maximum. Ce phénomène remarquable peut être rapproché de l'évolution pendant la même période de la fécondité et de la mortalité dans certains de ces pays. Si on se reporte, en effet, à l'étude citée de M. Depoid (p. 39), on constate que le taux brut de reproduction a nettement augmenté en Angleterre entre 1850 et 1880 pour décroître ensuite. En Suède, une augmentation analogue apparaît entre 1810 et 1825. En Allemagne, le taux brut de reproduction a augmenté entre 1850 et 1880. On constate que ces périodes correspondent au début de la phase de croissance que l'on peut déceler sur les courbes représentatives de ν. La diminution de la mortalité caractéristique du XIX[e] siècle dans les pays européens, portant



Graphique n° II. — Évolution de l'indice d'accroissement potentiel.

surtout sur la mortalité infantile, superpose, au début, ses effets à ceux de l'accroissement de la fécondité ou en contrebalance la tendance décroissante (cas de l'Italie notamment), si bien que la population rajeunit d'abord avant de vieillir rapidement et que son potentiel d'accroissement passe par un maximum.

On voit ainsi que la courbe représentative de v matérialise en quelque sorte la révolution démographique, spécifique du XIXe siècle dans les pays européens; on peut même dire qu'elle en fixe, pour chaque pays, les dates d'une façon précise, et il est intéressant à cet égard de dresser le tableau suivant qui résume l'évolution de la variation de v dans chaque pays par les dates auxquelles se fixent le minimum et le maximum décelés :

PAYS	MINIMUM	MAXIMUM
Suède	1790	1840
Angleterre	1850-1860	1880
Belgique	1856	1890
Suisse	1860-1870	1890
Allemagne	1870 (ou avant.)	1880-1900
Pays-Bas	1870	1900
Norvège	1890	1900-
Italie	1880	1910

Le classement des pays reste sensiblement le même, que l'on envisage la date du minimum ou celle du maximum. On voit donc que dans tous ces pays la révolution démographique s'est traduite par des manifestations profondément semblables. Les différences entre leurs situations démographiques à un même instant proviennent surtout des dates différentes auxquelles la révolution s'est produite dans chacun d'eux. C'est pourquoi le classement ci-dessus est beaucoup plus intéressant et évocateur que celui qui résulterait de la comparaison à une même date des indices de ces pays.

Dans la période récente (début du XXe siècle), la chute du potentiel d'accroissement a été très rapide dans tous ces pays. On peut distinguer sur les courbes le début de cette période de décroissance rapide et le fixer approximativement aux dates ci-dessous :

Angleterre et Galles	1900
Belgique	1910
Allemagne	1910
Suède	1920
Suisse	1920
Norvège	1920
Pays-Bas	1930
Italie	1935

Signalons enfin la résistance des Pays-Bas, qui ont gardé un potentiel comparable à celui de l'Italie.

Nous avons dit que la Finlande et la France différaient des huit pays précédents quant à l'évolution de leur potentiel d'accroissement. Pour la période étudiée, aucun minimum n'est décelable en Finlande. Peut-être pouvons-nous en conclure qu'il n'y a pas eu, à proprement parler de révolution démographique dans ce pays, mais seulement une évolution suffisamment lente pour ne pas se traduire par des changements notables du potentiel d'accroissement pendant tout le XIXe siècle.

Dans toute la deuxième partie du XIXe siècle, il est remarquable que tous les pays que nous venons d'étudier, sauf l'Angleterre, aient eu des indices d'accroissement potentiel voisins, compris entre 1,3 et 1,4. L'Angleterre a eu pendant tout le XIXe siècle un indice nettement plus élevé, voisin de 1,45. Malgré le degré d'incertitude qui s'attache aux estimations de 1801 et de 1811, il semble bien que le mouvement de croissance de v qu'elles indiquent ait été réel. Remarquons d'ailleurs que cette époque correspond à une première phase d'industrialisation de l'Angleterre, qui s'est traduite par une rapide concentration urbaine, de même que la deuxième période de croissance de v correspond à la poussée industrielle du milieu du XIXe siècle qui a eu pour conséquence un très net accroissement de la fécondité dans ce pays. L'hypothèse d'une première période de croissance, avec un premier maximum en Angleterre est donc plausible, et ce pays aurait pu avoir, au XVIIIe siècle, un indice d'accroissement potentiel compris entre 1,3 et 1,4, valeur qui apparaît comme normale, en quelque sorte, pour les pays civilisés d'Europe, avant la révolution démographique (autant qu'on puisse en juger par les quelques pays étudiés).

La France constitue une exception frappante dans le lot des pays étudiés. Pendant toute la période du XIXe siècle pour laquelle nous possédons des statistiques (deuxième moitié), l'indice v s'y maintient sensiblement constant au voisinage de 1,2 (niveau très bas pour l'époque), avec une très légère tendance à la baisse. Le début du XXe siècle est marqué par une décroissance continue du potentiel d'accroissement, beaucoup moins rapide que celle que l'on constate dans les autres pays (en raison du vieillissement déjà acquis), mais dont le point de départ est antérieur à celui de la phase de décroissance rapide des autres pays. La courbe de la France, depuis 1850, se rapproche un peu de celle de la Suède, qui, comme elle, soufre d'une dénatalité ancienne, mais elle se tient à un niveau incomparablement plus bas. Pouvons-nous en induire, par suite, l'existence en France d'une phase de croissance de ν analogue à celle des autres pays européens, mais se plaçant à une époque antérieure à celle du début des statistiques par âge? Pour discuter cette intéressante question, nous avons cherché à remonter aussi loin que possible dans le passé, en utilisant toutes les estimations dont nous pouvions disposer.

L'estimation la plus récente est due à Demonferrand, dans son : *Essai sur les lois de la population et de la mortalité en France* (1838). Elle fut effectuée d'après des relevés originaux de l'état civil, dépouillés et corrigés avec soin, contrôlés à l'aide des recensements et des états de recrutement de l'armée, et peut être considérée comme nous donnant le ν moyen de la population de la France au cours de la période qui s'étend de 1816 à 1832. Nous avons attribué cette valeur de ν à l'année centrale 1824.

Les autres estimations à notre disposition sont résumées par Levasseur dans un tableau figurant à la page 275 du tome I de son ouvrage : *La population française.* Toutefois, l'examen de ce tableau nous a conduit à y relever des erreurs si manifestes que nous avons été amené à entreprendre une étude critique particulière des estimations de la composition par âge et par sexe de la population française au XVIIIe siècle. Cette étude, qui sort du cadre de cet exposé, mais que nous espérons publier prochainement, nous a permis de démontrer que l'estimation de Lavoisier n'est qu'une extrapolation des chiffres de Moheau relatifs au dénombrement de dix paroisses comprenant au total 4.800 habitants, et que celle d'Expilly n'est, comme il l'indique lui-même, qu'une application à la France des proportions relatives à la population suédoise dont il avait constaté la grande analogie avec la population française à ce point de vue. En sorte que les données relatives à la répartition par âge de la population française au XVIIIe siècle se bornent au dénombrement de la généralité de Dijon en 1786 et au dénombrement de dix paroisses effectué par Moheau vers 1770, la question étant éclairée au surplus par les constatations rapportées par Expilly et qui s'appliquent à une période légèrement antérieure (vers 1760-1765). La discussion de tous les éléments à notre disposition nous a permis toutefois de nous faire une idée assez précise de la répartition de la population française à cette époque; c'est pourquoi nous nous sommes permis d'en effectuer une estimation et nous donnons, à titre indicatif, la valeur de ν qui lui correspond. Nous l'avons attribuée à l'année 1775, étant bien entendu qu'elle doit être considérée comme la moyenne relative à une période d'une vingtaine d'années encadrant cette date.

On remarquera que cette valeur de ν se trouve comprise entre 1,3 et 1,4 et qu'elle est tout à fait plausible. Rappelons que, dès 1820, ainsi que l'a établi M. Depoid, le taux brut de reproduction était décroissant dans notre pays. Et le vieillissement très net que l'on constate entre la fin du XVIIIe siècle et le début du XIXe doit nous faire préjuger que le mouvement de baisse de la fécondité était déjà amorcé bien avant l'origine des statistiques de l'état civil. La France a-t-elle connu, comme les autres pays européens, mais antérieurement au XIXe siècle, un accroissement de la fécondité de sa population? Nous inclinons plutôt à penser que ce phénomène, qui semble avoir coïncidé avec la diffusion d'un certain bien-être dans les masses, particulièrement dans les masses ouvrières et urbaines (au début notamment des phases d'industrialisation — cas de l'Angleterre) et qui a dû être la conséquence de l'abaissement de l'âge au mariage qui en a résulté, ne s'est pas manifesté chez nous. La limitation des naissances dans le mariage avait dû commencer à s'établir en France avant que ces facteurs aient pu jouer. De toute façon, s'il y a eu une phase de croissance de la fécondité en France, il semble bien qu'il faille la reporter à la première moitié du XVIIIe siècle. En tout cas, le graphique nous montre à quel point, dès le milieu du XIXe siècle, notre pays possédait dans sa composition par âge et dans les perspectives d'accroissement qui en résultaient, une avance inquiétante sur tous les autres.

Pour ne pas surcharger le graphique, nous n'avons tracé la courbe relative aux États-Unis que jusqu'en 1890. A partir de cette date, elle suit très exactement les courbes de l'Angleterre d'abord (jusqu'en 1900), puis de la Finlande (depuis 1910). On notera la valeur élevée de l'indice d'accroissement potentiel aux États-Unis vers 1850. Ainsi qu'on le verra au paragraphe suivant, ces valeurs très supérieures à 1,5, inconnues des pays européens, sont caractéristiques des peuples de l'Amérique. En 1871, le Canada avait aussi un indice largement supérieur à 1,5 (1,57).

II. — *Indice d'accroissement potentiel en divers pays en 1935.*

Pour pouvoir comparer le potentiel d'accroissement actuel des différents pays, nous avons calculé les valeurs de ν correspondant aux dénombrements les plus récents pour tous les pays disposant de statistiques par âge. Nous nous sommes efforcé d'utiliser chaque fois que cela a été possible, au moins trois valeurs de ν à des dates comprenant dans leur intervalle l'année 1935, et nous avons tenu compte, le cas échéant, des estimations les plus récentes dont nous ayons pu disposer (1). De cette façon, nous avons pu contrôler nos résultats et procéder, dans presque tous les cas, à la détermination de la valeur de v au milieu de l'année 1935 par interpolation.

Le tableau XV donne un résumé de ces résultats. Il contient, outre la valeur de v au 30 juin 1935, les valeurs de v aux deux dates les plus récentes correspondant soit aux deux derniers recensements, soit au dernier recensement et à une estimation ultérieure. Les estimations sont indiquées par un astérisque. Nous n'avons conservé que deux décimales pour v pour les estimations, et chaque fois que les valeurs calculées avec les données des recensements ne nous semblaient pas suffisamment précises. Dans la colonne de droite, nous avons aussi indiqué approximativement la variation proportionnelle annuelle ($^{0}/_{00}$) de l'indice v vers 1935, chaque fois que cette variation n'a pas subi de brusques modifications au voisinage de cette date. Lorsque cette variation n'est pas précédée d'un signe +, c'est-à-dire dans le cas général, il s'agit d'une diminution. Tous les chiffres donnés se rapportent, sauf indication contraire, au territoire du pays à la date indiquée.

Si nous rangeons les différents pays par potentiel d'accroissement décroissant en 1935, nous obtenons le classement suivant :

TRÈS FORT		FORT		MOYEN		FAIBLE	
Puerto-Rico	1,60	Égypte	1,44	Italie	1,28	Suisse	1,15
Honduras	1,60	Turquie	1,43	Canada	1,28	Allemagne	1,12
Colombie	1,58	Japon	1,42	Pays-Bas	1,27	Luxembourg	1,12
Mexique	1,55	États-Unis (Colorés)	1,42	Hawaï	1,25	Lettonie	1,12
Inde	1,52	Québec	1,42	Hongrie	1,23	Suède	1,11
Chili	1,51	Pologne	1,39	Finlande	1,23	Angleterre et Galles	1,11
U. R. S. S.	1,48	Yougoslavie	1,39	Irlande du Nord	1,22	Estonie	1,10
Brésil	?	Bulgarie	1,36	États-Unis (Blancs)	1,22	Autriche	1,08
Vénézuéla	?	Tunisie	1,35	Irlande	1,22	Belgique	1,08
Pérou	?	Portugal	1,35	Norvège	1,20	France	1,08
		U. Sud-Afric. (Bl)	1,34	Tchécoslovaquie	1,20		
Argentine	?			Australie	1,20		
Roumanie	?			Danemark	1,20		
				Écosse	1,19		
				Nouvelle-Zélande	1,18		
		Grèce	?				
		Espagne	?				

Nous avons complété ce tableau en y faisant figurer, dans les groupes où ils semblent s'inscrire, le Brésil, le Vénézuéla, le Pérou, l'Argentine, la Roumanie, la Grèce et l'Espagne, pays pour lesquels les données ne permettaient pas la détermination de v en 1935. Il est tout à fait remarquable que tous les pays américains, à l'exception des États-Unis, du Canada et peut-être de l'Argentine, se placent dans le groupe des potentiels les plus élevés. Les valeurs de v dans ces pays sont totalement inconnues en Europe, et ne semblent pas y avoir été atteintes au cours du XIX^e siècle, ni sans doute dans celui du XVIII^e (du moins dans les pays civilisés), alors que nous avons déjà remarqué que les États-Unis et le Canada ont eu des indices d'accroissement potentiels voisins de 1,6 au milieu du XIX^e siècle (valeur dont même un pays comme l'Inde demeure assez éloigné). Le classement par indice décroissant ne nous apprend rien de nouveau sur les situations respectives des pays dans lesquels l'évolution de la fécondité a été bien étudiée. Il précise seulement l'importance relative des ravages déjà causés « en puissance » par une dénatalité plus ou moins ancienne dans les pays où elle sévit. La France occupe le dernier rang, ainsi qu'on pouvait s'y attendre. Toutefois, si elle doit conserver encore longtemps, semble-t-il, le titre peu enviable de « pays le plus vieux du monde », il paraît que du moins, au point de vue du potentiel d'accroissement, elle ait récemment perdu sa primauté (ce qui naturellement n'améliore sa situation que d'une façon toute relative, puisque son potentiel continue à décroître). Il semble bien, en effet, que la Belgique, et sans doute aussi l'Angleterre et la Suède, aient actuellement des potentiels plus bas qu'elle.

Pour préciser la comparaison entre les divers pays en ce qui concerne leur situation actuelle au point de vue de leur potentiel d'accroissement, il est, en effet, indispensable de compléter les indications fournies par le classement précédent par une étude des variations récentes subies par l'indice d'accroissement potentiel dans chacun de ces pays. C'est pourquoi nous avons indiqué la variation annuelle de v au voisinage de 1935 comme indice de la tendance

(1) Il s'agit en général des estimations officielles figurant dans l'Annuaire de la S. D. N. Pour quelques pays seulement (France, Italie, Québec), nous nous sommes servi de nos propres estimations.

plus ou moins accusée au « vieillissement potentiel ». Le classement qui en résulte pour les pays précédents est le suivant :

ACCROISSEMENT ou stabilité		DÉCROISSANCE lente		moyenne		rapide	
Inde	+ 4	Porto-Rico	1	Union Sud-Afric. (Bl).	6	Égypte	10
Japon	+ 1	Hongrie	1	Canada	6	Allemagne	10
Colombie	0	Irlande	1	Québec	6	Suisse	10
Chili	0	Portugal	1	Pays-Bas	6	Norvège	11
Mexique	0	Yougoslavie	1	États-Unis (Blancs)	7	Angleterre	11
		Égypte	2	Finlande	7	Suède	11
		Honduras	2	Lettonie	7	Tchécoslovaquie	11
		U. R. S. S.	3	Luxembourg	7	Autriche	12
		Hawaï	3	Pologne	7	Bulgarie	14
		France	4	Écosse	7		
		États-Unis (Colorés)	5	Belgique	8		
		Irlande du Nord	5	Danemark	8		
				Hongrie	8		
				Australie	8		
				Estonie	9		

Nous n'avons fait figurer dans ce classement ni l'Italie, ni la Nouvelle-Zélande. Pour la première en effet la date de 1935 marque une accélération brusque de la chute de potentiel. La variation annuelle de l'indice passe, de 3 dans la période antérieure, à 6 dans la période postérieure à cette date. En Nouvelle-Zélande, il semble qu'au contraire à une phase de décroissance de l'indice ait succédé en 1935 sinon une augmentation du moins une certaine stabilité du potentiel d'accroissement.

On voit que des pays qui ont des potentiels voisins ont devant eux des perspectives bien différentes. Ce n'est pas en particulier dans les pays où le potentiel est élevé que l'on trouve en général la décroissance la plus marquée, tant il est vrai que la décroissance de la fécondité, une fois installée, s'accélère souvent d'elle-même par un phénomène analogue à l'autocatalyse. Il est remarquable au contraire de trouver dans le groupe stable ou dans celui à décroissance lente les pays de l'Amérique centrale ou méridionale à potentiel si élevé. On s'explique d'ailleurs très bien que le potentiel y demeure élevé : aucune tendance à la baisse de la fécondité ne s'y fait sentir qui ne puisse être compensée par la diminution de la mortalité infantile : ces pays sont encore au voisinage du maximum de potentiel qui précède la chute consécutive au développement de la civilisation. Seules, parmi les pays à potentiel élevé, l'Égypte et la Bulgarie subissent un véritable effondrement de leur potentiel. Tous les autres pays qui voient leur situation évoluer rapidement sont des pays européens à dénatalité accentuée. Le potentiel de la France, ainsi que nous l'avons déjà vu, subit une évolution beaucoup plus lente.

Paul VINCENT.

TABLEAU IV — FRANCE

DATE	V	DATE	V	DATE	V
1775* (1)	1,38	XII. 1876	1,20	III. 1911	1,154
1824* (2)	1,30	XII. 1881	1,19	III. 1921	1,120
V. 1851	1,22	V. 1886	1,20	III. 1926	1,105
VI. 1856	1,22	IV. 1891	1,19	III. 1931	1,081
VI. 1861	1,21	III. 1896	1,19	III. 1936	1,060
V. 1886	1,20	III. 1901	1,178	XII. 1944*	1,027
V. 1872	1,20	III. 1906	1,167		

(1) D'après l'estimation personnelle dont nous parlons ailleurs.
(2) D'après l'estimation de Demonferrand pour la période 1816-1832.

TABLEAU V — SUÈDE

DATE (1)	V	DATE	V	DATE	V	DATE	V
1750	1,35	1800	1,32	1850	1,38	1900	1,293
1760	1,36	1810	1,33	1860	1,36	1910	1,286
1770	1,36	1820	1,34	1870	1,34	1920	1,251
1780	1,34	1830	1,37	1880	1,333	1930	1,171
1790	1,31	1840	1,39	1890	1,307	1940	1,053

(1) Toutes les données se réfèrent à la fin de l'année indiquée.

Tableau VI — Finlande

DATE (1)	v	DATE	v	DATE	v
1751	1,47	1850	1,40	1910	1,36
1775	1,49	1880	1,39	1920	1,32
1800	1,45	1890	1,39	1930	1,263
1825	1,42	1900	1,38	1940	1,181

(1) Toutes les demandes se réfèrent à la fin de l'année indiquée.

Tableau VII — Angleterre et Pays de Galles

DATE	v	DATE	v	DATE	v	DATE	v
VI. 1801*	1,40	VI. 1841	1,46	IV. 1881	1,457	VI. 1921	1,263
VI. 1811*	1,44	VI. 1851	1,43	IV. 1891	1,450	IV. 1931	1,159
VI. 1821	1,47	VI. 1861	1,43	IV. 1901	1,415	VI. 1937*	1,083
VI. 1831*	1,47	IV. 1871	1,443	IV. 1911	1,343		

Tableau VIII — Pays-Bas

DATE	v	DATE	v	DATE	v	DATE	v
I. 1830	1,39	XII. 1859	1,35	XII. 1889	1,378	XII. 1920	1,342
I. 1840	1,40	XII. 1869	1,34	XII. 1899	1,387	XII. 1930	1,305
XI. 1849	1,37	XII. 1879	1,36	XII. 1909	1,374	XII. 1941*	1,218

Tableau IX — Belgique

DATE	v	DATE	v	DATE	v
1846	1,31	XII. 1890	1,342	XII. 1930	1,119
1856	1,28	XII. 1900	1,336	XII. 1941*	1,026
XII. 1866	1,29	XII. 1910	1,298		
XII. 1880	1,325	XII. 1920	1,211		

Tableau X — États-Unis d'Amérique

DATE	v	DATE	v	DATE	v
1850	1,58	1890	1,45	IV. 1930	1,283
1860	1,55	1900	1,420	IV. 1940 (1)	1,194
1870	1,53	1910	1,368		
1880	1,49	1920	1,334		

(1) D'après les données préliminaires du recensement.

Tableau XI — Suisse

DATE (1)	v	DATE	v	DATE	v
1860	1,31	1888	1,33	1920	1,283
1870	1,31	1900	1,327	1930	1,201
1880	1,32	1910	1,320	1940	1,083

(1) Toutes les données se réfèrent à la fin de l'année indiquée.

TABLEAU XII — ITALIE

DATE	v	DATE	v	DATE	v
XII. 1861	1,39	II. 1901	1,334	IV. 1931	1,295
XII. 1871	1,33	VI. 1911	1,358	IV. 1936	1,276
XII. 1881	1,32	XII. 1921	1,321	XII. 1944*	1,209

TABLEAU XIII — NORVÈGE

DATE	v	DATE	v	DATE	v
1865	1,39	1900	1,37	XII. 1930	1,261
1875	1,38	1910	1,36	VI. 1939*	1,151
1890	1,36	XII. 1920	1,34		

TABLEAU XIV — ALLEMAGNE

DATE	v	DATE	v	DATE	v
XII. 1871	1,39	XII. 1890	1,40	VI. 1925	1,265
XII. 1875	1,39	XII. 1900	1,40	XII. 1933	1,138
XII. 1880	1,40	XII. 1910	1,378	V. 1939 (1)	1,080

(1) Nouveau territoire. Territoire de 1937 : v = 1,085.

DISCUSSION

M. LANDRY. — J'ai pu apprécier l'intérêt et l'importance de la communication de M. VINCENT. Mais elle est très abstraite, comme l'auteur l'a souligné, et les raisonnements mathématiques sur lesquels elle est construite font qu'on ne saurait guère la discuter qu'après l'avoir lue à loisir. Je ne dirai donc rien sur le fond : l'observation que je demande à introduire porte seulement sur un point de terminologie.

Ai-je parlé le premier d'une révolution démographique? J'ai en tout cas contribué à diffuser cette expression. M. VINCENT l'emploie après moi, en un sens différent du mien. Il voit la révolution démographique se produisant, dans un pays, quand la courbe du « potentiel d'accroissement » de la population commence à baisser : c'est donc à un fait de caractère objectif qu'elle correspondrait. Pour moi, dans la définition que j'en ai donnée (les définitions étant abstraites, sauf le respect dû à l'usage), j'ai considéré un fait de caractère psychologique ou sociologique, le passage de la fécondité matrimoniale illimitée à la fécondité volontairement limitée. On a parfois défini la révolution démographique, en même temps que par le recul de la fécondité, par celui de la mortalité (commencé en France dans le même moment que l'autre, vers le milieu du XVIII^e siècle) : je n'en suis pas d'accord. Pourquoi? Parce que la baisse de la mortalité, conséquence de la constitution d'une science médicale, a réalisé un vœu que les hommes avaient toujours formé, mais jusque-là en vain; la baisse de la natalité, elle, s'est produite en suite d'un changement dans les mœurs, par la décision que les hommes ont prise, en nombre appréciable, puis de plus en plus grand, de modifier leur comportement à l'égard de la procréation.

M. DEPOID pense que les points de vue de MM. LANDRY et VINCENT sont très voisins l'un de l'autre : une baisse de la mortalité, qui se fait sentir surtout sur les classes d'âges les plus jeunes, doit avoir pour effet une hausse légère de l'indice d'accroissement potentiel. Une baisse de la fécondité entraîne au contraire à brève échéance une chute de cet indice. La hausse de l'indice observée dans divers pays au XIX^e siècle pendant plusieurs décades. doit s'expliquer par le fait que la baisse de la mortalité a précédé celle de la fécondité. Le brusque changement de direction de la courbe représentative de l'indice du potentiel d'accroissement indique de façon précise le moment où la baisse de la fécondité a commencé à faire sentir ses effets sur la structure de la population. Or, M. LANDRY estime que le fait essentiel de la révolution démographique est justement ce changement de tendance dans l'évolution de la fécondité.

M. VINCENT. — Je m'excuse d'avoir paru donner un sens nouveau à l'expression « révolution démographique ». En réalité, je suis tout à fait convaincu, avec M. LANDRY, de la

TABLEAU XV

Indice d'accroissement potentiel en divers pays.

PAYS	RECENSEMENT DATE	RECENSEMENT v	RECENSEMENT OU ESTIMATION (*) DATE	RECENSEMENT OU ESTIMATION (*) v	VALEUR de v au 30.VI. 1935 (Estimation)	VARIATION annuelle de v vers 1935 (°/₀₀)
Afrique.						
Algérie	5.III.1911	1,44	»	»	»	»
Égypte	18/19.II.1927	1,46	27.III.1937	1,44	1,44	2
Tunisie (Européens)	6.III.1926	1,48	12.III.1936	1,34	1,35	10
Union Sud-Africaine (blancs)	5.V.1936	1,336	20.VI.1940*	1,31	1,34	6
Amérique.						
Canada	1.VI.1931	1,310	1.VI.1940*	1,24	1,28	6
(Québec)	1.VI.1931	1,444	31.XII.1942*	1,35	1,42	6
États-Unis	1.IV.1930	1,283	1.IV.1940 (1)	1,19	1,24	7
(Blancs)	1.IV.1930	1,261	1.IV.1940 (1)	1,17	1,22	7
(Autres)	1.IV.1930	1,459	1.IV.1940 (1)	1,38	1,42	5
Mexique	15.V.1930	1,55	6.III.1940	1,55	1,55	0
Honduras	29.VI.1930	1,62	30.VI.1940	1,58	1,60	2
Puerto-Rico	1.XII.1935	1,60	1.IV.1940	1,59	1,60	1
Argentine	1.VI.1914	1,49	»	»	»	»
Brésil	1.IX.1920	1,63	»	»	»	»
Chili	31.XII.1920	1,51	27.XI.1930	1,51	1,51	0
Colombie	14.X.1918	1,56	5.VII.1938	1,59	1,58	0
Pérou	9.VI.1940	1,52	»	»	»	»
Vénézuéla	26.XII.1936	1,60	»	»	»	»
Asie.						
Inde (2)	18.III.1921	1,44	26.II.1931	1,50	1,52	+ 4
(Terr. d enregistrement)(2)	»	»	30.VI.1938*	1,49	1,48	+ 2
Birmanie (2)	»	»	30.VI.1938*	1,51	»	»
Japon	1.X.1930	1,41	1.X.1935	1,42	1,42	+ 1
Malaisie Britannique	1.IV.1931	1,24	»	»	»	»
Palestine	18.XI.1931	1,41	»	»	»	»
U. R. S. S.	17.XII.1926	1,83	17.V.1939	1,47	1,48	8
Europe.						
Allemagne	31.XII.1933	1,138	17.V.1939	1,080	1,12	10
Autriche	22.III.1934	1,098	31.XII.1936*	1,06	1,08	12
Belgique	31.XII.1930	1,119	31.XII.1941*	1,03	1,08	8
Bulgarie	31.XII.1934	1,37	31.XII.1939*	1,28	1,36	14
Danemark	5.XI.1935	1,191	5.XI.1940	1,143	1,20	8
Espagne	31.XII.1910	1,36	31.XII.1920	1,35	»	»
Estonie	1.III.1934	1,108	31.XII.1938*	1,06	1,10	9
Finlande	31.XII.1930	1,263	31.XII.1940	1,183	1,23	7
France	8.III.1936	1,060	31.XII.1944*	1,03	1,06	4
Grèce	15/16.V.1928	1,37	»	»	»	»
Hongrie (3)	31.XII.1930	1,28	18.XI.1939	1,19	1,23	8
Irlande (4)	18/19.IV.1926	1,218	27.IV.1936	1,207	1,21	1
Italie	21.IV 1936	1,276	31.XII.1944*	1,21	1,28	»
Lettonie	12.II.1935	1,121	31.XII.1939*	1,08	1,12	7
Lithuanie (5)	17.IX.1923	1,44	»	»	»	»
Luxembourg	31.XII.1930	1,151	31.XII.1935	1,114	1,12	7
Norvège	1.XII.1930	1,261	30.VI.1939*	1,151	1,20	11
Pays-Bas	31.XII.1930	1,305	31.XII.1941*	1,22	1,27	6
Pologne	9.XII.1931	1,43	31.XII.1938*	1,36	1,39	7
Portugal (6)	1.XII.1930	1,36	30.VI.1940*	1,34	1,35	1
Roumanie	29.XII.1930	1,46	»	»	»	»
Royaume-Uni	2/3.IV.1911	1,34	30.VI.1937*	1,10	1,12	11
(Angleterre et Galles)	26/27.IV.1931	1,159	30.VI.1937*	1,08	1,11	11
(Écosse)	26.IV.1931	1,227	30.VI.1938*	1,17	1,19	7
(Irlande du Nord)	18/19 IV 1926	1,276	28.II.1937	1,207	1,22	5
Suède	31.XII.1935	1,109	31.XII.1940	1,053	1,11	11
Suisse	1.XII.1930	1,201	31.XII.1940*	1,08	1,15	10
Tchécoslovaquie	1.XII.1930	1,26	31.XII.1935*	1,20	1,20	11
Turquie (7)	20.X.1935	1,43	»	»	1,43	»
Yougoslavie	31.I.1921	1,41	1.IV.1931	1,40	1,39	1
Océanie.						
Australie	30.VI.1933	1,22	30.VI.1941*	1,14	1,20	8
Hawaï	1.I.1920	1,30	1.IV.1930	1,27	1,25	3
Nouvelle-Zélande (8)	24.III.1936	1,17	31.III.1942*	1,17	1,18	»

(1) D'après les chiffres préliminaires du recensement.
(2) La Birmanie ne fait plus partie de l'Inde depuis 1937.
(3) Territoire de Trianon.
(4) Territoire actuel.
(5) Sans Klaipeda.
(6) Y compris les îles.
(7) Territoires d'Europe et d'Asie.
(8) Non compris les Maoris.

nécessité de porter tout particulièrement notre attention sur cette révolution psychologique qui a entraîné la baisse de la fécondité. Cependant, il me semble difficile de dissocier celle-ci des autres manifestations démographiques qui ont accompagné le développement de la civilisation moderne. Non seulement il existe en effet entre elles une corrélation dont nous ne pouvons faire abstraction, mais qui plus est la diminution de la mortalité et celle de la fécondité sont liées par des interréactions causales. Une baisse sensible et prolongée de la mortalité infantile entraîne presque automatiquement une certaine diminution de la fécondité, tandis qu'en sens inverse la décroissance de la fécondité facilite la baisse de la mortalité infantile. Jusqu'à quel point le processus psychologique de la baisse de la fécondité se trouve-t-il modifié et, dans une certaine mesure, conditionné par la décroissance de la mortalité infantile? Il nous est malheureusement impossible de le préciser. En tout état de cause, il m'a paru intéressant de constater qu'en fait, par le mécanisme que vient d'indiquer M. Depoid, l'évolution du potentiel d'accroissement permettait de préciser les phases d'un phénomène complexe, dont la localisation dans le temps demeurait jusqu'à ce jour malaisée.

M. Meuvret appuie fortement, en tant qu'historien, les paroles de M. Vincent : lors de l'examen des registres de paroisses, on est frappé par le fait que tout décès d'enfant en bas âge dans une famille est compensé dans le délai d'un an par une naissance nouvelle.

M. Depoid demande enfin à M. Vincent de préciser le sens de son indice du potentiel démographique : que signifie par exemple le fait que l'indice de la France est aujourd'hui de 1,03?

M. Vincent. — La valeur de l'indice d'accroissement potentiel d'une population n'a évidemment aucun sens en lui-même. En particulier, le fait qu'il est actuellement en France supérieur à l'unité signifie seulement que la population française est actuellement « potentiellement plus jeune » que la population stationnaire de référence choisie arbitrairement. Il ne saurait donc être question d'en tirer, quant aux perspectives d'avenir de la population française, une conclusion analogue à celle qu'on pourrait déduire par exemple d'un taux net de reproduction supérieur à l'unité. L'indice d'accroissement potentiel n'a qu'une valeur relative, il n'a de sens que dans les comparaisons entre populations.