JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

GEORGESCO

Le problème de la recherche des composantes cycliques d'un phénomène

Journal de la société statistique de Paris, tome 71 (1930), p. 217-264
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1930__71__217_0>

© Société de statistique de Paris, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

JOURNAL

DE LA

SOCIÉTÉ DE STATISTIQUE DE PARIS

N° 10. — OCTOBRE 1930

I

LE PROBLÈME DE LA RECHERCHE

DES

COMPOSANTES CYCLIQUES D'UN PHÉNOMÈNE

(*Thèse présentée à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris pour l'obtention du diplôme de statisticien.*)

INTRODUCTION

Le présent travail est divisé en quatre parties; les deux premières ont trait à un problème du calcul des probabilités : celui de l'interpolation linéaire lorsque toutes les coordonnées sont affectées d'erreurs.

C'est la troisième partie qui constitue le but de nos recherches. Nous y exposons une méthode d'interpolation trigonométrique de la marche d'un phénomène dont les périodes nous sont inconnues.

On trouvera dans la dernière partie deux applications de cette méthode : la première est celle à laquelle Lagrange a appliqué un de ces deux procédés d'interpolation trigonométrique, et dont nous parlerons dans le texte; l'autre porte sur la variation de la quantité de pluie tombée annuellement à Paris.

Nous croyons nécessaire d'avouer que l'ordre de cet exposé n'est pas celui que nous avons suivi pendant notre travail, et que c'est en cherchant à résoudre le problème qui fait l'objet du troisième chapitre, que nous avons été amené à nous poser et à solutionner la question par laquelle commence cet essai. Nous avons interverti dans leur exposé, l'ordre chronologique des résultats parce

que, comme on le verra, la question de l'interpolation linéaire peut être considérée indépendamment de celle de l'interpolation trigonométrique. D'ailleurs, ce fait nous a permis également de raccourcir de beaucoup la longueur des démonstrations.

Avant de commencer l'exposé des résultats que nous avons obtenus, nous tenons à remercier d'une façon toute particulière MM. Lucien March et Georges Darmois, professeurs à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, qui furent pour nous de véritables maîtres auprès desquels nous avons toujours trouvé — pendant nos études à cette Institution — des conseils bienveillants. Qu'il nous soit permis de leur exprimer ici toute notre vive gratitude, ainsi que notre admiration.

PREMIÈRE PARTIE

LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE L'INTERPOLATION LINÉAIRE

1. *L'énoncé du problème.* — Soit, pour fixer les idées, un espace à trois dimensions. Dans cet espace, considérons un plan. On mesure les coordonnées d'un nombre de points $M_1, M_2 \ldots, M_n$ contenus dans ce plan.

Soit (x'_i, y'_i, z'_i) les coordonnées exactes du point M_i. Les mesures nous donnent pour ces mêmes coordonnées $(x'_i + \xi_i, y'_i + \eta_i, z'_i + \xi_i)$ où $\xi_i\, \eta_i\, \zeta_i$ sont les valeurs qu'ont pris, dans ce cas particulier, trois variables aléatoires dont la loi de probabilité est celle de *Laplace-Gauss* (1) :

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\sqrt{D}}{(2\pi)} e^{-\frac{1}{2}H(\xi, \eta, \zeta)} \tag{1}$$

où :

$$H(\xi, \eta, \zeta) = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta \tag{2}$$

et D étant discriminant de cette forme quadratique.

Ne connaissant que les mesures effectives :

$$x_i = x'_i + \xi_i, \quad y_i = y'_i + \eta_i, \quad z_i = z'_i + \zeta_i$$

on se demande quelle est la position la plus probable qu'on peut attribuer au plan contenant les points M_i, ou bien quelles sont les valeurs qu'il faut attribuer aux coefficients de son équation :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

Le problème mis sous cette forme contient comme cas particulier, celui, déjà classique, où une seule des trois coordonnées serait affectée d'erreurs. On sait que dans ce cas on obtient comme solution un des trois plans que l'on appelle improprement de régression.

(1) Cette supposition, que l'on fait assez souvent dans le calcul des probabilités, est motivée par le fait que si la vraie loi de probabilités satisfait à des conditions très générales, la loi de Laplace-Gauss en constitue toujours une approximation suffisante. Voir G. Darmois, *Statistique mathématique*. Paris, G. Doin, 1928, pp. 232 et sq.

2. Pour résoudre ce problème, nous ferons usage de la fonction caractéristique de la loi (1) qui est $e^{-\frac{1}{2}K(u,v,w)}$ où :

$$(4) \quad K(u, v, w) = a^{11} u^2 + a^{22} v^2 + a^{33} w^2 + 2 a^{23} v w + 2 a^{31} w u + 2 a^{12} u v$$

En développant $e^{\frac{1}{2}K(u,v,w)}$ en série, d'après une propriété de la fonction caractéristique on obtiendra :

$$(5) \quad a^{11} = \sigma_\xi^2 \quad a^{22} = \sigma_\eta^2 \quad a^{33} = \sigma_\zeta^2 \quad a^{23} = r_{\eta\zeta}\sigma_\eta\sigma_\zeta \quad a^{31} = r_{\zeta\xi}\sigma_\zeta\sigma_\xi \quad a^{12} = r_{\xi\eta}\sigma_\xi\sigma_\eta$$

les σ et les r ayant la signification habituelle.

On sait, par ailleurs, que les formes $H(\xi, \eta, \zeta)$ et $K(u, v, w)$ sont adjointes, ce qui nous permet de donner, en fonction de σ et r les valeurs de $a_{11}, a_{22} \ldots$, car si $\Delta = | a^{ik} |$ alors :

$$H(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta & \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \\ \xi \ \eta \ \zeta & 0 \end{vmatrix}$$

On montre, en se servant des relations (5), que la forme $K(u, v, w)$ se décompose en trois carrés positifs et que par conséquent la surface dont l'équation en coordonnées tangentielles est $K(u, v, w) = a^2 t^2$ est un ellipsoïde. Et puisque que H et K sont adjointes, l'ellipsoïde, dont l'équation ponctuelle sera :

$$(6) \qquad H(\xi, \eta, \zeta) = h$$

aura comme équation tangentielle :

$$(7) \qquad h\, K(u, v, w) = t^2$$

h étant un paramètre positif.

Ces ellipsoïdes sont les surfaces de densité constante de la distribution (1), et la probabilité pour que le point (ξ, η, ζ) soit compris entre les ellipsoïdes $H = h$ et $H = h + dh$ sera :

$$(8) \qquad e^{-h}\, dh$$

Soit maintenant P_i le point ayant comme coordonnées (x_i, y_i, z_i) et prenons le point M_i comme origine. Considérons l'ellipsoïde homothétique à (6), de centre M_i et passant par P_i :

$$(9) \qquad H(\xi, \eta, \zeta) = h_i$$

où h_i se détermine par les conditions imposées : $h_i = H(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$

La probabilité pour que voulant mesurer les coordonnées du point M_i ont ait obtenu celles de P_i, sera $e^{-h_i}\, dh_i$. La probabilité pour que voulant déterminer $M_1, M_2 \ldots, M_n$ on ait obtenu $P_1, P_2 \ldots, P_n$, sera :

$$(10) \qquad e^{-h_1 + h_2 + \ldots + h_n}\, dh_1\, dh_2 \ldots dh_n$$

Mais les positions des points M_1, M_2, M_3, M_n, nous sont inconnues. A chaque

ensemble de n points correspond une valeur de l'expression (10). Nous prendrons pour M_1, M_2,... les points qui rendront maxima cette expression. *Ce seront les positions les plus probables.*

Ces positions rendront minima la somme :

$$s = h_1 + h_2 + \ldots + h_n \tag{11}$$

Remarquons d'abord que les points M_i doivent être contenus dans le même plan (3), par conséquent il y a deux faits à envisager :

1° La variation du plan (3).

2° La variation des positions des points M_i dans ce plan.

Afin d'obtenir le minimum de s nous allons décomposer l'influence de ces deux variations. Nous allons choisir d'abord les positions des points M_i, telles que, quel que soit le plan les contenant, s soit *un minimum.* Ensuite parmi toutes les positions que peut occuper ce plan, nous prendrons celle qui nous donnera pour s *un minimum minimorum.*

Pour nous conformer à ce procédé, nous chercherons premièrement le minimum de h_i dans l'hypothèse que M_i vérifie l'équation $Ax + By + C_2 + D = 0$. Il est évident que pour que h_i soit rendu minimum, il faut que M_i soit le point où l'ellipsoïde homothétique à (9), de centre P_i et tangent au plan (3), touche ce plan. Prenons P_i comme centre, l'équation d'un ellipsoïde de centre P_i et homothétique à (9) sera :

$$H(X, Y, Z) = g_i \tag{12}$$

L'équation du plan (3) deviendra :

$$AX + BY + CZ + Ax_i + By_i + Cz_i + D = 0 \tag{13}$$

Pour que ces deux surfaces soient tangentes, il faut que les coordonnées tangentielles de (13) :

$$u = A \quad v = B \quad w = C \quad t = Ax_i + By_i + Cz_i + D \tag{14}$$

vérifient l'équation tangentielle de (12) :

$$g_i K(u, v, w) = t^2$$

ce qui nous donne immédiatement :

$$g_i = \frac{(Ax_i + By_i + Cz_i + D)^2}{K(A, B, C)} \tag{15}$$

Il est très facile de se rendre compte maintenant que le minimum de h a justement la valeur donnée par (15).

Il nous reste donc à trouver les valeurs de A, B, C, D, qui rendent minima la somme :

$$s' = \sum_1^n \frac{(Ax_i + By_i + Cz_i + D)^2}{K(A, B, C)} \tag{16}$$

Faisons tout de suite une remarque : les valeurs qui rendront minima s, annuleront sa dérivée partielle par rapport à D. Donc :

$$A \Sigma x_i + B \Sigma y_i + C \Sigma z_i + n D = 0$$

Cette relation exprime que la position la plus probable du plan cherché passe par le centre de gravité des points P_i. Si l'on prend alors ce centre comme origine des coordonnées, $D = 0$, il ne nous reste plus qu'à déterminer A, B, C, de manière à avoir un minimum de :

$$s'' = \sum_1^n \frac{(Ax_i + By_i + Cz_i)^2}{K(A, B, C)} \tag{17}$$

où à cause de l'homogénéité et de la symétrie, on peut toujours supposer $C = 1$.

3. La recherche des valeurs de A et B qui rendent minima s dépend de la résolution d'un problème plus général :

Étant donné deux formes quadratiques non homogènes :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} \\ g(x, y) &= b_{11} x^2 + 2 b_{12} xy + b_{22} y^2 + 2 b_{12} x + 2 b_{23} y + b_{33} \end{aligned} \tag{18}$$

pour quelles valeurs de x, y le rapport :

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \tag{19}$$

est-il minimum?

Pour la résolution de ce problème, nous allons faire usage de l'interprétation géométrique.

Les équations $f = 0$, $g = 0$, représentent dans le plan deux coniques; or, deux coniques admettent toujours un triangle autopolaire commun (1). En prenant ce triangle comme triangle de référence leurs équations deviennent :

$$F(X, Y) = a X^2 + b Y^2 + c Z^2 \quad G(X, Y) = a' X^2 + b' Y^2 + c' Z^2$$

où :

$$\begin{aligned} X &= \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ Y &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \\ Z &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

sont les équations des côtés M N, N L, L M, du triangle autopolaire.

Nous supposerons également que l'on ait :

$$X + Y + Z = d \tag{21}$$

et que par conséquent :

$$X + Y + Z = 0 \tag{22}$$

représente la droite de l'infini (2).

Avec cela le rapport $\varphi(x, y)$ devient :

$$\Phi(X, Y) = \frac{a X^2 + b Y^2 + c Z^2}{a' X^2 + b' Y^2 + c' Z^2}$$

où on regardera X, Y comme variables indépendantes, Z étant liée avec ces dernières par l'intermédiaire de (21).

---

(1) Voir G. Salmon, *Traité de géométrie analytique à deux dimensions*. Paris, Gauthier-Villars, 1884, t. I, p. 431.

(2) Nous n'insistons pas sur les différents cas singuliers qui pourraient se présenter, car ils n'ont aucun rapport avec les applications que nous avons en vue.

Les valeurs qui rendront minimum ce rapport, vérifieront le système.

$$(23) \qquad G\frac{\partial F}{\partial X} - F\frac{\partial G}{\partial X} = 0 \qquad G\frac{\partial F}{\partial Y} - F\frac{\partial G}{\partial Y} = 0$$

Ces deux équations représentent deux cubiques, et les solutions du système nous seront données par leurs neufs points d'intersection.

Remarquons tout d'abord que le système (23) sera vérifié par les solutions communes à $F = 0$, $G = 0$, c'est-à-dire par les quatre points d'intersection des coniques F et G. Soit A, B, C, D, ces points, les points L, M, N, seront les intersections :

$$(A\,B,\ C\,D),\ (A\,C,\ B\,D),\ (A\,D,\ B\,C)$$

En tenant compte de la relation (21) on aura :

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -1 \qquad \frac{\partial Z}{\partial Y} = -1$$

et les équations des cubiques (23) s'écriront :

$$(24) \quad \begin{array}{l} (\Gamma_1)\ Y^2\,[(ab' - a'b)\,X + (bc' - b'c)Z] + (ac' - a'c)\,(X + Z)\,XZ = 0 \\ (\Gamma_2)\ X^2\,[(a'b - ab')\,Y + (ac' - a'c)Z] + (bc' - b'c)\,(Y + Z)\,YZ = 0 \end{array}$$

Examinons les points à l'infini. Pour cela nous ferons dans les équations de (Γ_1) et (Γ_2) :

$$Z = -(X + Y)$$

et un calcul facile nous montre que les deux cubiques ont deux points communs à l'infini, I et J, donnés par l'intersection de la droite de l'infini, avec le faisceau :

$$(ab' - a'b)\,X\,Y - (X + Y)\,[(a'c - ac')\,X + (bc' - b'c)\,Y] = 0$$

Les équations (24) nous montrent que les cubiques considérées, passent également par L, M, N, la cubique (Γ_1) étant tangente à L M en L, à M N, en N et la cubique (Γ_2) à L M en M, à N L en N.

Nous avons donc trouvé géométriquement les neufs points qui vérifient le système (23). Mais ces points ne constituent pas tous, des solutions du problème que nous nous sommes posé au commencement de ce paragraphe.

Nous en écarterons premièrement les solutions infinies, les deux points à l'infini I et J.

Nous en écarterons ensuite les points A, B, C, D, car pour ces points le rapport $\varphi\,(x, y)$ est indéterminé et l'indétermination ne peut pas être évitée, sa valeur dépendant de la direction suivant laquelle on se rapproche d'un de ces points.

En effet, supposons les deux coniques passant par origine alors :

$$\varphi\,(x, y) = \frac{a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y}{b_{11}\,x^2 + 2\,b_{12}\,xy + b_{22}\,y^2 + 2\,b_{13}\,x + 2\,b_{23}\,y}$$

soit $y = mx$ la direction suivant laquelle on se rapproche de l'origine, on aura :

$$\lim_{x = o\ y = o} \varphi\,(x, y) = \frac{a_{13} + a_{23}\,m}{b_{13} + b_{23}\,m}$$

valeur qui dépend de m, sauf si les coniques sont tangentes en ce point, c'est-à-dire si $\frac{a_{13}}{b_{13}} = \frac{a_{23}}{b_{23}}$. Or, dans ce dernier cas, l'origine se confond avec deux des points L, M, N, cas qui sera prévu dans une autre catégorie, la dernière, celle-même de ces points.

Pour obtenir les coordonnées de L, M, N, on résoudra le système :

$$(25)\quad \frac{a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}}{b_{11}\,x + b_{12}\,y + b_{13}} = \frac{a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}}{b_{21}\,x + b_{22}\,y + b_{23}} = \frac{a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}}{b_{31}\,x + b_{32}\,y + b_{33}} = r$$

qui exprime la condition pour que les polaires d'un même point, par rapport aux deux coniques considérées, soient confondues.

En éliminant de (25) les inconnues x, y, on obtiendra l'équation :

$$(26)\quad \begin{vmatrix} a_{11} - b_{11}r & a_{12} - b_{12}r & a_{13} - b_{13}\,r \\ a_{21} - b_{21}r & a_{22} - b_{22}r & a_{23} - b_{23}\,r \\ a_{31} - b_{31}r & a_{32} - b_{32}r & a_{33} - b_{33}\,r \end{vmatrix} = 0$$

connue sous le nom de l'équation en r des deux formes (18). Une fois cette équation résolue, le système (25) nous permettra d'associer à chaque racine r_i un couple de valeurs $(x_i,\ y_i)$ parmi lesquelles se trouveront les solutions cherchées.

Remarquons qu'avec ces notations le système (25) nous donne :

$$(27)\qquad \varphi\,(x_i, y_i) = \frac{f\,(x_i, y_i)}{g\,(x_i, y_i)} = r_i$$

relation qui nous permettra d'atteindre complètement notre but.

En effet, c'est cette relation qui nous indique qu'il faut attribuer à x, y, les valeurs du couple $(x_i,\ y_i)$ qui correspond à la plus petite racine de l'équation en r, pour avoir *un minimum minimorum* de φ.

D'ailleurs un calcul facile nous montre qu'avec les notations employées dans ce paragraphe, les racines de l'équation en r seront égales à : $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$ (1).

4. Une fois ce résultat obtenu, nous allons examiner en particulier le cas où, à la place de φ nous avons le rapport (17). On aura :

$$s'' = \frac{A^2\,\Sigma x_i^2 + 2\,AB\,\Sigma x_i\,y_i + B^2\,\Sigma y_i^2 + 2\,A\,\Sigma x_i\,y_i + 2\,B\,\Sigma y_i\,z_i + \Sigma z_i^2}{A^2\,\sigma_\xi^2 + 2\,AB\,r_{\xi\eta}\,\sigma_\xi\,\sigma_\eta + B^2\,\sigma_\eta^2 + 2\,A\,r_{\xi\zeta}\,\sigma_\xi\,\sigma_\zeta + 2\,B r_{\eta\zeta}\,\sigma_\eta\,\sigma_\zeta + \sigma_\zeta^2}$$

Comme le numérateur et le dénominateur de cette expression sont des formes quadratiques non homogènes, et qui se décomposent, toutes les deux, en trois carrés positifs, d'après la remarque faite à la fin du paragraphe précédent, les racines de l'équation en r correspondante seront toutes positives. Cela nous montre que le minimum de s'' est positif, résultat auquel il fallait s'attendre.

5. *Remarques.* — Comme application immédiate des résultats précédents, nous considérerons le cas classique auquel nous avons fait allusion plus haut et où seule la coordonné z est affectée d'erreurs. On aura pour ce cas particulier $\sigma_\xi = 0$, $\sigma_\eta = 0$.

(1) Sur cette question, voir également C. Jordan, *Cours d'analyse*, t. 1, p. 396.

L'équation en r se réduit à une équation du premier degré :

$$\begin{vmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i z_i \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma y_i^2 & \Sigma y_i z_i \\ \Sigma x_i z_i & \Sigma y_i z_i & \Sigma z_i^2 - r \end{vmatrix} = 0$$

où on a supposé $\sigma_\zeta = 1$. Avec les notations habituelles :

$$\rho_{23} = \frac{\Sigma yz}{\sqrt{\Sigma y^2 . \Sigma z^2}} \qquad \rho_{31} = \frac{\Sigma zx}{\sqrt{\Sigma z^2 . \Sigma x^2}} \qquad \rho_{12} = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 . \Sigma y^2}}$$

on obtient :

$$r = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{31} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{21} & 1 \end{vmatrix}} \Sigma z^2$$

pour le minimum de s''. Par le système correspondant à (25) on a :

$$A = -\frac{\begin{vmatrix} \rho_{13} & \rho_{12} \\ \rho_{23} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{vmatrix}} \sqrt{\frac{\Sigma z_i^2}{\Sigma x_i^2}} \qquad B = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{vmatrix}} \sqrt{\frac{\Sigma z_i^2}{\Sigma y_i^2}}$$

résultats auxquels on est arrivé par d'autres voies.

6. Le cas d'une distribution plane est particulièrement instructif parce que l'équation en r peut être résolue analytiquement.

La plus petite de ces racines sera :

$$r = \frac{\sigma_\eta^2 \Sigma x^2 + \sigma_\xi^2 \Sigma y^2 - 2 r_{\xi\eta} \sigma_\xi \sigma_\eta \Sigma xy - \sqrt{(\sigma_\eta^2 \Sigma x^2 + \sigma_\xi^2 \Sigma y^2 - 2 r_{\xi\eta} \sigma_\xi \sigma_\eta \Sigma xy)^2 - 4(1 - r_{\xi\eta}^2)[\Sigma x^2 \Sigma y^2 - (\Sigma xy)^2] \sigma_\xi^2 \sigma_\eta^2}}{2 \sigma_\xi^2 \sigma_\eta^2 (1 - r_{\xi\eta}^2)}$$

et d'ici on déduit :

$$A = \frac{\sigma_\xi^2 \Sigma y^2 - \sigma_\eta^2 \Sigma x^2 + \sqrt{(\sigma_\eta^2 \Sigma x^2 + \sigma_\xi^2 \Sigma y^2 - 2 r_{\xi\eta} \sigma_\xi \sigma_\eta \Sigma xy)^2 - 4(1 - r_{\xi\eta}^2)[\Sigma x^2 \Sigma y^2 - (\Sigma xy)^2] \sigma_\xi^2 \sigma_\eta^2}}{2 (r_{\xi\eta} \sigma_\xi \sigma_\eta \Sigma x_i^2 - \sigma_\xi^2 \Sigma xy)}$$

Le cas où les erreurs sur l'abscisse et sur l'ordonnée auraient le même écart type et seraient indépendantes, a été examiné par H. Poincaré dans son *Calcul des probabilités*, p. 249. H. Poincaré le rattache à la méthode des moindres carrés et indique comme valeur la plus probable de A celle qui rend minima la somme des carrés des distances des points P_i à la droite $Ax + y = 0$. C'est ce cas particulier qui nous a suggéré la méthode que nous avons employée pour la résolution du cas général. Et bien que distinctes en apparence, les deux méthodes se rapprochent beaucoup. En effet, pour le cas traité par H. Poincaré, la valeur de g_i (15) devient, en supposant les écarts types égaux à l'unité :

$$g_i = \frac{(A x_i + y_i)^2}{A^2 + 1}$$

ce qui représente bien la distance de P_i à la droite $Ax + y = 0$. Nous n'insisterons pas davantage sur le problème qui a fait l'objet de cette partie. On

comprendra que la démonstration donnée ici reste la même, quel que soit le nombre de dimensions de l'espace considéré, et que les résultats obtenus seront valables, après les modifications de rigueur, pour le cas le plus général.

DEUXIÈME PARTIE

INDICES QUI MESURES L'APPROXIMATION OBTENUE PAR INTERPOLATION

7. *Indices de linéarité.* — Dans le problème de l'interpolation on ne se contente pas d'indiquer seulement les méthodes qui nous mèneront à l'expression qui pour chaque cas particulier représentera approximativement la loi d'un phénomène; une fois cette question résolue, on cherche un indice qui mesure l'approximation, ou plutôt l'erreur, que l'on commet par l'introduction de l'expression interpolée. La recherche de cet indice constitue une question aussi importante que celle de l'interpolation même. Parfois, le choix de cet indice, car il peut revêtir les formes les plus diverses, est indiqué d'une manière toute naturelle par les formules d'interpolation, mais en général cette question présente des difficultés d'ordre technique auxquelles viennent s'ajouter celles de l'interprétation pratique.

On sait que si l'on veut faire une interpolation linéaire pour les couples de valeur $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_n, y_n)$ où x est parfaitement connu, la somme des carrés des erreurs commises sur chaque couple a comme valeur :

$$\Sigma y_i^2 \left[1 - \frac{(\Sigma x_i y_i)^2}{\Sigma x_i^2 . y_i^2} \right]$$

On prend alors comme indice de l'approximation l'expression

$$i = \frac{\Sigma x_i y_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2 . \Sigma y_i^2}} \tag{28}$$

que l'on appelle également indice de linéarité. Il varie entre — 1 et + 1 et c'est sa valeur absolue qui nous donne une idée de l'approximation obtenue.

Il est clair que le choix de cet indice est plus ou moins arbitraire, car nous pouvons fort bien le prendre égal à i^2 ou à $1 - i^2$ ou bien à une autre fonction de i, continue et monotone entre 0 et 1.

Ce n'est que par considérations de simplicité et par des rapprochements avec le coefficient de correlation que l'on s'est fixé à l'expression (28). Pour les autres cas qui peuvent se présenter dans le problème de l'interpolation, on cherche à imiter les calculs précédents et à trouver une expression semblable, à celle de i.

Supposons, par exemple, que l'on veuille faire une interpolation parabolique d'ordre deux. Soit $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ deux polynomes de degré un et deux respectivement, et tels que l'on ait :

$$\Sigma \varphi_1(x_i) = 0 \quad \Sigma \varphi_2(x_i) = 0 \quad \Sigma \varphi_1(x_i) \varphi_2(x_i) = 0$$

et supposons $\Sigma x_i = 0$, $\Sigma y_i = 0$. Nous aurons :

$$\varphi_1(x) = x \quad \varphi_2(x) = x^2 - k_1 x - k_2$$

avec

$$k_1 = \frac{\Sigma x^3}{\Sigma x^2} \qquad k_2 = \frac{\Sigma x^2}{n}$$

La formule d'interpolation sera :

$$F(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x)$$

où :

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma y_i \varphi_1(x_i)}{\Sigma [\varphi_1(x_i)]^2} \qquad \alpha_2 = \frac{\Sigma y_i \varphi_2(x_i)}{\Sigma [\varphi_2(x_i)]^2} \text{ (1)}$$

La somme des carrés des erreurs commises sur y sera, d'après les formules indiquées précédemment :

$$\Sigma y_i^2 \left\{ 1 - \frac{[\Sigma y_i \varphi_1(x_i)]^2}{\Sigma y_i^2 \Sigma \varphi_1^2(x_i)} - \frac{[\Sigma y_i \varphi_2(x_i)]^2}{\Sigma y_i^2 \Sigma \varphi_2^2(x_i)} \right\}$$

et l'on voit que pour avoir un indice de linéarité de deuxième degré, nous pouvons prendre :

$$i_2 = \sqrt{\frac{[\Sigma y_i \varphi_1(x_i)]^2}{\Sigma y_i^2 \Sigma \varphi_1^2(x_i)} + \frac{[\Sigma y_i \varphi_2(x_i)]^2}{\Sigma y_i^2 \Sigma \varphi_2^2(x_i)}}$$

ou bien i_2^2 ou $1 - i_2^2$, etc...

De tout cet exposé nous retiendrons quelques conclusions qui nous seront très utiles plus tard.

Tout d'abord nous remarquerons que *c'est l'expression du minimum de la somme des carrés des erreurs qui nous a permis de trouver un indice de linéarité.*

Ensuite, en nous tenant à la valeur absolue de l'indice, on voit que celle-ci atteint ses limites 0 et 1 dans les deux cas extrêmes :

1° Si les données ne contiennent aucune erreur et alors la courbe interpolée passe par tous les points;

2° Si l'introduction de la courbe interpolée ne diminue en rien la fluctuation de y. En effet, lorsque $i = 0$ la somme des carrés des erreurs reste égale à Σy_i^2 c'est-à-dire à ce qu'elle était auparavant.

8. *Considération sur l'équation en r.* — Avant de chercher un indice qui mesure l'erreur commise par l'interpolation linéaire dont nous nous sommes occupé dans la première partie de ce travail, nous démontrerons une propriété de l'équation en r qui nous sera utile plus loin.

Désignons par $\mathcal{R}(x, y, z..., t, r)$ le premier membre de l'équation en r tel qu'il se présente dans la relation (26) et lorsque les coordonnées des points considérés sont $x, y, z..., t$. Pour plus de simplicité, supposons dans ce qui suit que les écarts types $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ soient égaux à l'unité.

L'équation $\mathcal{R}(x, y; r) = 0$ peut être considérée comme la conséquente

(1) Voir G. Darmois, *op. cit.*, pp. 282-283.

de deux équations $\mathcal{R}(x; r) = 0$ $\mathcal{R}(y; r) = 0$; l'équation $\mathcal{R}(x, y, z; r) = 0$ est la conséquente de $\mathcal{R}(x, y; r) = 0$ $\mathcal{R}(y, z; r) = 0$ $\mathcal{R}(z, x; r) = 0$; etc.

Remarquons d'abord que l'équation $\mathcal{R}(x: r) = 0$ a comme racine $r_x^{(1)} = \Sigma x_1^2$. Soit, par ordre de grandeur croissante $r_{xyz\ t}^{(1)}$, $r_{xyz\ t}^{(2)}$,... $r_{xyz\ t}^{(m)}$ les racines de l'équation $\mathcal{R}(x, y, z..., t; r) = 0$.

On voit immédiatement d'après la forme même de $\mathcal{R}(x, y; r)$ que les racines de l'équation $\mathcal{R}(x, y; r) = 0$ sont séparées par les racines de ses antécédentes c'est-à-dire que :

$$(29) \qquad \mathcal{R}(x, y; r_x^{(1)}) \leqslant 0 \qquad \mathcal{R}(x, y; r_y^{(1)}) \leqslant 0$$

On aura également :

$$(30) \qquad \begin{array}{ll} \mathcal{R}(x; r_{xy}^{(1)}) \geqslant 0 & \mathcal{R}(y; r_{xy}^{(1)}) \geqslant 0 \\ \mathcal{R}(x; r_{xy}^{(2)}) \leqslant 0 & \mathcal{R}(y; r_{xy}^{(2)}) \geqslant 0 \end{array}$$

Considérons l'équation :

$$\mathcal{R}(x, y, z; r) = \begin{vmatrix} \Sigma\, x^2 - r & \Sigma\, xy - r r_{\xi\eta} & \Sigma\, xz - r r_{\xi\zeta} \\ \Sigma\, xy - r r_{\eta\zeta} & \Sigma\, y^2 - r & \Sigma\, yz - r r_{\eta\zeta} \\ \Sigma\, zx - r r_{\zeta\xi} & \Sigma\, zy - r r_{\zeta\eta} & \Sigma\, z^2 - r \end{vmatrix} = 0$$

en développant d'après la dernière ligne et la dernière colonne, on aura :

$$\mathcal{R}(x, y; r)(\Sigma\, z^2 - r) - (\Sigma\, yz - r r_{\eta\zeta})^2 (\Sigma\, x^2 - r) - (\Sigma\, xz - r r_{\xi\zeta})^2 (\Sigma\, y^2 - r)$$
$$+ 2(\Sigma\, xz - r r_{\xi\zeta})(\Sigma\, yz - r r_{\eta\zeta})(\Sigma\, xy - r r_{\xi\eta}) = 0$$

En faisant $r = r_{xy}^{(1)}$ il ne reste dans le premier membre que les trois derniers termes. Or, ces termes constituent une forme quadratique en $\Sigma\, xz - r r_{\eta\xi}$, $\Sigma\, xz - r r_{\zeta\eta}$. Par hypothèse, le discriminant de cette forme sera nul pour $r = r_{xy}^{(1)}$ et comme d'après (30) $\Sigma\, x^2 - r_{xy}^{(1)} \geqslant 0$ $\Sigma\, y^2 - r_{xy}^{(1)} \geqslant 0$ celle-ci sera un carré négatif. Pour $r = r_{xy}^{(2)}$ le carré sera positif.

Par conséquent :

$$(31) \qquad \mathcal{R}(x, y, z; r_{xy}^{(1)}) \leqslant 0 \qquad \mathcal{R}(x, y, z; r_{xy}^{(2)}) \leqslant 0$$
$$\mathcal{R}(x, y; r_{xy}^{(1)}) \geqslant 0 \qquad \mathcal{R}(x, y; r_{xy}^{(2)}) \leqslant 0 \qquad \mathcal{R}(x, y; r_{xyz}^{(3)}) \geqslant 0$$

Les racines de $\mathcal{R}(x, y; r) = 0$ séparent donc les racines de $\mathcal{R}(x, y, z; r) = 0$. Supposons, en général, que les racines de $\mathcal{R}(x, y,... u; r) = 0$ séparent celles de $\mathcal{R}(x, y,... u, v; r) = 0$. Considérons l'équation conséquente à cette dernière : $\mathcal{R}(x, y, z,... u, v, t; r) = 0$. Développons d'après la dernière ligne et la dernière colonne, on aura :

$$(32) \qquad \mathcal{R}(x, y,... v, t; r) = (\Sigma\, t^2 - r)\, \mathcal{R}(x, y,... v; r) + \mathrm{F}$$

où F est une forme quadratique homogène en $\Sigma\, xt - r r_{\xi\tau}$, $\Sigma\, yt - r r_{\eta\tau}$.... Remarquons que cette forme est, à un facteur de proportionnalité près, l'adjointe de la forme :

$$\Phi = (\Sigma\, x^2 - r)\, \mathrm{X}^2 + (\Sigma\, y^2 - r)\, \mathrm{Y}^2 + ...$$
$$+ 2(\Sigma\, xy - r r_{\xi\eta})\, \mathrm{XY} + 2(\Sigma\, xz - r r_{\zeta})\, \mathrm{YZ} + ...$$

Faisons dans (32) $r = r^{(1)}_{xy\ldots uv}$. Le premier terme s'annule et il ne nous reste plus que la forme F $[r = r^{(1)}_{xy\ldots uv}]$. Or, pour cette valeur de r le discriminant de la forme Φ s'annule également : elle se décomposera dans $m - 1$ carrés tout au plus, m étant le nombre des variables $x, y, \ldots u, v$. Dans ce cas sa forme adjointe F sera identiquement nulle ou égale à un carré (1). Puisque dans cette forme les coefficients de $\Sigma\, xt - rr_{\xi\tau}$, $\Sigma\, yt - rr_{\eta\tau}\ldots$ sont égaux à $-\mathcal{R}\,(y, z, \ldots v; r)$, $-\mathcal{R}\,(x, z, \ldots v; r)\ldots$ et puisque par hypothèse :

$$\mathcal{R}\,(y, z, \ldots v; r^{(1)}_{\tau y\ldots v}) \geqslant 0 \qquad \mathcal{R}\,(x, z, \ldots v; r^{(1)}_{\tau y\ldots v}) \geqslant 0\ldots.$$

On aura :

$$\mathcal{R}\,(x, y, z, \ldots v, t; r^{(1)}_{xyz\ldots v}) \leqslant o$$

On démontre de la même manière que :

$$\mathcal{R}\,(x, y, z, \ldots v, t; r^{(2)}_{xyz\ldots v}) \geqslant 0 \qquad \mathcal{R}\,(x, y, z, \ldots v, t; r^{(n)}_{xyz\ldots v}) \leqslant 0\ldots$$

En tenant compte du fait que $\mathcal{R}\,(x, y, z, \ldots v, t; 0) \geqslant 0$ car l'équation $\mathcal{R}\,(x, y, \ldots t; r) = 0$ n'a pas de racines négatives, et des inégalités que nous venons de démontrer, nous pouvons énoncer la propriété suivante :

Les racines d'une équation en r sont séparées par celles d'une quelconque de ces antécédentes.

9. *L'indice de l'erreur commise par l'interpolation linéaire générale ou indice de satisfaction.* — Les considérations que nous avons faites (paragraphe 7) sur l'indice de linéarité nous conduisent à considérer pour notre problème le minimum de s'', or nous savons (27) que :

$$\text{minimum } s'' = r_0 \tag{33}$$

r_0 étant la plus petite des racines de l'équation en r. Nous avons d'ailleurs montré que dans ce cas la probabilité, pour que l'espace linéaire calculé :

$$\mathrm{A}\,x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \ldots + \mathrm{L} = 0$$

se confonde avec le vrai, est proportionnelle à e^{-r_0} valeur qui varie de 1 à 0, lorsque r_0 varie de 0 à $+\infty$.

Nous pourrions donc prendre r_0 comme indice de l'erreur commise. Le théorème établi au paragraphe précédent nous montre que l'erreur n'est pas augmentée par l'introduction d'une coordonnée nouvelle. Ainsi pour le cas d'un ensemble de points dans l'espace à trois dimensions l'erreur commise par l'interpolation d'une droite est tout au moins égale à celle commise par l'interpolation d'un plan. En effet, le théorème mentionné nous montre que :

$$r^{(1)}_{\tau} \geqslant r^{(1)}_{\tau\eta} \geqslant r^{(1)}_{xyz} \geqslant \ldots \geqslant r^{(1)}_{xy\ldots t} \geqslant \ldots \tag{34}$$

Pour la même équation en r, nous distinguons deux cas extrêmes :

---

(1) La démonstration de cette proposition ne rencontre aucune difficulté. On pourrait d'ailleurs l'établir immédiatement en se servant d'une relation démontrée dans R. D'ADHÉMAR, *Leçons sur les principes de l'analyse*, Paris, Gauthier-Villars, 1912, t. 1, p. 102. Théorème IV.

1° r_0 a sa plus petite valeur 0.

2° r_0 atteint sa plus grande valeur.

Examinons ces deux cas.

1. Dans ce cas l'interpolation se fait sans aucune erreur; l'espace linéaire interpolé passe par tous les points. On voit que pour avoir $r_0 = 0$ il faut :

$$(35) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i z_i \ldots & \Sigma x_i t_i \\ \Sigma y_i x_i & \Sigma y_i^2 & \Sigma y_i z_i & \Sigma y_i t_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma t_i x_i & \Sigma t_i y_i & \Sigma t_i z_i \ldots & \Sigma t_i^2 \end{vmatrix} = 0$$

or, d'après les propriétés des matrices :

$$(36) \qquad \delta = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_n \end{matrix} \right\|^2 = \Sigma \left| \begin{matrix} x_i & x_j & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_k \\ y_i & y_j & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_i & t_j & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t_k \end{matrix} \right|^2$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons $i, j, \ldots k$ de m nombres pris parmi 1, 2,..... n. La condition (35) exige que tous les déterminants du second membre de (36) soient nuls. *Cela ne peut avoir lieu que si tous les points P_i se trouvent dans le même espace linéaire à $m - 1$ dimensions passant par origine.*

Cet espace constitue la solution du problème d'interpolation.

2. Comme r_0 est la plus petite racine de l'équation en r, elle est plus petite, ou tout au plus égale, à la plus grande des racines de cette même équation. Dans ce dernier cas l'équation en r a toutes ses racines égales (1). Comme d'autre part la plus grande des racines est égale au maximum maximorum de s'', il s'ensuit que $s'' = c^{te}$ et réciproquement, car pour que s'' soit constante il faut avoir :

$$(37) \quad \frac{\Sigma x^2}{\sigma_\xi^2} = \frac{\Sigma y^2}{\sigma_\eta^2} = \ldots\ldots = \frac{\Sigma t^2}{\sigma_\zeta^2} = \frac{\Sigma xy}{r_{\xi\eta}\,\sigma_\xi\,\sigma_\eta} = \frac{\Sigma xz}{r^{\xi\zeta}\,\sigma_\xi\,\sigma_\eta} = \ldots\ldots = T$$

et sous ces conditions l'équation en r a toutes ces racines égales à T. Donc :

$$(38) \qquad \max.\ r_0 = T$$

Mais dans ce cas (37) la position de l'espace que l'on veut interpoler, n'est plus déterminée, toute position ayant la même probabilité proportionnelle à e^{-T} de se confondre avec la vraie. *Les chances de nous approcher de la vérité, ne sont pas augmentées par l'interpolation.*

On reconnaît dans ce qui précède les deux cas limites que nous avons rencontrés pour l'indice classique de linéarité.

10. Cependant, nous ne pouvons pas rester à r_0 comme indice de satisfaction, car son échelle de variation de 0 à T, T pouvant varier jusqu'à l'infini, n'est pas déterminée et n'est pas la même pour tous les cas, ce qui rend impossible la comparaison de deux interpolations. Il faut que l'indice varie

(1) On laissera de côté, bien entendu, les racines infinies, d'ailleurs dans ce cas l'équation en r n'est plus de degré m.

entre deux limites bien determinées, que l'on prend habituellement égales à 0 et à 1. Pour cela nous n'avons qu'à considérer comme indice cherché l'expression :

$$\rho = \frac{r_0}{T} \tag{39}$$

qui varie, en effet, de 0 à 1 lorsque l'on passe du cas 1 au cas 2.

Pour que la formule adoptée (39) puisse nous servir en pratique, il faut trouver pour T une expression en fonction des données. Le choix de cette expression n'est pas complètement déterminé. On peut prendre pour T, par exemple, toute expression de la forme :

$$\frac{\Psi\,(\Sigma\, x^2, \Sigma\, y^2\ .\ .\ .\ ., \Sigma\, xy, \Sigma\, xz\ .\ .\ .)}{\Psi\,(\sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2\ .\ .\ .\ r_{\xi\eta}\,\sigma_\xi\,\sigma_\eta, r_{\xi\zeta}\,\sigma_\xi\,\sigma_\zeta\ .\ .\ .}$$

Ψ étant une fonction homogène de degré un. On peut également prendre pour T une des fonctions symétriques des racines de l'équation en r :

$$T = \frac{r^{(1)} + r^{(2)} .. + r^{(m)}}{m}$$

$$T = \sqrt{\frac{r^{(1)}\,r^{(2)} + r^{(1)}\,r^{(3)} + \ .\ .\ .\ + r^{(m-1)}\,r^{(m)}}{m\,(m-1)}}$$

$$T = \sqrt{\frac{[r^{(1)}]^2 + [r^{(2)}]^2 + \ .\ .\ .\ + [r^{(m)}]^2}{m}}$$

. . . . . .

Laquelle faut-il choisir? Car selon ce choix, les valeurs de ρ provenant de la même équation en r, seront différentes et ne coïncideront qu'aux limites.

Nous essaierons de faire un choix parmi cette foule de possibilités en nous guidant des lumières que peuvent nous apporter en cette matière, les cas particuliers.

Pour que la détermination de la position la plus probable de l'espace :

$$Ax + By + Cz + \ .\ .\ .\ + L = 0$$

soit possible, il est absolument nécessaire que les points dont on mesure les coordonnées ne se confondent pas en un seul.

Supposons pourtant qu'il en soit ainsi et prenons cet unique point comme origine. (On sait que sa position probable est le centre de gravité des points P_i).

D'après ce que nous avons vu plus haut, puisque la détermination dans ce cas-là d'un espace n'est pas possible, on aura :

$$s'' = T$$

D'autre part, comme sous cette hypothèse nous connaissons l'unique point que l'on a visé, nous ferons usage de la relation (11) :

$$s = l_1 + l_2 + \ .\ .\ + l_n$$

Le point P_i se trouvant sur l'hyperellipsoïde :

$$H(x, y, z \ldots t) = H(x_i, y_i, z_i \ldots t_i)$$

on aura (9) :

$$h_i = H(x_i, y_i, z_i, \ldots t_i)$$

donc :

$$s = \Sigma H(x_i, y_i, z_i, \ldots t_i) \tag{40}$$

Il est facile de se rendre compte que sous les conditions (37) on aura :

$$\Sigma H(x_i, y_i, z_i \ldots, t_i) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \Sigma x^2 & r_{\xi\eta} & r_{\xi\zeta} & \ldots & r_{\xi\tau} \\ \Sigma xy & 1 & r_{\eta\zeta} & \ldots & r_{\eta\tau} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma xt & r_{\tau\eta} & r_{\tau\zeta} & \ldots & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \Sigma xy & r_{\xi\zeta} & \ldots & r_{\xi\tau} \\ r^{\xi\eta} & \Sigma y^2 & r_{\eta\zeta} & \ldots & r_{\eta\tau} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{\tau\xi} & \Sigma yt & r_{\tau\zeta} & \ldots & 1 \end{vmatrix} + \ldots = m'T \tag{40bis}$$

où m' est le nombre des variables qui entre effectivement dans la composition de H. Il est clair qu'il peut être inférieur à m, nombre des coordonnées $x, y, z, \ldots t$. Du rapprochement entre s'' (40) et (40 *bis*) nous sommes conduits à prendre :

$$T = \frac{\Sigma H(x_i, y_i, z_i \ldots, t_i)}{m'}$$

et par conséquent (39) devient :

$$\rho = \frac{m' r_0}{\Sigma H(x_i, y_i, z_i \ldots, t_i)} \tag{41}$$

Dans le cas où $m = m'$ l'expression que nous avons adoptée pour T devient :

$$T = \frac{r^{(1)} + r^{(2)} + \ldots + r^{(m)}}{m}$$

relation facile à démontrer si on tient compte de la forme de l'équation en r et de (40 *bis*).

Et avec cela le choix dont nous parlions plus haut est fait; nous ne voyons pas comment il aurait pu être motivé davantage.

Maintenant en partant de (41) on peut varier à l'infini les indices d'approximation. En le prenant égal à (41 *bis*)

$$i = \sqrt{1 - \rho}$$

on aura la généralisation de l'indice de linéarité du paragraphe 7.

Cette nouvelle expression a également l'avantage de généraliser celle du coefficient de corrélation multiple. Si l'on s'arrête à (41), une faible valeur de ρ sera l'indice d'une suffisante approximation obtenue par l'interpolation.

Pourtant l'estimation de ce fait par la grandeur de ρ reste, comme pour tous les autres indices employés en statistique, une question d'appréciation subjective et spéciale à chaque cas.

TROISIÈME PARTIE

L'INTERPOLATION TRIGONOMÉTRIQUE

11. Dans cette troisième partie nous ferons une application des résultats précédents à une méthode qui nous permettra de calculer d'une manière précise les périodes d'un phénomène.

La recherche de la périodicité que peut accuser une série de données constitue un problème d'analyse harmonique. Ce problème ne se pose pas de la même manière si la période ou plutôt les périodes du phénomène que l'on étudie, nous sont ou non connues.

Lorsque les périodes sont connues l'interpolation trigonométrique ne présente plus que les difficultés de toute autre interpolation. La méthode des moindres carrés, appliquée dans tout ce qu'elle a de plus simple, nous permettra dans ce cas, de calculer les amplitudes et le décalage dans le temps des périodes et de résoudre complètement, par cela même, la question. La connaissance des périodes apparaît donc comme absolument nécessaire pour pouvoir procéder à cette interpolation.

Malheureusement, dans la plupart des cas, nous ignorons complètement les grandeurs des périodes, voire leur existence; c'est précisément le cas de nombreux phénomènes pour lesquels les disciplines, dont ils font l'objet, n'ont pas encore pu découvrir les lois. Les recherches de statistique mathématique ayant comme but l'étude de l'existence d'une périodicité ne peuvent certainement pas combler cette lacune, mais les résultats obtenus par cette voie nous donneront des suggestions nouvelles et nous ouvriront des horizons plus larges. Elles permettront également de vérifier l'exactitude des hypothèses restées encore sous forme d'ébauches, et en attendant que ces lois soient découvertes ou complétées, nous pouvons toujours dire en face des résultats de la statistique mathématique : les faits sont là.

Il y a plusieurs méthodes à employer pour la recherche des périodes d'un phénomène et chacune de ces méthodes peut être transformée et adaptée à chaque cas particulier. On trouvera un exposé des travaux faits jusqu'à présent dans cette direction dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, édition française, tome II*, volume 5, p. 82.

De toutes les méthodes, la méthode graphique reste toujours la plus simple et la plus éloquente. Mais pour qu'elle puisse nous mettre en évidence la périodicité, il faut que celle-ci ne soit pas trop cachée. Or, il y a deux causes principales qui empêchent nos yeux de découvrir sur le graphique un mouvement périodique : la première est la trop grande fluctuation des écarts accidentels par rapport à l'amplitude de ce mouvement, et la seconde, la superposition de plusieurs périodes. Les cas auxquels la méthode graphique a pu s'appliquer, sont des cas heureux, car il est bien rare qu'au moins une de ces causes n'agisse pas. Un cas où la périodicité est manifeste sur le graphique est celui du nombre des taches solaires.

Lorsque la périodicité ne peut pas être mise en évidence à l'aide de cette première méthode, il faut demander au calcul ce que le graphique n'a pu nous donner. Dans cette voie, les méthodes les plus connues et les plus commodes à la fois sont celle de *Buys-Ballot* et celles de *Lagrange*.

12. *La méthode de Buys-Ballot.* — On trouvera un exposé détaillé et une intéressante application de cette méthode dans : *Chr.-H.-D. Buys-Ballot, Les changements périodiques de température dépendant de la nature du soleil et de la lune, mis en rapport avec le pronostic du temps déduits d'observations néerlandaises de 1729-1846.* Utrecht, Keminik et fils 1847, pp. 35 et sq.

Le principe en est contenu dans le premier des cinq théorèmes établis empiriquement par l'auteur. Ce théorème est le suivant :

« Si l'on a une série de nombres $y_1, y_2, y_3 \ldots$ qui croissent ou décroissent suivant une certaine loi dont la période est de n intervalles, les sommes :

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 + y_{1+n} + y_{1+2n} + \ldots \\ s_2 &= y_2 + y_{2+n} + y_{2+2n} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= y_n + y_{2n} \quad + y_{3n} \quad + \ldots \end{aligned}$$

auront la même loi de périodicité que la série initiale ».

Le théorème II nous montre que si la période est différente de n intervalles, les sommes obtenues plus haut deviennent à la longue presque égales. Les autres théorèmes nous donnent le moyen de nous approcher plus vite de la vraie valeur de la période sans faire trop d'essais. C'est une méthode simple et claire à la fois.

Cependant il y a bien des cas — les plus intéressants, paraît-il — pour lesquels cette méthode, tout en nécessitant des calculs, ne nous apprend rien de plus que la méthode graphique. Car si les écarts accidentels effacent dans le graphique le mouvement périodique du phénomène, pour que l'application du théorème I nous le mette en évidence, il faut que l'on dispose d'une série de données assez grande, pour que les erreurs contenues dans les sommes s, soient réduites. Si cette condition n'est pas remplie, et si surtout l'amplitude du mouvement cyclique est faible, la méthode de Buys-Ballot ne pourra rien nous donner.

Et même si les observations sont suffisamment nombreuses les calculs que cette méthode nécessite, et qui augmentent avec le nombre des données, deviennent presque inextricables, à moins que l'on n'ait pas une idée quelconque sur la grandeur de la période. C'est justement ces deux circonstances qui ont permis à Buys-Ballot d'arriver assez rapidement à un résultat; son calcul portait sur les données quotidiennes de quarante années, et il savait *a priori* que la période était comprise entre vingt-six et vingt-sept jours (Voir *op. cit.*, p. 40).

On peut considérer cette méthode comme un complément utile de la méthode graphique, et dans les cas où elles peuvent s'appliquer ensemble, la première nous donnera des indications que précisera par le calcul la seconde.

13. *Les méthodes de Lagrange.* — Dans la première méthode de Lagrange on considère la fonction génératrice :

$$\lambda(t) = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots\ldots + y_n t^n + \ldots$$

de la série d'observations. On cherche par une voie que nous n'exposerons pas ici, si cette série est récurrente ou non. On en trouvera l'exposé et deux applications au calcul des inégalités planétaires dans : *Œuvres de Lagrange*, tome VI, p. 507.

La deuxième méthode que Lagrange a donnée comme un complément de la précédente, est basée sur le calcul des différences. On sait que la suite des différences de différents ordres, d'une série de données, peut nous renseigner sur le degré du polynome qui sera le plus indiqué pour une interpolation parabolique. Ce fait a amené Lagrange à rechercher s'il n'y avait pas une méthode analogue pour l'interpolation trigonométrique, et c'est ainsi qu'il a édifié son second procédé. (Voir *Œuvres de Lagrange*, tome VII, p. 547 et sq.)

Ces deux méthodes d'une toute autre précision que celle de Buys-Ballot, ont pourtant un inconvénient : tout en permettant un calcul précis de la valeur des périodes, les résultats auxquels elles nous amènent sont trop influencés par les écarts accidentels. D'ailleurs on peut se rendre compte en se rapportant aux mémoires de Lagrange que ses méthodes ne font intervenir dans les calculs qu'un très petit nombre d'observations, et elles sont loin de faire usage de l'ensemble de la série. Lagrange ayant appliqué sa première méthode pour trouver les périodes de l'*équation du temps de Mayer*, est pourtant arrivé à des résultats très voisins des valeurs que l'on avait obtenues par d'autres voies plus directes. Mais la raison du succès de la méthode est d'un ordre que nous avons déjà mentionné plus haut : c'est la faible fluctuation des écarts accidentels par rapport à l'amplitude du mouvement. Il nous semble donc que les méthodes de Lagrange, tout en étant d'une précision beaucoup plus grande que celles que nous avons exposées antérieurement, se heurtent presque aux mêmes difficultés.

Le but que nous nous sommes proposé en commençant ce travail, a été d'essayer de trouver une méthode qui tienne compte de toutes les données et qui nous permette par là de soustraire les résultats à une influence trop pesante des écarts fortuits. Nous nous sommes inspiré des travaux de Lagrange et notamment des principes qui sont à la base de sa deuxième méthode. Peut-être, aurait-on pu édifier une méthode se basant sur la fonction génératrice $\lambda(t)$. Nous ne l'entrevoyons pas pour le moment et d'ailleurs la méthode à laquelle nous avons été amené, nous paraît offrir l'avantage de ne demander que des opérations qui, pour la plupart, sont de celles qui se rencontrent dans toute interpolation.

14. *Considérations générales.* — Supposons que par les méthodes connues, on soit arrivé à éliminer le mouvement de longue durée du phénomène considéré et que nous nous trouvions en face des données ne renfermant plus que :

1° Une composante constante que nous appelerons la normale;

2° Plusieurs composantes de nature trigonométrique, les composantes cycliques;

3° Et finalement une composante qui constituera l'écart et que nous considérerons comme fortuite.

Soit $y_0, y_1 \ldots, y_{n-1}$ les données; on aura d'après l'hypothèse faite (1) :

$$(42) \qquad \begin{aligned} y_0 &= y + m \sin a + \varepsilon_0 \\ y_1 &= y + m \sin (a + \alpha) + \varepsilon_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} &= y + m \sin [a + (n-1)\alpha] + \varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

Pour trouver la normale y, prenons la moyenne arithmétique des y_i :

$$(43) \qquad Y = y + \frac{m}{n \sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{n\alpha}{2} \sin \left(\frac{n-1}{2}\alpha + a\right) + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots \varepsilon_{n-1}}{n}.$$

Comme nous avons distingué dans la partie non cyclique de y_i une composante constante et une autre fortuite, nous aurons :

$$\text{Valeur probable de } \left[\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1}}{n}\right] = 0$$

car si cette relation n'était pas vraie, cela signifierait qu'il eût fallu prendre une autre valeur pour la composante normale. Quant au terme de (42) renfermant des lignes trigonométriques, on voit qu'il diminue lorsque n croît et sauf cela — si n n'est pas suffisamment grand — on peut toujours s'arranger pour le rendre nul, ce qui arrive si :

$$(44) \qquad \frac{n\alpha}{2} = k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{n-1}{2}\alpha + a = k\pi.$$

Le première de ces relations peut se mettre sous la forme $n = k\mathrm{T}$ ou $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\alpha}$ est la valeur de la période. Cela signifie qu'il faut porter le calcul sur un nombre entier de périodes. Pour satisfaire à la seconde relation (44) il faut que le milieu de l'intervalle du temps auquel appartiennent les données soit un centre de symétrie de la courbe représentant la marche du phénomène. Bien entendu, ces deux moyens pour rendre nul le deuxième terme de (43) supposent implicitement la connaissance de la période ou, ce qui revient au même, du mouvement cyclique, qui en pratique ne nous est connu qu'ensuite. Cependant, on doit reconnaître que ce n'est pas là un obstacle qui nous empêche de tenir compte des considérations précédentes, car la représentation graphique nous permettra toujours de satisfaire d'une manière, soit-elle même largement approximative à une des conditions (44); une ignorance si complète du mouvement périodique d'un phénomène ne peut pas être conçue; et

(1) Nous supposons pour l'instant qu'il n'y ait qu'une composante cyclique. Cela n'enlèvera rien aux conclusions qui vont suivre. Plus loin, lorsqu'il sera nécessaire, nous considérerons le cas général.

d'ailleurs elle rendrait la recherche de la périodicité dépourvue de tout fondement. La relation (43) nous donnera sous ces conditions :

$$Y \simeq y$$

15. *Relations entre les différences d'une série périodique.* — Une fois la composante normale éliminée, les données ne renfermeront plus que la composante cyclique et la composante fortuite. Pour les calculs qui vont suivre, nous ferons abstraction de cette dernière. Choisissons comme origine du temps le moment d'une des observations et soit :

$$\ldots\ldots A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$$

la série ainsi obtenue. On aura :

$$(45)\qquad \begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A_{-3} & = m \sin (a - 3\alpha) \\ A_{-1} & = m \sin (a - 2\alpha) \\ A_{-1} & = m \sin (a - \alpha) \\ A_0 & = m \sin a \\ A_1 & = m \sin (a + \alpha) \\ A_2 & = m \sin (a + 2\alpha) \\ A_3 & = m \sin (a + 3\alpha) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Calculons les différences secondes :

$$(46)\qquad \begin{array}{llll} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ B_{-2} = A_{-1} & -2\,A_{-2} & +A_{-3} & = -4\,m \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin (a - 2\alpha) \\ B_{-1} = A_0 & -2\,A_{-1} & +A_{-2} & = -4\,m \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin (a - \alpha) \\ B_0 = A_1 & -2\,A_0 & +A_{-1} & = -4\,m \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin a \\ B_1 = A_2 & -2\,A_1 & +A_0 & = -4\,m \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin (a + \alpha) \\ B_2 = A_3 & -2\,A_2 & +A_1 & = -4\,m \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin (a + 2\alpha) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \end{array}$$

Nous remarquons qu'en passant de (45) à (46) les termes respectifs se trouvent multipliés par $-\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2$; donc en prenant les différences secondes de (46), c'est-à-dire les différences quatrièmes de (45), on aura :

$$(47)\qquad \begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ C_{-1} & = +16\,m \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin (a - \alpha) \\ C_0 & = +16\,m \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin a \\ C_1 & = +16\,m \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin (a + \alpha) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

la propriété énoncée se reproduisant à l'infini.

On voit ainsi que le tableau à double entrée :

$$
(\mathrm{I})\qquad
\begin{array}{llll}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{-3}, & B_{-3}, & C_{-3}, & D_{-3}, \ldots \\
A_{-2}, & B_{-2}, & C_{-2}, & D_{-2}, \ldots \\
A_{-1}, & B_{-1}, & C_{-1}, & D_{-1}, \ldots \\
A_0\ , & B_0\ , & C_0\ , & D_0\ , \ldots \\
A_1\ , & B_1\ , & C_1\ , & D_1\ , \ldots \\
A_2\ , & B_2\ , & C_2\ , & D_2\ , \ldots \\
A_3\ , & B_3\ , & C_3\ , & D_3\ , \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

a les éléments d'une même ligne en progression géométrique dont la raison, toujours la même, est égale à $-\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

S'il y a deux composantes cycliques :

$$A_i = m_1 \sin(a_1 + i\,\alpha_1) + m_2 \sin(a_2 + i\alpha_2)$$

les calculs seront identiques à ceux que nous avons faits précédemment avec cette différence qu'ils porteront sur deux termes au lieu d'un seul. Les éléments d'une ligne de (I) seront formés par l'addition des termes de même rang de deux progressions géométriques, dont les raisons seront $-\left(2\sin\frac{\alpha_1}{2}\right)^2$, $-\left(2\sin\frac{\alpha_2}{2}\right)^2$.

Pour m composantes cycliques, le tableau (I) sera formé d'éléments obtenus par l'addition des termes de même rang de m progressions géométriques, les mêmes pour la ligne, et dont les raisons seront $-\left(2\sin\frac{\alpha_1}{2}\right)^2$, $-\left(2\sin\frac{\alpha_2}{2}\right)^2$,... $-\left(2\sin\frac{\alpha_m}{2}\right)^2$.

Prenons une ligne de ce tableau; adoptons les notations :

$$c_k = m_k \sin(a_k + i\alpha_k) \qquad z_k = -\left(2\sin\frac{\alpha_k}{2}\right)^2$$

on aura :

$$
\begin{array}{l}
A_i = c_1 + c_2 + \ldots + cm \\
B_i = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_m z_m \\
C_i = c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \ldots + c_m z_m^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_i = c_1 z_1^i + c_2 z_2^i + \ldots + c_m z_m^i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Soit T, T′, T″, ..$T^{(m)}$, $m+1$ termes consécutifs de cette suite; par élimination de c_1, c_2,.. c_m, on obtiendra :

$$
(48)\qquad
\begin{vmatrix}
T & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
T' & z_1 & z_2 & \ldots & z_m \\
T'' & z_1^2 & z_2^2 & \ldots & z_m^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
T^{(m)} & z_1^m & z_2^m & \ldots & z_m^m
\end{vmatrix} = 0
$$

Maintenant si :

$$(49)\qquad Z^m + p_1 Z^{m-1} + \ldots + p_{m-1} Z + p_m = 0$$

est l'équation ayant comme racines z_1, z_2,.. z_m la relation (48) devient :

$$(50)\qquad T^{(m)} + p_1 T^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1} T' + p_m T = 0.$$

Par conséquent entre $m + 1$ termes consécutifs d'une même ligne du tableau (I) existe une relation de récurrence, cette relation étant la même pour toutes les lignes, car elle ne dépend que des raisons $z_1, z_2, \ldots z_m$ (1).

La liaison qu'il y a entre l'équation en Z (49) et la relation de récurrence (50) est à la base de notre recherche; c'est elle qui nous permettra le calcul des périodes $T_i = \frac{2\pi}{\alpha_i}$.

16. *Examen du cas théorique.* — Pour fixer les idées supposons qu'il n'y ait que deux périodes; la relation (50) nous donne :

$$
(51) \qquad \begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_2 A_{-2} + p_1 B_{-2} + C_{-2} = 0 \\
p_2 A_{-1} + p_1 B_{-1} + C_{-1} = 0 \\
p_2 A_0 + p_1 B_0 + C_0 = 0 \\
p_2 A_1 + p_1 B_1 + C_1 = 0 \\
p_2 A_2 + p_1 B_2 + C_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Les inconnues du problème sont p_1, p_2 et s'il n'y avait pas de composante aléatoire, deux de ces relations suffiraient pour déterminer les valeurs de ces inconnues. Bien entendu pour que cette détermination soit possible il faut que le système formé par ces deux relations ne soit pas incompatible. On trouvera parmi (51) deux relations pour lesquelles :

$$
(52) \qquad \begin{vmatrix} A_i & B_i \\ A_k & B_k \end{vmatrix} \neq 0 \; .
$$

car si tous ces déterminants étaient nuls, on n'aurait plus deux composantes, les relations (51) étant, le cas échéant, remplacées par :

$$
(53) \qquad p_1 A_i + B_i = 0.
$$

Nous pouvons donner à ces considérations une interprétation géométrique. Soit un espace à une infinité dénombrable de dimensions. Le tableau (I) sera représenté dans cet espace par un certain nombre de points. *Nous savons d'avance* (50) *que tous ces points doivent se trouver dans le même espace linéaire passant par l'origine des coordonnées.* Soit m le nombre de ces dimensions. Il pourra dans ce cas être déterminé par m points de (I) ne se trouvant pas tous dans un espace linéaire à un nombre moindre de dimensions. Maintenant, si nous ne pouvons pas trouver parmi les points (I) m points qui satisfassent à cette condition, ce sera parce que tous ces points se trouvent dans un espace linéaire à $m-1$ dimensions tout au plus. Ce fait nous montrera que nous avons fait une estimation en plus du *nombre des dimensions* de l'espace linéaire contenant les points (I) et qu'il faudra le diminuer.

17. *Cas réel.* — Les considérations précédentes portant sur un cas qui ne se présente jamais en pratique où la composante aléatoire intervenant fait que

(1) Lagrange considérait également un deuxième tableau formé par les demi-sommes des différences consécutives d'ordre impair. Ce tableau dont nous n'aurons pas besoin, jouit des mêmes propriétés que (I).

toutes les relations (50 et en espèce (51) ne soient plus qu'approximatives. Déterminer p_1, p_2 à l'aide de deux relations (51) serait faire un calcul trop soumis à l'erreur contenue dans ces relations. Le problème de la détermination de p_1, p_2 se présente sous une autre forme :

Sachant que les relations (51) sont vérifiées d'une manière approximative quelles sont les meilleures valeurs à attribuer à p_1, p_2?

Pour le résoudre nous ferons usage des résultats obtenus dans la première partie de ce travail.

Il s'agit de déterminer un plan :

$$p_2 x + p_1 y + z = 0$$

à l'aide de ses paramètres directeurs p_1, p_2. Nous avons pour le déterminer une suite de points (A_i, B_i, C_i) (1) mais qui ne se trouvent plus dans le même plan parce que leurs coordonnées sont entachées d'erreurs. Nous reconnaissons là le problème énoncé paragraphe 1.

Soit e_i la composante aléatoire contenue dans A_i; prenons son écart type comme unité. Les écarts de B_i et C_i seront respectivement :

$$e_{i+1} - 2 e_i + e_{i-1}, \quad e_{i+2} - 4 e_{i+1} + 6 e_i - 4 e_{i-1} + e_{i-2}.$$

Si ξ, η, ζ désignent ces écarts, on aura :

$$\sigma_\xi^2 = 1 \quad \sigma_\eta^2 = 6 \quad \sigma_\zeta^2 = 70 \quad r_{\eta\zeta}\, \sigma_\eta\, \sigma_\zeta = -20 \quad r_{\zeta\xi}\, \sigma_\zeta\, \sigma_\xi = 6 \quad r_{\xi\eta}\, \sigma_\xi\, \sigma_\eta = -2$$

relations qui nous permettront d'obtenir les coefficients a_{ik}, a^{ik} (5).

Ensuite l'équation en r :

$$\begin{vmatrix} \Sigma A_i^2 - r & \Sigma A_i B_i + 2r & \Sigma A_i C_i - 6r \\ \Sigma B_i A_i + 2r & \Sigma B_i^2 - 6r & \Sigma B_i C_i + 20r \\ \Sigma C_i A_i - 6r & \Sigma C_i B_i + 20r & \Sigma C_i^2 - 70r \end{vmatrix} = 0$$

nous donnera r_0 et le système correspondant à (25) :

$$\frac{p_2 \Sigma A_i^2 + p_1 \Sigma A_i B_i + \Sigma A_i C_i}{p_2 - 2 p_1 + 6} = \frac{p_2 \Sigma A_i B_i + p_1 \Sigma B_i^2 + \Sigma B_i C_i}{-2 p_2 + 6 p_1 - 20} = r_0$$

nous permettra de trouver *les valeurs les plus probables* de p_1 et p_2.

Une fois ces valeurs trouvées on obtiendra en résolvant l'équation en :

$$Z^2 + p_1 Z + p_2 = 0$$

les valeurs de z_1, z_2 qui nous donneront α_1, α_2 c'est-à-dire les périodes T_1 et T_2.

Il n'est nullement besoin d'insister davantage sur cette méthode. On comprendra facilement que la marche à suivre est la même quel que soit le nombre des périodes.

---

(1) Remarquons ici que l'on aurait pu prendre trois autres termes consecutifs du tableau (I). Si nous employons les trois premiers, c'est parce qu'ils sont ceux que le calcul nous met immediatement en evidence et parce que les erreurs qu'ils contiennent sont les plus petites de toutes les autres On sait, en effet, que dans les differences d'une serie de termes affectes d'erreurs, les erreurs s'accumulent et leur écart type augmente avec l'ordre de ces differences.

Quant aux calculs qu'elle comporte, nous devons faire remarquer qu'ils sont les mêmes que ceux qu'on rencontre dans l'interpolation linéaire : calcul des différences, des sommes de carrés, et des sommes de produits. Il n'y a que la seule difficulté que peut présenter la résolution des équations en r et en Z, dont les degrés peuvent être assez élevés, qui interviennent comme élément nouveau. On se servira, pour les résoudre, d'une des méthodes connues, basées sur le principe des approximations successives. D'ailleurs il est bien rare qu'un phénomène présente plus de trois périodes, ce qui limite pratiquement au quatrième le degré des équations à résoudre pour atteindre le but proposé.

18. *Indice de satisfaction.* — En face d'une application pratique de la méthode d'interpolation trigonométrique que nous venons d'exposer, nous serons dans l'impossibilité de savoir s'il faut faire une interpolation à une, à deux... composantes cycliques. Nous avons montré à la fin du paragraphe 16 que si la composante fortuite n'existe pas, le calcul nous avertira toujours si nous avons fait une estimation trop grande des périodes. Pour le cas, tel qu'il se présente en réalité, nous demanderons à l'indice étudié dans la deuxième partie de nous renseigner, dans la mesure où cela sera possible, sur cette question. Voilà comment il faut procéder :

Supposons que nous n'ayons aucune idée sur les périodes du phénomène que nous voulons étudier. Nous ferons alors l'hypothèse provisoire qu'il n'y a qu'une seule période. On calculera alors comme ci-dessus, la valeur de cette période. Mais pour arriver à trouver cette valeur, nous savons qu'il faut faire d'abord une interpolation linéaire, dans le plan. Nous calculerons la valeur de l'indice de l'approximation obtenue par cette interpolation, en nous servant des formules (41) et (41 *bis*). Nous obtenons ainsi une valeur de i. Si cette valeur est suffisamment approchée de l'unité, nous nous arrêterons là; si elle est insignifiante, alors nous passerons plus loin et nous calculerons la valeur de i sous l'hypothèse de deux périodes, de trois périodes, etc. Nous obtiendrons ainsi une suite de valeurs de i :

$$i^{(1)},\ i^{(2)},\ i^{(3)},\ldots\ i^{(n)}\ldots \tag{54}$$

Nous nous arrêterons là où l'approximation mesurée par ces valeurs sera jugée suffisante; ensuite on passera au calcul de z_i et de α_i.

Remarquons que pour calculer la suite (54) il est suffisant de connaître les valeurs correspondantes de r_0, c'est-à-dire de résoudre les différentes équations en r. Les calculs seront abrégés si nous tenons compte de la propriété des équations en r démontrée plus haut paragraphe 8 (34).

Nous ne pouvons pas affirmer en général que la suite (54) *soit croissante; mais si la périodicité que nous cherchons à découvrir existe, elle se fera sentir par l'allure de cette suite et nous estimons que si cette dernière accuse un léger mouvement croissant nous aurons une indication assez précieuse de l'existence de la périodicité.*

Une fois que l'on s'est ainsi fixé sur le nombre des périodes, on passe au calcul des p_i et à la résolution de l'équation en Z.

19. *Remarques sur les racines de l'équation en Z.* — Comme les racines z_i

sont égales à $-\left(2 \sin \frac{\alpha_i}{2}\right)^2$, pour que l'expression mathématique qui représente la marche du phénomène étudié puisse être mise sous la forme d'une somme de sinus, il faut qu'elles soient toutes comprises entre — 4 et 0. Toute racine qui n'appartient pas à cet intervalle ou qui présente un degré de multiplicité supérieur à l'unité, constitue par conséquent un cas singulier de la solution. Nous allons examiner successivement toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les racines z_i.

1° $z > 0$. L'équation qui lie α et z :

$$\cos \alpha = 1 + \frac{z}{2} \tag{55}$$

ne pourra plus nous donner une valeur réelle pour x. Cette équation mise sous la forme :

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 + z$$

nous donnera

$$e^{i\alpha} = \frac{2 + z \pm \sqrt{z^2 + 4z}}{2} \tag{56}$$

et puisque le deuxième membre est positif, on aura $\alpha = i\,w$. Le terme $m \sin (a + i\,\alpha)$ de l'expression de A_x sera remplacé par :

$$c\, e^{\omega x} + c'\, e^{-\omega x} \tag{57}$$

Par un calcul direct, on peut se rendre compte que les parties afférentes à ce terme contenues dans A_i, B_i, C_i, forment une progression géométrique dont la raison est :

$$z = \frac{(e^{\omega} - 1)^2}{e^{\omega}} > 0 \tag{57 bis}$$

C'est cette équation que nous emploierons à la place de (55) pour le cas d'une racine positive.

2° $z < -4$. Dans ce cas le deuxième membre de (56) sera négatif, donc :

$$\alpha = \pi + i\,\omega$$

L'expression qui remplacera $m \sin (a + \alpha\, x)$ dans A_x sera :

$$(c\, e^{\omega x} + c'\, e^{-\omega x}) \cos \pi\, x \tag{58}$$

Un calcul direct nous montre que la valeur de ω sera donnée par l'équation :

$$z = -\frac{(e^{\omega} + 1)^2}{e^{\omega}} < -4 \tag{58 bis}$$

3° *z imaginaire.* — Soit $z = u + iv$; puisque l'équation en Z a les coefficients réels, elle admettra également la racine conjuguée $z' = u - i\,v$. A ces deux racines correspondront deux racines imaginaires conjuguées de α :

$$\alpha = \theta + i\,\omega \qquad \alpha' = \theta - i\,\omega$$

La relation (55) nous donnera :

$$(59\ bis)\qquad \begin{aligned}(e^{\omega} + e^{-\omega}) \cos \theta &= 2 + u \\ (e^{\omega} - e^{-\omega}) \sin \theta &= v\end{aligned}$$

L'expression afférente à ces deux racines z et z' sera :

$$(59)\qquad (c\, e^{\omega x} + c'\, e^{-\omega x}) \cos \theta\, x + (c''\, e^{\omega x} + c'''\, e^{-\omega x}) \sin \theta\, x$$

On vérifie aisément que si A_x se réduit à (59) on aura :

$$\begin{aligned}&[2\,(1 + 2\cos^2 \theta) - 4\,(e^{\omega} + e^{-\omega}) \cos \theta + e^{2\omega} + e^{-2\omega}]\, A_t + \\ &+ 2\,[2 - (e^{\omega} + e^{-\omega}) \cos \theta]\, B_t + C_t = 0\end{aligned}$$

Il apparaît clair maintenant que l'équation en Z a comme racines :

$$(e^{\omega} + e^{-\omega}) \cos \theta - 2 \pm i\,(e^{\omega} - e^{-\omega}) \sin \theta$$

ce qui nous mène au système (59 *bis*).

4° *Racines multiples.* — Nous n'insisterons pas davantage sur ce cas. La méthode qui consiste à faire tendre plusieurs racines vers la même valeur et à suivre les modifications que subit l'expression de A_x nous donne le résultat suivant : si une racine est de l'ordre de multiplicité λ les parties correspondantes se multiplient par les polynomes de degré $\lambda - 1$.

L'expression la plus générale que nous pouvons prendre pour A_x sera d'après ce que nous avons établi plus haut :

$$\begin{aligned}Ax = {} & \mathbf{S}\,(P_{\lambda-1} \cos \alpha x + Q_{\lambda-1} \sin \alpha x) + \\ & + \mathbf{S}\,(P_{\nu-1}\, e^{\omega x} + Q_{\nu-1}\, e^{-\omega x}) + \\ & + \mathbf{S}\,(P_{\mu-1}\, e^{\omega x} + Q_{\mu-1}\, e^{-\omega x}) \cos \theta x + \\ & + \mathbf{S}\,(P'_{\mu-1}\, e^{\omega x} + Q'_{\mu-1}\, e^{-\omega x}) \sin \theta\, x\end{aligned}$$

où $\mathbf{S}\,(t)$ signifie une somme de termes analogues à t et $P_{\lambda-1}$, $Q_{\lambda-1}$ des polynomes de degré $\lambda - 1$.

20. *Détermination des constantes.* — Nous avons montré jusqu'à présent quelle est la voie qu'il faut suivre pour trouver les valeurs les plus probables à attribuer à α, θ, ω,... L'expression générale de A_x renferme encore des constantes qu'il faut déterminer en nous servant toujours des données d'observation. C'est la méthode des moindres carrés qui nous permettra de résoudre ce second problème.

Soit, pour fixer les idées, un phénomène qui présente deux périodes et prenons comme origine du temps le moment de la première observation.

Soit :

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots A_{n-1}$$

les données du problème. Il faudra alors trouver une expression de la forme :

$$(60)\qquad A\,(x) = m \sin\,(a + \alpha x) + n \sin\,(b + \beta x)$$

qui s'approche la plus possible des valeurs données par l'observation, α et β étant déjà déterminées.

Adoptons les notations :

$$(61) \qquad m \sin a = \omega \quad m \cos a = \rho \quad n \sin b = \sigma \quad n \cos b = \tau$$

l'expression deviendra dans ce cas :

$$(62) \qquad A(x) = \omega \cos \alpha x + \rho \sin \alpha x + \sigma \cos \beta x + \tau \sin \beta x$$

Nous prendrons comme inconnues ω, ρ, σ, τ et nous obtiendrons ensuite m, n, a, b par les relations :

$$(63) \qquad m = \sqrt{\omega^2 + \rho^2} \quad n = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad tg\, a = \frac{\omega}{\rho} \quad tg\, b = \frac{\sigma}{\tau}$$

Nous prendrons pour α, ρ, σ, τ, les valeurs qui rendront minima la somme :

$$\sum_{0}^{n-1} [A_i - A(i)]^2$$

Ces valeurs seront données par le système d'équations :

$$(64) \qquad \begin{array}{ll} \Sigma\, [A(i) - A_i] \cos i\alpha = 0 & \Sigma\, [A(i) - A_i] \sin i\alpha = 0 \\ \Sigma\, [A(i) - A_i] \cos i\beta = 0 & \Sigma\, [A(i) - A_i] \sin i\beta = 0 \end{array}$$

En tenant compte des relations :

$$\sum_{0}^{n-1} \sin i\alpha \sin i\beta = \frac{\sin \frac{n(\alpha-\beta)}{2} \cos \frac{(n-1)(\alpha-\beta)}{2}}{2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2}} - \frac{\sin \frac{n(\alpha+\beta)}{2} \cos \frac{(n-1)(\alpha+\beta)}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\sum_{0}^{n-1} \cos i\alpha \cos i\beta = \frac{\sin \frac{n(\alpha-\beta)}{2} \cos \frac{(n-1)(\alpha-\beta)}{2}}{2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2}} + \frac{\sin \frac{n(\alpha+\beta)}{2} \cos \frac{(n-1)(\alpha+\beta)}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\sum_{0}^{n-1} \sin i\alpha \cos i\beta = \frac{\sin \frac{n(\alpha-\beta)}{2} \sin \frac{(n-1)(\alpha-\beta)}{2}}{2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2}} + \frac{\sin \frac{n(\alpha+\beta)}{2} \sin \frac{(n-1)(\alpha+\beta)}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

et de celles qu'on peut encore en déduire, on obtiendra d'une manière plus simple, les coefficients des inconnues du système (64). Il ne nous reste plus qu'à calculer directement les termes libres.

Ensuite la résolution de (64) ne présente plus aucune difficulté analytique.

La marche à suivre sera la même quels que soient les termes qui entrent dans la composition de $A(x)$.

QUATRIÈME PARTIE

APPLICATIONS

21. *Quelques remarques.* — Avant de passer aux applications que nous avons annoncées dans l'introduction, nous croyons utile d'étudier quelques modifications que l'on peut apporter à la méthode d'interpolation trigonométrique exposée précédemment et qui nous permettront de rendre les calculs que celle-ci comporte, plus simples et plus courts.

Supposons, comme nous l'avons fait plus haut, que le phénomène considéré n'ait qu'une seule période :

$$A_i = m \sin (a + i\alpha) + e_i \tag{66}$$

Nous aurons :

$$A_{i-1} + A_{i+1} = 2\, m \sin (a + i\alpha) \cos \alpha + e_{i-1} + e_{i+1} \tag{67}$$

Prenons pour B_i cette dernière valeur et faisons sur la suite ainsi obtenue la même transformation que sur celle de A_i :

$$C_i = B_{i-1} + B_{i+1} = 4\, m \sin (a + i\alpha) \cos^2 \alpha + e_{i-2} + 2\, e_i + e_{i+2}$$

En continuant ainsi, nous obtenons un tableau analogue à (1) et ayant les mêmes propriétés; l'équation en Z aura comme racines 2 cos α, et la discussion faite au paragraphe 19 reste valable pourvu qu'on y remplace l'intervalle (— 4,0) par (— 2, + 2).

La modification que nous venons d'apporter à la définition de B_i, C_i,... nous offre deux avantages. D'abord le calcul de ces expressions est plus simple que si elles représentaient des différences. Ensuite, les écarts type et les coefficients de corrélation des erreurs qu'elles contiennent,

$$\begin{array}{lll} \sigma_\xi^2 = 1 & \sigma_\eta^2 = 2 & \sigma_\zeta^2 = 6 \;\ldots\ldots \\ r_{\xi\eta}\, \sigma_\xi\, \sigma_\eta = 0 & r_{\eta\zeta}\, \sigma_\eta\, \sigma_\zeta = 0 & r_{\xi\zeta}\, \sigma_\xi\, \sigma_\zeta = 2 \;\ldots\ldots \end{array} \tag{68}$$

sont plus petits que ceux qu'on trouve dans la troisième partie, paragraphe 17.

22. Une autre question que nous devons élucider est la suivante :

L'équation qui nous donne la valeur de la période T :

$$\cos \alpha = \frac{z}{2}$$

a deux racines positives comprises entre 0 et 2π, à savoir : α_0 et $2\pi - \alpha_0$; il en résulte deux valeurs pour T : $\frac{2\pi}{\alpha_0}$, $\frac{2\pi}{2\pi - \alpha_0}$. Il est facile de nous rendre compte que ces deux valeurs de α nous mènent à la même expression de A_i, et que la période est celle qui correspond à la plus petite valeur α_0.

En effet, comme l'interpolation ne porte que sur une suite discrète de valeurs, les valeurs intermédiaires n'ayant même, assez souvent, pas de sens, nous aurons deux expressions de A_i :

$$m \sin (a + i\ \alpha_0) \qquad\qquad m \sin (a' - i\ \alpha_0)$$

correspondant respectivement à α_0 et $2\pi - \alpha_0$. Or, comme a et a' sont à déterminer ensuite, on voit que l'on arrivera à rendre ces deux expressions identiques en prenant $a' = \pi - a$.

Pour T il y aura également deux valeurs : $\frac{2\pi}{\alpha_0}$ qui peuvent varier de 2 à l'infini, $\frac{2\pi}{2\pi - \alpha_0}$ qui reste comprise entre 2 et 1. C'est la première qu'il faut prendre comme période. En effet, les sinusoïdes :

$$\sin (\pi + i\ \alpha_0) \qquad\qquad \sin i\ (2\pi - \alpha_0)$$

ont les mêmes valeurs pour i entier, mais la seconde passe toujours au moins par un minimum ou un maximum entre deux valeurs consécutives de i (1), ce qui ne peut pas être admis dans le cas d'une suite discontinue (Voir fig. 1). Pour un phénomène susceptible d'une interprétation continue la question est plus délicate; dans ce cas, il faut tâcher d'avoir des observations plus serrées dans le temps. Il faut donc avoir au moins deux observations dans l'intervalle que mesure une période pour que cette période puisse être mise en évidence par le calcul ou par le graphique.

23. Pour aplanir une courbe représentant la marche d'un phénomène, pour faire disparaître en quelque sorte ses aspérités, on se sert en statistique de la méthode *des moyennes mobiles*. La nouvelle courbe obtenue par ce procédé indique d'une manière plus nette la tendance séculaire du mouvement. Que pouvons-nous conclure en ce qui concerne les variations cycliques? Reprenons le cas d'un phénomène à une seule période :

$$A_i = m \sin (a + i\ \alpha) + e_i \qquad (i = 0, 1, \ldots n - 1)$$

Si l'on prend les moyennes successives de k années, on aura :

$$M_0 = \frac{m \sin \frac{k\alpha}{2}}{k \sin \frac{\alpha}{2}} \sin \left(a + \frac{k-1}{2}\alpha\right) + \frac{e_0 + e_1 + \ldots + e_{k-1}}{k}$$

$$(69) \quad M_1 = \frac{m \sin \frac{k\alpha}{2}}{k \sin \frac{\alpha}{2}} \sin \left(a + \frac{k+1}{2}\alpha\right) + \frac{e_1 + e_2 + \ldots + e_k}{k}$$

---

(1) Les maxima et les minima de $\sin x\ (2\pi - \alpha_0)$ ont lieu pour :

$$x = \frac{2\,k\pi}{2\pi - \alpha_0} \pm \frac{\pi}{2\,(2\pi - \alpha_0)}$$

La différence entre deux valeurs consécutives de x : $\frac{\pi}{2\pi - \alpha_0}$ est plus petite que l'unité.

. . . . . .

$$M_{n-k} = \frac{m \sin \frac{k\alpha}{2}}{k \sin \frac{\alpha}{2}} \sin\left(a + \frac{2n-k-1}{2}\right) + \frac{e_{n-k} + e_{n-k+1} + \ldots + e_{n-1}}{k}$$

On voit que la suite des moyennes mobiles admet la même période, ou en général les mêmes périodes, que la série dont elle dérive, à moins que l'on n'ait :

$$k = k_1 \mathrm{T} \tag{70}$$

cas où la période α ne se retrouverait plus dans la série M_j.

Cette proposition nous permettra de faire — comme on le verra par la suite — une vérification des résultats obtenus par le traitement de la série A_i. Il faut toutefois remarquer que si l'on se sert de la suite (69) les composantes aléatoires ne sont plus indépendantes entre elles, lorsque l'on passe d'un terme au suivant. Mais ce fait ne modifie en rien les résultats précédents; il suffit pour qu'ils gardent toute leur valeur que les composantes fortuites :

$$\xi_i = \frac{e_i + e_{i+1} + \ldots + e_{i+k-1}}{k}$$

aient la même loi de probabilité; or, comme la loi de Laplace-Gauss est stable (1) cette condition est contenue implicitement par les hypothèses que nous avons faites sur e_i.

Pour la suite M_j il est préférable d'employer les différences successives d'ordre pair pour former le tableau (1). Dans ce cas on aura :

$$\eta_i = \frac{\Delta(e_{i+k} - e_{i-1})}{k} \qquad \zeta_i = \frac{\Delta^3(e_{i+k-1} - e_{i-2})}{k}$$

et en supposant la fluctuation de e_i égale à k^2.

$$\begin{array}{lll} \sigma_\xi^2 = k & \sigma_\eta^2 = 4 & \sigma_\zeta^2 = 40 \ldots\ldots \\ r_{\xi\eta}\,\sigma_\xi\,\sigma_\eta = -2 & r_{\xi\zeta}\,\sigma_\xi\,\sigma_\zeta = 4 & r_{\eta\zeta}\,\sigma_\eta\,\sigma_\zeta = -12 \ldots\ldots \end{array} \tag{71}$$

relations valables pour $k \geqslant 3$.

24. *Premier exemple. — Interpolation de l'équation du temps de Mayer.* — C'est à ce cas que Lagrange a appliqué son premier procédé (2). Il avait également annoncé une application de sa deuxième méthode, mais qui n'a pas paru.

Les données sont puisées dans *Mayer, Tabulae Solares...*, et sont également espacées dans le temps; elles sont au nombre de 20 :

$+ 7^m36^s$, $- 2^m48^s$, $+ 4^m34^s$, $- 15^m35^s$, $+ 3^m40^s$, $+ 10^m31^s$, $- 3^m52^s$, $+ 5^m49^s$, $- 13^m43^s$, $- 1^m12^s$, $+ 12^m52^s$, $- 3^m57^s$, $+ 5^m58^s$, $- 10^m57^s$, $- 6^m0^s$, $+ 14^m20^s$ $- 3^m1^s$, $+ 5^m5^s$, $- 7^m37^s$, $- 10^m16^s$

(1) Voir pour cette question de la stabilité d'une loi de probabilité, P. Lévy, *Calcul de probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, pp. 252 et suiv.
(2) Voir *Œuvres*, t. VI, p. 588.

En prenant les chiffres arrondis en minutes on aura (1) :

$$\Sigma A_i^2 = 1250 \qquad \Sigma B_i^2 = 1928 \qquad \Sigma C_i^2 = 4360$$
$$\Sigma A_i B_i = -923 \qquad \Sigma A_i C_i = 2074 \qquad \Sigma B_i C_i = -2572$$

Avec ces données nous aurons l'équation en r :

$$-4 r^3 + 10.984 r^2 - 6.937.506 r + 78.133.320 = 0$$

dont la plus petite racine est :

$$r_0 = 11,46$$

Le système (25) :

$$\frac{1250 p_2 - 923 p_1 + 2074}{2 p_2 + 2} = \frac{-923 p_2 + 1928 p_1 - 2575}{2 p_1} = 11,46$$

nous donne :

$$p_1 = 0,8572 \qquad p_2 = -1,01719746$$

et par conséquent l'équation en Z sera :

$$Z^2 + 0,8572 Z - 1,01719746 = 0$$

En résolvant cette équation nous aurons les cosinus de α et β

$$\cos \alpha = 0,3336 \qquad \cos \beta = -0,7622$$

d'où :

$$\alpha = 70^\circ 31 \qquad \beta = 139^\circ 40'$$

Les valeurs théoriques de α et β étant respectivement 70° et 140° on peut considérer que l'interpolation nous a suffisamment approchés de la vérité, surtout lorsqu'on tient compte que nous avons négligé, dans les données, les secondes.

Si l'on fait porter le calcul sur les chiffres exacts transformés en secondes, on obtient :

$$\Sigma A_i^2 = 4.453.216 \qquad \Sigma B_i^2 = 7.970.120 \qquad \Sigma C_i^2 = 16.751.073$$
$$\Sigma A_i B_i = -3.425.333 \qquad \Sigma A_i B_i = 7.598.751 \qquad \Sigma B_i C_i = -10.339.686$$

Comme par rapport à ces valeurs la racine r_0, de l'ordre d'une dizaine, peut être négligée nous la supposerons égale à zéro ; le système correspondant à (25) devient (2) :

$$4.453.216 p_2 - 3.425.333 p_1 + 7.598.751 = 0$$
$$-3.425.333 p_2 + 7.970.120 p_1 - 10.339.686 = 0$$

d'où :

$$p_2 = -1,05414345 \qquad p_1 = 0,8425$$

---

(1) Comme le phénomène en question a la normale nulle — indication fournie par la théorie — les A_i seront égaux aux données d'observation.

(2) Remarquons que dans ce cas-là, la question revient à calculer p_1, p_2, par la méthode des moindres carrés.

ce qui nous donne :

$$\alpha = 69^{\circ}52' \qquad \beta = 139^{\circ}58'$$

valeurs tout à fait satisfaisantes. Lagrange avait obtenu par son premier procédé, en se servant de la fonction génératrice :

$$\alpha = 69^{\circ}45' \qquad \beta = 140^{\circ}2'$$

(Voir *op. cit.*, p. 597).

Nous nous arrêtons ici pour le premier exemple, que nous avons traité en vue d'une comparaison avec les valeurs de α et β données par la théorie, afin de pouvoir nous faire une idée de l'ordre d'approximation que l'on peut obtenir par cette interpolation.

25. *Deuxième exemple. — Périodicité de la quantité de pluie tombée annuellement à Paris.* — On trouve dans l'*Annuaire statistique de la Statistique générale de France*, 42e volume, 1926, p. 9, les quantités de pluie tombée annuellement à Paris de 1851 jusqu'à 1926, les chiffres mesurant en millimètres le niveau de cette quantité.

Les données ont été recueillies à l'Observatoire de Paris jusqu'en 1890 et à l'Observatoire du Parc de Saint-Maur, à partir de 1891. Le fait que la suite entière d'observations n'a pas été effectuée dans le même endroit ne peut avoir qu'une influence imperceptible sur son allure et sa distribution car la pluie n'est pas un élément météorologique intimement lié à l'endroit d'observation, comme la température, par exemple (1).

D'ailleurs les deux observatoires se trouvent dans la même région pluviométrique.

Pour calculer la normale, nous avons tenu compte des considérations du paragraphe 14 et nous avons choisi comme intervalle de temps sur lequel porteront nos calculs, 1854-1915. Sur le graphique qui représente les quantités successives de pluie tombée annuellement, on peut se rendre compte que les années 1854 et 1916 sont des maxima. Nous avons donc cherché par ce choix à satisfaire approximativement la première des relations (44).

Nous aurons donc une série de 62 données qu'on trouvera dans la colonne (2) du tableau n° 1.

Le total de cette colonne nous donnera la valeur présumée de la normale :

$$y = \frac{34239}{62} = 552{,}2 \text{ mm.}$$

La colonne (3) du même tableau représentera les écarts des données par rapport à 552, arrondis en centimètres pour la simplicité des calculs qui vont suivre.

(1) Le mouvement de la température est, en effet, profondément influencé même par un changement de l'emplacement du thermomètre enregistreur. Les conditions qui déterminent la pluie, par contre, s'étendent sur une région entière et même si dans cette région tous les endroits ne reçoivent pas la même quantité de pluie, il est à prevoir que cette quantité se nivellera si la période d'observation est suffisamment grande — dans notre cas c'est l'année — et que cela aura lieu pour tous les points de la région.

Ce sont ces écarts qui constitueront pour nous la suite des A_i et qui ne renfermeront plus que les composantes cycliques et aléatoires. Les colonnes 4 et 5 sont dérivées de celle de A_i par les relations :

$$B_i = A_{i-1} + A_{i+1} \qquad C_i = B_{i-1} + B_{i+1}$$

Les autres représentent les carrés de A_i, B_i, C_i et leurs produits.
Nous avons :

$$\Sigma A_i^2 = 3591 \qquad \Sigma B_i^2 = 5235 \qquad \Sigma C_i^2 = 14.353$$
$$\Sigma A_i B_i = 1608 \qquad \Sigma A_i C_i = 5225 \qquad \Sigma B_i C_i = 3762$$

L'équation en r correspondant à une seule période sera

$$\begin{vmatrix} 3591 - r & 1608 \\ 1608 & 5235 - 2r \end{vmatrix} = 2r^2 - 12417\,r + 16.213.221 = 0$$

d'où :

$$r_0 = 1867{,}5$$

Pour le calcul de ρ nous nous servirons de la relation :

$$T = \frac{r^{(1)} + r^{(2)}}{2} = \frac{12417}{2}$$

donc :

$$\rho = \frac{r_0}{T} = 0{,}6016$$

et par conséquent :

(72) $$i = 0{,}63$$

Cette valeur n'est pas *assez forte*, mais elle peut être considérée comme suffisante.

En passant à l'hypothèse de deux périodes nous aurons :

$$F(r) = \begin{vmatrix} 3591 - r & 1608 & 5225 - 2r \\ 1608 & 5235 - 2r & 3762 \\ 5225 - 2r & 3762 & 14353 - 6r \end{vmatrix} =$$
$$= -4r^3 + 40.468\,r^2 - 121.532.317\,r + 102.182.587.734 = 0$$

Pour trouver la plus petite racine de cette équation nous tiendrons compte des inégalités (34). Et pour commencer nous allons essayer $r = 1.500 < 1867$:

$$F(1500) = -2.562.877.766$$

Donc cette valeur est trop grande; nous aurons ensuite :

$$F(1400) = 378.633.934$$

La méthode de Newton appliquée à l'intervalle (1.400, 1.500) nous donne :

$$r_0 = 1412{,}0$$
$$F(1412) = 1.122.210$$

Comme vérification nous ferons $r = 1.412$ dans l'expression de l'équation en r mise sous forme de déterminant et nous aurons en effet :

$$\begin{vmatrix} 2179 & 1608 & 2401 \\ 1608 & 2411 & 3762 \\ 2401 & 3762 & 5881 \end{vmatrix} = 1.122.210$$

Cette vérification est à recommander car elle peut nous révéler les erreurs que nous aurions pu faire dans les calculs, or comme les calculs sont assez longs, un contrôle direct serait plus difficile.

La valeur correspondante de ρ sera :

$$\rho = \frac{4 \times 3 \times 1412}{40.468} = 0{,}4187$$

d'où :

$$i = \sqrt{1 - \rho} = 0{,}75 \tag{73}$$

ce qui constitue un progrès appréciable par rapport à la valeur (72).

On pourrait continuer de la même façon en introduisant une nouvelle période et en calculant l'équation en r du quatrième degré; cependant, nous nous arrêterons là. D'abord parce que nous traitons ce sujet à titre d'exemple, ensuite parce que le graphique, lui, ne paraît nous indiquer qu'une seule période et que la valeur de i (73) est assez bonne. Toutefois nous reviendrons là-dessus (paragr. 27).

26. *Calcul des périodes.* — Une fois la racine r calculée, nous passerons au calcul de p_i à l'aide du système (25). Nous choisirons pour ce calcul les équations qui sont le moins influencées par le fait que l'on n'a qu'une valeur approchée de r. Nous tiendrons compte également que ces équations nous donnent p_1, p_2 sous forme de quotients de deux déterminants et qu'il faut le plus possible éviter une erreur trop grande aux dénominateurs, qui influe davantage sur le résultat qu'une erreur des numérateurs. Ainsi pour le calcul de α sous l'hypothèse d'une seule période, nous aurons :

$$p_1 = -\frac{\Sigma B_i^2 - 2 r_0}{\Sigma A_i B_i} = -\frac{1500}{1608} = -0{,}93284$$

d'où :

$$\cos \alpha = \frac{z}{2} = -\frac{p_1}{2} = 0{,}46642$$

donc :

$$\alpha = 62^\circ 12'$$

et :

$$T = \frac{360^\circ}{62^\circ 12'} = 5{,}79 \text{ ans} \tag{74}$$

On aura également pour le cas de deux périodes :

$$p_2 (\Sigma A_i^2 - r_0) + p_1 \Sigma A_i B_i + \Sigma A_i^2 B_i - 2 r_0 = 0$$
$$p_2 \Sigma A_i B_i + p_1 (\Sigma B_i^2 - 2 r_0) + \Sigma B_i C_i = 0$$

ou :

$$2179\, p_2 + 1608\, p_1 + 2401 = 0$$
$$1608\, p_2 + 2411\, p_1 + 3762 = 0$$

ce qui nous donne :

$$p_2 = -0{,}09763653 \qquad p_1 = -1{,}62546$$

l'équation en Z sera :

$$Z^2 - 1{,}62546\, Z + 0{,}09763653 = 0$$

et par conséquent :

$$\cos \alpha_1 = 0{,}78150 \qquad \cos \alpha_2 = 0{,}03124$$

On obtient :

$$\alpha_1 = 38^\circ 36' \qquad \alpha_2 = 88^\circ 10'$$

et :

$$(75) \qquad T_1 = \frac{360^\circ}{38^\circ\, 36'} = 9{,}33 \text{ ans} \quad T_2 = \frac{360^\circ}{88^\circ\, 10'} = 4{,}08 \text{ ans}$$

27. *Analyse des résultats précédents. Méthode des moyennes mobiles.* — En premier lieu, pour faire une discussion de ces résultats, il faut voir comment ils s'adaptent sur la suite des données.

Prenons les années de maxima et de minima qu'accuse le graphique, nous aurons :

Années de maxima	Intervalle	Annees de minima	Intervalle
1854	6	1855	9
1860	6	1864	6
1866	6	1870	4
1872	5	1874	5
1877	5	1879	5
1882	4	1884	6
1886	6	1890	4
1892	4	1894	5
1896	9	1899	8
1905	5	1907	4
1910	5	1911	
1915			

Les moyennes des intervalles qui séparent deux maxima et deux minima sont respectivement égales à 5,5 ans et 5,6 ans, valeurs qui s'approchent de la valeur de T (74). Et si la régularité surtout des premiers maxima espacés de 6 et 5 années pourrait nous faire adopter une seule période, la période des intervalles égaux à 9 et 4 ans, dans les deux séries, nous forcent à pousser plus loin notre analyse.

Pour cela nous emploierons la méthode des moyennes mobiles dont nous nous sommes occupés plus haut.

En effet, la methode que nous avons employée pour le calcul des périodes,

comme toute autre méthode d'interpolation, suit par l'introduction de chaque nouveau paramètre une adaption croissante aux données d'observation, qui ne cesse que lorsque le nombre des conditions devient égal au nombre de ces dernières. Or, même si l'existence d'une période de 5,79 ans avait une réalité, le calcul pour permettre un plus grand approchement de la réalité aurait scindé cette période en deux par l'équation en r du deuxième degré, en trois, par l'équation du troisième degré, etc...

Il faut donc essayer d'avoir sur les résultats de ces méthodes des renseignements d'un ordre différent de la simple valeur de l'indice i. Cet indice est une mesure de l'approximation obtenue par interpolation mais ce qu'il nous faut surtout, c'est de savoir si nous nous approchons ou nous nous éloignons de la vérité, l'approximation étant dans cette direction un facteur important sans en être l'unique critérium.

Nous prendrons les moyennes des groupes successifs de quatre années. Ce choix est motivé par la remarque faite à la fin du paragraphe 23. Car si le phénomène étudié présente en effet deux périodes T = 9,33 et T = 4,08, sur la série des moyennes mobiles il n'apparaîtra plus qu'une période égale à 9 ans environ. Si par contre il apparaît une période égale à 5,8 ans environ, nous aurons un motif de plus pour incliner à admettre que le phénomène n'a qu'un seul cycle. On trouvera dans le tableau n° 2, colonne (2) les moyennes sur quatre années. Dans ce cas, la normale étant la même que pour la série initiale, on calculera les écarts des chiffres de cette colonne par rapport à 552. On prendra ces derniers pour A_i (1). La colonne (4) contiendra les $B_i = \Delta^2 \Delta_{i-1}$ Cela étant, on obtient :

$$\Sigma A_i^2 = 92.620 \quad \Sigma B_i^2 = 75.183 \quad \Sigma A_i B_i = -43.185$$

L'équation en r sera, en tenant compte des relations (71) :

$$\begin{vmatrix} 92.620 - 4r & -43.185 + 2r \\ -43.185 + 2r & 75.183 - 4r \end{vmatrix} =$$

$$= 12r^2 - 498.472\,r + 5.098.505.235 = 0$$

La plus petite racine est :

$$r_0 = 18219,45$$

ce qui nous donne :

$$p = -\frac{\Sigma B_i^2 - 4r_0}{\Sigma A_i B_i + 2r_0} = 0,34170$$

d'où :

$$z = -0,34170$$

Donc :

$$\cos\alpha = 1 + \frac{z}{2} = 0,82915$$

(1) Pour ce cas, afin de suivre de plus près les données d'observations, nous avons fait porter le calcul sur la hauteur de la quantité de pluie tombée exprimée en millimètres.

cette équation nous donne :

$$\alpha = 33^\circ\ 59'$$

et par conséquent :

$$T = 10{,}6 \text{ ans}$$

Le résultat que nous venons de trouver, d'après les considérations exposées plus haut, nous autorise à attribuer à l'existence de deux périodes de la quantité de pluie tombée annuellement à Paris, plus de vraisemblance qu'à l'hythèse d'un seul cycle.

28. *Détermination des paramètres.* — Cela étant, le mouvement cyclique du phénomène sera exprimé par la formule :

$$\begin{aligned} A_i &= m_1 \sin (a_1 + i \times 38^\circ 36') + m_2 \sin (a_2 + i \times 88^\circ 10') \\ &= \omega_1 \sin i\alpha_1 + \rho_1 \cos i\alpha_1 + \omega \sin i\alpha_2 + \rho_2 \cos i\alpha_2 \end{aligned}$$

dont les constantes ω_1, ρ_1, ω_2, ρ_2 seront déterminées par la méthode des moindres carrés (paragr. 20). Prenons l'année 1854 comme origine du temps; on trouvera dans le tableau n° 3 les valeurs successives de $i \times 38^\circ 36'$ et $i \times 88^\circ 10'$ réduites d'abord à la première circonférence colonnes (2) et (6), ensuite au premier quadrant. Les autres colonnes contiennent les valeurs naturelles des sinus et cosinus correspondants qui nous permettront d'avoir immédiatement les seconds membres des équations normales du problème (64) :

$$\sum_0^{61} A_i \sin i\alpha_1 = +17{,}99 \qquad \sum_0^{61} A_i \cos i\alpha_1 = -66{,}66$$

$$\sum_0^{61} A_i \sin i\alpha_2 = -15{,}55 \qquad \sum_0^{61} A_i \cos i\alpha_2 = -54{,}90.$$

Pour calculer les coefficients des inconnues du système (64) nous ferons usage des relations (65). D'abord pour réduire les arcs qui y entrent à leurs correspondants de la première circonférence, nous aurons :

$$61 \times 38^\circ 36' \equiv 194^\circ 36' \qquad 62 \times 38^\circ 36' \equiv 223^\circ 12'$$

$$61 \times 88^\circ 10' \equiv 66^\circ 10' \qquad 62 \times 88^\circ 10' \equiv 154^\circ 20'$$

$$\frac{61\,(88^\circ 10' - 38^\circ 36')}{2} \equiv 71^\circ 47' \qquad \frac{62\,(88^\circ 10' - 38^\circ 36')}{2} \equiv 96^\circ 34'$$

$$\frac{61\,(88^\circ 10' + 38^\circ 36')}{2} \equiv 266^\circ 23' \qquad \frac{62\,(88^\circ 10' + 38^\circ 36')}{2} \equiv 329^\circ 46'$$

et par conséquent :

$$\sum_0^{61} \sin^2 i\alpha_1 = \qquad 31 - \frac{\sin 233^\circ 12' \cos 194^\circ 36'}{2 \sin 38^\circ 36'} = 30{,}38$$

$$\sum_0^{61} \sin i\alpha_1 \cos i\alpha_1 = \qquad \frac{\sin 233^\circ 12' \sin 194^\circ 36'}{2 \sin 38^\circ 36'} = 0{,}16$$

$$\sum_{0}^{61} \sin i\alpha_1 \sin i\alpha_2 = \frac{\sin 96^\circ 34' \cos 71^\circ 47'}{2 \sin 24^\circ 47'} - \frac{\sin 329^\circ 46' \cos 266^\circ 23'}{2 \sin 63^\circ 23'} = 0{,}35$$

$$\sum_{0}^{61} \sin i\alpha_1 \cos i\alpha_2 = -\frac{\sin. 96^\circ 34' \sin 71^\circ 47'}{2 \sin 24^\circ 47'} + \frac{\sin 329^\circ 46' \sin 266^\circ 23'}{2 \sin 63^\circ 23'} = -0{,}83$$

$$\sum_{0}^{61} \cos^2 i\alpha_1 = 31 + \frac{\sin 233^\circ 12' \cos 194^\circ 23'}{2 \sin 38^\circ 36'} = 31{,}62$$

$$\sum_{0}^{61} \cos i\alpha_1 \sin i\alpha_2 = \frac{\sin 96^\circ 34' \sin 71^\circ 47'}{2 \sin 24^\circ 37'} + \frac{\sin 329^\circ 46' \sin 266^\circ 23'}{2 \sin 63^\circ 23'} = 1{,}42$$

$$\sum_{0}^{61} \cos i\alpha_1 \cos i\alpha_2 = \frac{\sin 96^\circ 34' \cos 71^\circ 47'}{2 \sin 24^\circ 47'} + \frac{\sin 329^\circ 46' \cos 266^\circ 23'}{2 \sin 63^\circ 23'} = 0{,}39$$

$$\sum_{0}^{61} \sin^2 i\alpha_2 = 31 - \frac{\sin 154^\circ 20' \cos 66^\circ 10'}{2 \sin 88^\circ 10'} = 30{,}91$$

$$\sum^{61} \sin i\alpha_2 \cos i\alpha_2 = \frac{\sin 154^\circ 20' \sin 66^\circ 10'}{2 \sin 88^\circ 10'} = 0{,}20$$

$$\sum_{0}^{61} \cos^2 i\alpha_2 = 31 + \frac{\sin 154^\circ 20' \cos 66^\circ 10'}{2 \sin 88^\circ 10'} = 31{,}09$$

Les équations normales seront :

$$\begin{aligned}
30{,}38\,\omega_1 + 0{,}16\,\rho_1 + 0{,}35\,\omega_2 - 0{,}83\,\rho_2 &= 17{,}99 \\
0{,}16\,\omega_1 + 31{,}62\,\rho_1 + 1{,}42\,\omega_2 + 0{,}39\,\rho_2 &= -66{,}66 \\
0{,}35\,\omega_1 + 1{,}42\,\rho_1 + 30{,}91\,\omega_2 + 0{,}20\,\rho_2 &= -51{,}95 \\
-0{,}83\,\omega_1 + 0{,}39\,\rho_1 + 0{,}20\,\omega_2 + 30{,}91\,\rho_2 &= -54{,}90
\end{aligned}$$

d'où :

$$\omega_1 = 0{,}5762 \quad \rho_1 = -2{,}0113 \quad \omega_2 = -1{,}7517 \quad \rho_2 = -1{,}7138$$

avec ces valeurs on obtient en se servant des valeurs des colonnes (4), (5), (8), (9) du tableau n° 3, les valeurs successives de A_i. On trouvera à la fin un diagramme qui permettra de se faire une idée de l'accord entre la marche réelle du mouvement et celle de sa marche cyclique obtenue par les calculs précédents :

$$(a) \qquad A_i = 2{,}0922 \sin (271^\circ 18' + i \times 38^\circ 36') + \\ + 2{,}4506 \sin (224^\circ 22' + i \times 88^\circ 10').$$

On trouvera en trait pointillé, à titre d'exemple, la représentation graphique de la sinusoïde obtenue sous l'hypothèse d'une seule période :

$$(a') \qquad A_i = 2{,}06 \sin (7^\circ 13' + i \times 62^\circ 12').$$

29. Les ajustements exprimés par les relations (a) et (a') sont les résultats de deux interpolations; l'une faite pour trouver la valeur des périodes, l'autre, pour déterminer l'amplitude et les valeurs à l'origine.

L'indice de satisfaction, introduit dans la deuxième partie, nous permettra de mesurer en quelque sorte la différence qu'il y a entre nos hypothèses sur la marche cyclique du phénomène et la réalité. Il ne faut pas perdre de vue que dans nos calculs, les composantes cycliques ont été supposées telles qu'elles puissent être représentées par la variation du sinus, ce qui n'arrivera pas toujours.

Pour mesurer maintenant la concordance entre la marche représentée par l'une des expressions (a) et (a') et le mouvement réel, nous ferons usage *des coefficients de covariation.*

Il est tout naturel de mesurer l'écart de deux courbes dans leur ensemble par la somme des écarts de leurs ordonnées respectives.

Ainsi si u_i, v_i sont les valeurs successives des ordonnées correspondantes de deux courbes et si l'on prend l'écart en valeur absolue, on obtient comme indice de satisfaction :

$$e = \Sigma \mid u_i - v_i \mid.$$

Si l'on prend les carrés des écarts on aura :

$$\Sigma (u_i - v_i)^2 = (\Sigma u_i^2 + v_i^2) \left(1 - \frac{2 \Sigma u_i v_i}{\Sigma u_i^2 + \Sigma v_i^2}\right).$$

Des considérations analogues à celles exposées plus haut (paragr. 7) nous conduisent à prendre comme *indice de covariation :*

$$k = \frac{\Sigma u_i v_i}{\frac{\Sigma u_i^2 + \Sigma v_i^2}{2}}.$$

On voit que si les ordonnées de deux courbes sont proportionnelles $v_i = \pm \alpha u_i$

$$k = \pm \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2},$$

valeurs qui constituent les extrémités de k. Ces valeurs dépendent de α, donc k n'a pas une échelle de variation fixe.

Pour éviter cela on remplace dans l'expression de k la moyenne arithmétique de Σu_i^2 et Σv_i^2 par leur moyenne géométrique et on obtient ce que M. L. March appelle *coefficient de covariation tendancielle* (1) :

$$i = \frac{\Sigma u_i v_i}{\sqrt{\Sigma u_i^2 . \Sigma v_i^2}} \tag{76}$$

qui varie entre — 1 et + 1. Bien entendu pour les mêmes valeurs de u et v, $k \leqslant i$.

Si l'on veut obtenir un *coefficient de covariation différentielle*, c'est-à-dire

(1) Voir L. March, *Principes de Statistique*, ch. XXII. Félix Alcan, Paris. 1930.

un indice qui mesure la concordance entre les directions de deux courbes on appliquera la formule précédente aux différences premières de u_i et v_i :

$$(77) \qquad j = \frac{\Sigma\, \Delta u_i .\, \Delta\, v_i}{\sqrt{\Sigma\, (\Delta\, u_i)^2 .\, \Sigma\, (\Delta\, v_i)^2}}.$$

Les valeurs des indices considérés seront :

$$e'' = 408{,}96 \qquad i'' = 0{,}28 \qquad j'' = 0{,}28$$

pour l'ajustement à deux périodes, et :

$$e' = 407{,}97 \qquad i' = 0{,}21 \qquad j' = 0{,}12$$

pour l'ajustement à une seule période.

Les valeurs nous montrent qu'entre les deux ajustements il n'y a pas une très grande différence, sauf en ce qui concerne la covariation différentielle, quant *à l'écart des deux courbes* mesuré par la valeur de e, il n'y a pas de différence. D'ailleurs les valeurs de i et j, même pour l'ajustement à deux périodes, ne sont pas significatives.

La faible valeur de ces indices peut être interprétée de plusieurs façons :

1° La méthode employée plus haut pour déterminer l'amplitude et les valeurs à l'origine n'est pas celle indiquée pour ce cas;

2° Ou les hypothèses que nous avons faites sur la périodicité du phénomène ne sont pas satisfaisantes;

3° Ou bien la dispersion de la composante fortuite est trop grande par rapport à l'amplitude du mouvement cyclique.

Il nous semble que le calcul seul ne pourrait jeter une lumière complète sur cette question.

30. Nous tâcherons cependant d'améliorer les ajustements (a) et (a') en partant du fait que si l'on multiplie les ordonnées de l'une de deux courbes par un facteur λ les valeurs de i et j restent les mêmes.

On cherchera alors la valeur de λ pour laquelle :

$$F(\lambda) = \Sigma \mid u_i - \lambda v_i \mid$$

soit minima.

Adoptons les notations $\frac{u_i}{v_i} = U_i$; $\mid v_i' \mid = V_i$ et supposons que l'on ait :

$$U_1 < U_2 < U_3 < \ . \ . \ . < U_n$$

La fonction F (λ) sera représentée graphiquement par une ligne polygonale. Elle ne pourra atteindre sa plus petite valeur que dans un point de discontinuité de sa dérivée, laquelle ne s'annule qu'exceptionnellement.

D'ailleurs la ligne polygonale qui représentera la variation de F (λ) sera une ligne convexe dont la concavité tournera vers les grandes valeurs de λ.

En effet, on aura pour :

$$\lambda < U_1 \qquad F'(\lambda) = -\sum_1^n V_i$$

$$U_1 < \lambda < U_2 \qquad F'(\lambda) = -\sum_1^n V_i + 2\,V_1$$

$$U_2 < \lambda < U_3 \qquad F'(\lambda) = -\sum_1^n V_i + 2\,(V_1 + V_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_n < \lambda \qquad F'(\lambda) = \sum_1^n V_i$$

Les valeurs successives de $F'(\lambda)$ forment une suite non décroissante. Le minimum de F aura lieu pour :

$$\lambda = \frac{u_j}{v_j}$$

si :

$$(78) \qquad \sum_1^{j-1} V_i < \frac{1}{2}\sum_1^n V_i \qquad \sum_1^{j} V_i > \frac{1}{2}\sum_1^n V_i.$$

Ces inégalités nous montrent que V_j est la valeur *médiante* de la suite discontinue et ordonnée :

$$V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots\ V_n.$$

On la trouve à l'aide d'un tableau de valeurs cumulées.

Le minimum sera donné par :

$$\min F(\lambda) = \frac{u_j}{v_j}\left(2\sum_1^j V_i - \sum_1^n V_i\right) - \sum_1^j V_i\frac{u_i}{v_i} + \sum_{1+j}^n V_i\frac{u_i}{v_i}$$

Un cas intéressant est celui où chaque écart $|\,u_i - \lambda\, v_i\,|$ est rapporté à la valeur absolue de l'ordonnée v_i.

On aura $V_i = 1$; la valeur de λ qui rendra minima la fonction $\Phi(\lambda) = \Sigma\left|\frac{u_i - \lambda u_i}{v_i}\right|$ sera, d'après les relations (78) la *médiane* de la suite $U_1, U_2, \ldots U_n$.

Remarquons que s'il y a plusieurs valeurs égales

$$U_k = U_{k+1} = U_{k+2} = \ldots$$

elles ne seront considérées qu'une seule fois, la valeur correspondante de V étant $V_k + V_{k+1} + V_{k+2} + \ldots$

A l'aide du tableau IV, on obtient, en tenant compte des considérations précédentes :

$$\frac{1}{2}\,\Sigma\, V_i = 59{,}24$$

pour le cas de l'interpolation à deux périodes.

Or :

$$56{,}22 < 59{,}24 < 59{,}83.$$

A ces valeurs de V_i correspondent les valeurs de U_i : 0,91 et 1,11. Donc $\lambda = 1,11$.

De même pour l'interpolation à une seule période $\lambda = 1,46$.

En introduisant ces facteurs de proportionnalité dans les expressions (a) et (a'), on aura :

$$e' = 398,90 \qquad\qquad e'' = 408,32$$

ce qui nous montre que l'ajustement à une seule période s'adapte mieux à la réalité que celui à deux cycles si l'adaptation est mesurée par la somme des écarts absolus des ordonnés des deux mouvements.

La différence entre e' et e'' n'est pas très sensible, même après l'introduction du facteur λ.

Si, toutefois, on considère les données comme un échantillon d'une distribution continue, il sera préférable, même avec le sacrifice de voir augmenter l'indice e, de prendre pour λ une valeur interpolée. Ainsi pour les deux cas que nous avons traités, on pourrait prendre :

$$\lambda = 1,08 \qquad\qquad \lambda = 1,44$$

Enfin, nous signalons également comme moyen de comparaison entre les deux ajustements l'analyse de la distribution des écarts par rapport à leur écart type.

31. *Conclusions.* — Dans le présent travail, nous avons essayé de construire, partant de principes assez simples, un procédé de recherches des valeurs des périodes d'un phénomène cyclique et dans cette voie nous avons été conduits par trois desiderata :

1° De permettre par un calcul bien déterminé d'arriver au résultat;

2° De faire dépendre ce calcul de l'ensemble de la suite des données auxquelles on l'applique;

3° De lui donner une base positive en envisageant la question du point de vue du calcul des probabilités.

Nous espérons que, par les résultats obtenus, nous ne nous sommes pas trop écartés de notre but. Mais, avant de terminer, c'est sur ces résultats que nous voulons insister et montrer quelle est l'importance que nous, tout d'abord, leur accordons, cela afin de ne pas faire preuve d'un manque complet d'esprit critique.

Nous devons commencer par insister sur le fait que le procédé auquel aboutit notre travail est en premier lieu un procédé d'investigation et de contrôle. Les résultats auxquels il nous conduit ne sauraient être pris que pour des conclusions très probables; ils ne pourront jamais passer pour des lois établies d'une manière absolue. Car il ne faut jamais oublier que ces résultats sont la solution d'un problème de probabilité des causes : l'épreuve est déjà faite et les conditions qui l'ont déterminée ne sauront se ressentir des conclusions de notre calcul.

Dans cette dernière partie, nous avons traité un cas à titre d'exemple d'appli-

cation de cette méthode. Nous nous sommes efforcés d'apporter dans les analyses des résultats obtenus le maximum de rendement du procédé de recherches. Mais nous ne pouvons avoir qu'une tendance, une simple tendance, d'admettre que le mouvement de la quantité de pluie tombée à Paris présente les deux périodes trouvées par le calcul. Il faut pour que cette tendance se transforme en certitude que d'autres considérations d'un ordre plus lié au phénomène viennent l'appuyer. Nous ne l'avons pas fait parce que cette recherche constitue une question toute différente de celle que nous avons traitée.

Les résultats précédents sont loin d'épuiser même les premiers points du problème. Le calcul de la *position probable* de l'espace linéaire (3) et celui des erreurs à craindre sur les valeurs introduites en sont les plus importants. Nous espérons que les recherches que nous poursuivons actuellement dans cette direction nous permettront de revenir plus tard sur ce point.

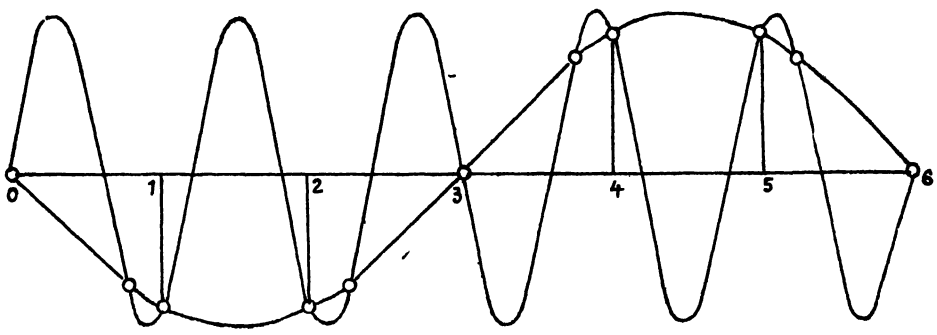
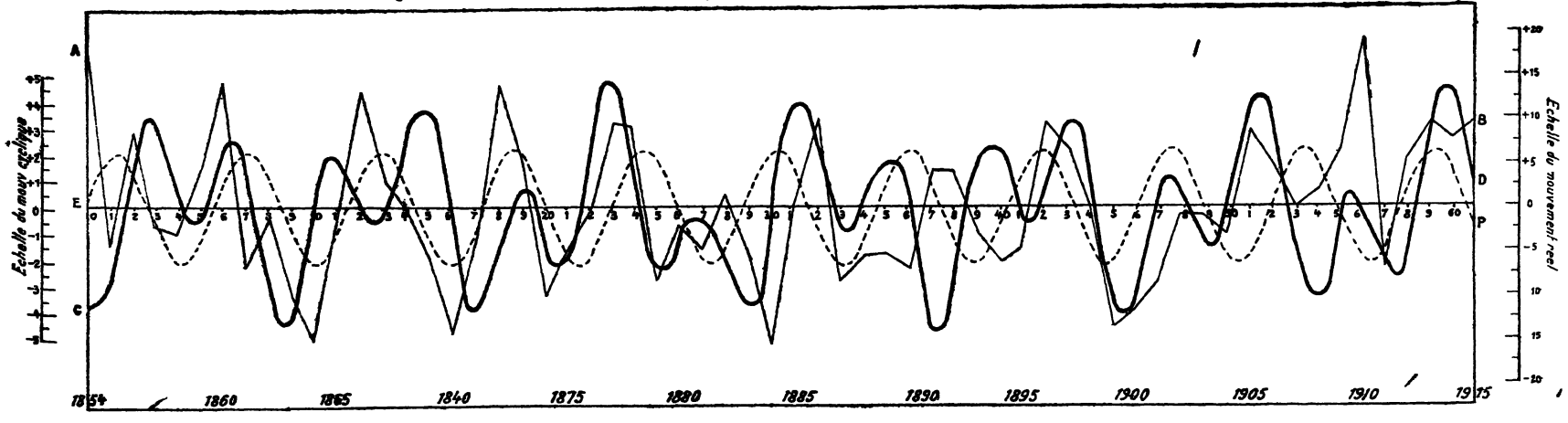


Fig. 1

Représentation graphique de $\sin\left(\pi + \frac{\pi x}{3}\right)$ *et de* $\sin \frac{5\pi x}{3}$

Diagramme des mouvements de la quantité de pluie tombée annuellement à Paris



AB = mouv. réel, CD = mouv. cyclique à deux périodes, EP mouv cyclique simple

L'axe du temps représente le niveau moyen 55 cm

Tableau I.

Calculs pour l'interpolation trigonométrique de la quantité de pluie tombée annuellement à Paris.

(1)	(2)	(3)		(4)		(5)		(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Années	Hauteurs en mm.	A_i		B_i		C_i		A_i^2	B_i^2	C_i^2	$A_i B_i$	$A_i C_i$	$B_i C_i$
1854	736	19											
1855	465		— 8	28									
1856	637	9			—10	34							
1857	533		— 2	6			— 8	4	36	64	— 12	+ 16	— 48
1858	519		— 3	2		18		9	4	324	— 6	— 54	+ 36
1859	591	4		12			— 1	16	144	1	+ 48	— 4	— 12
1860	699	15			— 3	26		225	9	676	— 45	+ 390	— 78
1861	479		— 7	14			—19	49	196	361	— 98	+ 133	— 266
1862	539		— 1		—16		— 2	1	256	4	+ 16	+ 2	+ 32
1863	456		— 9		—16		—27	81	256	729	+ 144	+ 243	+ 432
1864	398		—15		—11		—17	225	121	289	+ 165	+ 255	+ 187
1865	533		— 2		— 1		—10	4	1	100	+ 2	+ 20	+ 10
1866	685	14		1		12		196	1	144	+ 14	+ 168	+ 12
1867	583	3		13			— 2	9	169	4	+ 39	— 6	— 26
1868	540		— 1		— 3		— 2	1	9	4	+ 3	+ 2	+ 6
1869	493		— 6		—15		—12	36	225	144	+ 90	+ 72	+ 180
1870	413		—14		— 9		—15	196	81	225	+ 126	+ 210	+ 135
1871	521		— 3	0			— 7	9	0	49	0	+ 21	0
1872	686	14		2		4		196	4	16	+ 28	+ 56	+ 8
1873	598	5		4		2		25	16	4	+ 20	+ 10	+ 8
1874	447		—10	0			— 7	100	0	49	0	+ 70	0
1875	497		— 5		—11	5		25	121	25	+ 55	— 25	— 55
1876	542		— 1	5			— 3	1	25	9	— 5	+ 3	— 15
1877	654	10		8		7		100	64	49	+ 80	+ 70	+ 56
1878	638	9		2		15		81	4	225	+ 18	+ 135	+ 30
1879	473		— 8	7			—10	64	49	100	— 56	+ 80	— 70
1880	529		— 2		—12	7		4	144	49	+ 24	— 14	— 84
1881	511		— 4	0			—20	16	0	400	0	+ 80	0
1882	572	2			— 8		—14	4	64	196	— 16	— 28	+ 112
1883	514		— 4		—14		—11	16	196	191	+ 28	+ 44	+ 154
1884	388		—16		— 3		—19	256	9	361	+ 48	+ 304	+ 57
1885	558	1			— 5		—10	1	25	100	— 5	— 10	+ 50
1886	656	11			— 7	0		121	49	0	— 77	0	0
1887	469		— 8	5			—20	64	25	400	— 40	+ 160	— 100
1888	485		— 6		—13		— 8	36	169	64	+ 78	+ 48	+ 104
1889	496		— 5		—13		—14	25	169	196	+ 65	+ 70	+ 182
1890	482		— 7		— 1		—16	49	1	256	+ 7	+ 112	+ 16
1891	588	4			— 3	0		16	9	0	— 12	0	0
1892	587	4		1			— 5	16	1	25	+ 4	— 20	— 5
1893	524		— 3		— 2		— 6	9	4	36	+ 6	+ 18	+ 12
1894	493		— 6		— 7	2		36	49	4	+ 42	— 12	— 14
1895	508		— 4	4			— 4	16	16	16	— 16	+ 16	— 16
1896	654	10		3		14		100	9	196	+ 30	+ 140	+ 42
1897	620	7		10			— 3	49	100	9	+ 70	— 21	— 30
1898	553	0			— 6		— 1	0	36	1	0	0	+ 6
1899	418		—13		—11		—27	169	121	729	+ 143	+ 351	+ 297
1900	444		—11		—21		—23	121	441	529	+ 231	+ 253	+ 483
1901	465		— 8		—12		—30	64	144	900	+ 96	+ 240	+ 360
1902	540		— 1		— 9		—16	1	81	256	+ 9	+ 16	+ 144
1903	536		— 1		— 4		— 1	1	16	1	+ 4	+ 1	+ 4
1904	518		— 3	8			— 2	9	64	4	— 24	+ 6	— 16
1905	638	9		2		17		81	4	289	+ 18	+ 153	+ 34
1906	595	5		9		9		25	81	81	+ 45	+ 45	+ 81
1907	546	0		7		21		0	49	441	0	0	+ 147
1908	567	2		12		29		4	144	841	+ 24	+ 58	+ 348
1909	666	12		22		17		144	484	289	+ 264	+ 204	+ 374
1910	750	20		5		48		400	25	2.304	+ 100	+ 960	+ 240
1911	480		— 7	26		8		49	676	64	— 182	— 56	+ 208
1912	609	6		3		40		36	9	1.600	+ 18	+ 240	+ 120
1913	645	10		14		23							
1914	626	8		20									
1915	654	10											
	34.239	223	204					3.591	5.235	14.353	+2.202	+5.475	+ 4597
											— 594	— 250	— 835

Tableau II.

Calculs pour la recherche de la période de la série des moyennes mobiles.

(1)	(2)	(3)		(4)		(5)	(6)	(7)	
N° d'ordre	Moyennes sur 4 années	Écarts M_i		$\Delta^2 M_{j-1}$		M^2_i	$(\Delta^2 M_{j-1})^2$	$M_i \times \Delta^2 M_{j-1}$	
1	593	41							
2	539		—13	85		169	7.225		— 1.105
3	570	18			—16	324	256		— 288
4	585	33			—28	1.089	784		— 924
5	572	20		3		400	9	60	
6	562	10			— 9	100	81		— 90
7	543		— 9		—54	81	2.916	486	
8	468		—84	88		7.056	7.744		— 7.392
9	481		—71	50		5.041	2.500		— 3.350
10	518		—34		— 5	1.156	25	170	
11	550		— 2	3		4	9		— 6
12	585	33			—45	1.089	2.025		— 1.485
13	575	23			—58	529	3.364		— 1.334
14	507		—45	53		2.025	2.809		— 2.382
15	492		—60	51		3.600	2.601		— 3.060
16	528		—24		— 8	576	64	192	
17	556	4			—21	16	441		— 84
18	563	11			—13	121	169		— 143
19	557	5			—30	25	900		— 150
20	521		—31	50		961	2.500		— 1.550
21	535		—17	34		289	1.156		— 578
22	583	31			—54	961	2.916		— 1.674
23	577	25		2		625	4	50	
24	573	21			—32	441	1.024		— 672
25	538		—14	19		196	361		— 266
26	521		—31	27		961	729		— 837
27	531		—21		—41	441	1.681	861	
28	496		—52	39		2.704	1.521		— 228
29	508		—44	13		1.936	169		— 572
30	529		—23		—32	529	1.024	736	
31	518		—34	35		1.156	1.225		— 1.190
32	542		—10		—65	100	4.225	560	
33	501		—51	23		2.601	529		— 1.173
34	483		—69	48		4.761	2.304		— 3.312
35	513		—39		— 5	1.521	25	195	
36	538		—14		—18	196	324	252	
37	545		— 7		— 4	49	16	28	
38	548		— 4		—23	16	529	92	
39	528		—24	37		576	1.369		— 888
40	545		— 7	7		49	49		— 49
41	569	17			— 9	289	81		— 153
42	584	32			—38	1.024	1.444		— 1.216
43	561	9			—19	81	361		— 171
44	509		—43	13		1.849	169		— 559
45	470		—82	33		6.724	1.089		— 2.706
46	461		—88	38		7.744	1.444		— 3.344
47	496		—56		—13	3.136	169	728	
48	515		—37	24		1.369	576		— 888
49	558	6			—30	36	900		— 180
50	572	20			—11	400	121		— 220
51	574	22		10		484	100	220	
52	586	34			— 5	1.156	25		— 170
53	593	41		32		1.681	1.024	1.312	
54	631	80			—55	6.400	3.025		— 4.400
55	616	64		26		4.096	676	1.664	
56	626	74			—15	5.446	225		— 1.010
57	621	69			—26	4.761	676		— 1.794
58	590	38		74		1.444	5.476	2.812	
59	633	81							
						92.620	75.183	10.508	—53.693

Tableau III

Calculs relatifs aux équations normales.

(1)	(2)	(3)	(4)	5)	(6)	(6)	(8)	(9)	(10)
	Première période $\alpha_1 = 38°36'$				Deuxième période $\alpha_2 = 88°10'$				
Valeurs de t	$t\ \alpha_1$ réduit à la 1re circ.	$t\alpha_2$ réduit au 1er quadr.	Sin $t\alpha_1$	cos $t\alpha_2$	$t\alpha_2$ réduit à la 1re circ.	$t\alpha_2$ réduit au 1er quadr.	sin $t\alpha_2$	cos $t\alpha_2$	Valeurs interpolées
0	0°	0°	0,000	1,000	0° 00′	0°	0,000	1,000	—3,725
1	38° 36′	38° 36′	0,624	782	88° 10′	88° 10′	1,000	0,032	—3,020
2	77° 12′	77° 12′	975	222	176° 20′	86° 20′	0,064	—1,000	1,717
3	115° 48′	25° 48′	900	— 435	264° 30′	84° 30′	— 995	—0,095	3,292
4	154° 24′	64° 24′	432	— 902	352° 40′	82° 40′	— 127	992	0,518
5	193° 00′	13° 00′	— 225	— 974	80° 50′	80° 50′	987	160	—0,174
6	231° 36′	51° 36′	— 748	— 621	169° 00′	79° 00′	191	— 982	2,145
7	270° 12′	0° 12′	—1,000	004	257° 10′	77° 10′	— 975	— 222	1,504
8	308° 40′	38° 48′	—0,779	627	345° 20′	75° 20′	— 254	967	—2,920
9	347° 24′	77° 24′	— 218	976	73° 30′	73° 30′	959	284	—4,256
10	26° 00′	26° 00′	438	899	161° 40′	71° 40′	314	— 949	—0,480
11	64° 36′	64° 36′	903	429	249° 50′	69° 50′	— 938	345	1,891
12	103° 12′	13° 12′	974	— 228	338° 00′	68° 00′	— 375	927	0,089
13	141° 48′	51° 48′	618	— 786	66° 10′	66° 10′	915	404	—0,358
14	180° 24′	0° 24′	— 007	—1,000	154° 20′	64° 20′	433	— 901	2,792
15	219° 00′	39° 00′	— 629	—0,777	242° 30′	62° 30′	— 887	— 462	3,547
16	257° 36′	77° 36′	— 977	— 215	330° 40′	60° 40′	— 490	872	—0,767
17	296° 12′	26° 12′	— 897	442	58° 50′	58° 50′	856	518	—3,547
18	334° 48′	64° 48′	— 426	905	147° 00′	57° 00′	545	— 839	—1,582
19	13° 24′	13° 24′	232	973	235° 10′	55° 10′	— 821	— 571	0,594
20	52° 00′	52° 00′	788	616	323° 20′	53° 20′	— 597	802	—1,113
21	90° 36′	0° 36′	1,000	— 011	51° 30′	51° 30′	783	633	—1,842
22	129° 12′	39° 12′	0,775	— 632	139° 40′	49° 40′	647	— 762	1,891
23	167° 48′	77° 48′	211	— 977	227° 50′	47° 50′	— 740	— 671	4,533
24	206° 24′	26° 24′	— 445	— 896	316° 00′	46° 00′	— 695	719	1,532
25	245° 00′	65° 00′	— 906	— 423	44° 10′	44° 10′	697	717	—2,121
26	283° 36′	13° 36′	— 972	235	132° 20′	42° 20′	740	— 673	—1,176
27	322° 12′	52° 12′	— 613	790	220° 30′	40° 30′	— 649	— 760	—0,503
28	0° 48′	0° 48′	014	1,000	308° 40′	38° 40′	— 780	625	—1,708
29	39° 24′	39° 24′	635	0,773	36° 50′	36° 50′	599	801	—3,610
30	78° 00′	78° 00′	978	208	125° 00′	35° 00′	819	— 574	—0,305
31	116° 36′	26° 36′	894	— 448	213° 10′	33° 10′	— 548	— 837	3,810
32	155° 12′	65° 12′	420	— 908	301° 20′	31° 20′	— 855	519	2,677
33	193° 48′	13° 48′	— 239	— 971	29° 30′	29° 30′	492	870	—0,537
34	232° 24′	52° 24′	— 792	— 610	117° 40′	27° 40′	885	— 465	0,018
35	271° 00′	1° 00′	—1,000	018	205° 50′	25° 50′	— 435	— 900	1,692
36	309° 36′	39° 36′	—0,771	637	294° 00′	24° 00′	— 914	407	—0,822
37	348° 12′	78° 12′	— 205	979	22° 10′	22° 10′	378	926	—4,336
38	26° 48′	26° 48′	451	893	110° 20′	20° 20′	937	— 347	—2,582
39	65° 24′	65° 24′	909	416	198° 30′	18° 30′	— 317	— 948	1,861
40	104° 00′	14° 00′	970	— 242	286° 40′	16° 40′	— 958	287	2,232
41	142° 36′	52° 36′	607	— 794	14° 50′	14° 50′	255	966	—0,156
42	181° 12′	1° 12′	— 021	—1,000	103° 00′	13° 00′	974	— 225	0,679
43	219° 48′	39° 48′	— 640	—0,768	191° 10′	11° 10′	— 193	— 981	3,195
44	258° 24′	78° 24′	— 980	— 201	279° 20′	9° 20′	— 986	162	1,288
45	297° 00′	27° 00′	— 891	454	7° 30′	7° 30′	131	994	—3,359
46	335° 36′	65° 36′	— 413	911	95° 40′	5° 40′	995	— 098	—3,645
47	14° 12′	14° 12′	245	969	183° 50′	3° 50′	— 666	— 998	0,018
48	52° 48′	52° 48′	797	605	272° 00′	2° 00′	— 999	035	0,932
49	91° 24′	1° 24′	1,000	— 024	0° 10′	0° 10′	003	1,000	—1,095
50	130° 00′	40° 00′	0,766	— 643	88° 20′	88° 20′	1,000	0,029	—0,067
51	168° 36′	78° 36′	198	— 980	176° 30′	86° 30′	0,061	— 999	3,688
52	207° 12′	27° 12′	— 457	— 889	264° 40′	84° 40′	— 995	— 093	3,427
53	245° 48′	65° 48′	— 912	— 410	352° 50′	82° 50′	— 125	992	—1,181
54	284° 24′	14° 24′	— 968	249	81° 00′	81° 00′	988	156	—3,057
55	323° 00′	53° 00′	— 602	799	169° 10′	79° 10′	187	— 982	—0,599
56	1° 36′	1° 36′	028	1,000	257° 20′	77° 20′	— 976	— 219	0,090
57	40° 12′	40° 12′	645	0,764	345° 30′	75° 30′	— 250	968	—2,386
58	78° 48′	78° 48′	981	194	73° 40′	73° 40′	959	280	—1,985
59	117° 24′	27° 24′	888	— 460	161° 50′	71° 50′	312	— 950	2,518
60	156° 00′	66° 00′	407	— 914	250° 00′	70° 00′	— 940	— 342	4,306
61	194° 36′	14° 36′	— 252	— 968	338° 10′	68° 10′	— 371	928	0,862

Tableau IV

Calculs pour rendre minimum *e*.

Ajustement à 2 périodes				Ajustement à 1 période			
N° d'ordre initial	U_i	V_i	Valeurs cumulées de V_i	N° d'ordre initial	U_i	V_i	Valeurs cumulées de V_i
43	—400,00	0,02	0,02	24	—125,00	0,08	0,08
35	—300,00	0,02	0,04	56	— 41,38	0,29	0,37
56	— 20,00	0,60	0,64	21	— 31,25	0,32	0,69
6	— 13,53	0,17	0,81	33	— 17,74	0,62	1,31
19	— 8,86	1,58	2,39	57	— 10,31	1,94	3,25
14	— 8,33	0,36	2,75	30	— 10,26	0,39	3,64
1	— 5,09	3,73	6,48	31	— 8,12	1,97	5,61
5	— 5,08	0,59	7,07	36	— 5,95	0,84	6,45
8	— 4,67	1,50	8,57	50	— 5,56	0,18	6,63
59	— 3,02	1,99	10,56	52	— 5,03	1,79	8,42
36	— 2,96	1,69	12,25	48	— 5,00	1,60	10,02
41	— 2,69	2,23	14,48	26	— 4,60	1,74	11,76
16	— 1,69	3,55	18,03	2	— 4,15	1,93	13,69
40	— 1,61	1,86	19,89	39	— 3,81	1,05	14,74
39	— 1,55	2,58	22,47	8	— 3,43	2.04	16,78
29	— 1,17	1,71	24,18	37	— 3,40	2,06	18,84
49	— 1,09	0,93	25,11	42	— 3,20	1,25	20,09
12	— 1,06	1,89	27,00	6	— 2,92	1,37	21,46
38	— 0,92	4,34	31,34	15	— 1,30	0,77	22,23
55	— 0,65	3,06	34,40	29	— 1,25	1,60	23,83
4	— 0,61	3,29	37,69	9	— 0,84	1,19	25,02
23	— 0,53	1,89	39,58	49	— 0,53	1,90	26,92
15	— 0,36	2,79	42,37	45	0,00	1 43	28,35
45	0,00	1,29	43,66	54	0,00	1,85	30,20
54	0,00	1,18	44,84	23	0,69	1,44	31,64
32	0,26	3,81	48,65	32	0,69	1,45	33,09
9	0,34	2,92	51,57	4	0,98	2,03	35,12
18	0,85	3,55	55,12	55	1,20	1,67	36,79
50	0,91	1,10	56,22	14	1,46	2,05	38,84
30	1,11	3,61	59,83	40	1,46	2,06	40,90
53	1,46	3,43	63,26	5	1,50	2,00	42,90
27	1,69	1,18	64,44	51	1,73	1,73	44,63
61	1,86	4,31	68,75	12	2,02	0,99	45,62
10	2,11	4,26	73,01	28	2,12	1,89	47,51
44	2,19	3,20	76,21	20	2,56	1,95	49,16
24	2,21	4,53	80,74	22	3,03	1,65	51,11
52	2,44	3,69	84,43	38	3,74	1,07	52,18
2	2,65	3,02	87,45	34	3,94	2,03	54,21
22	2,72	1,84	89,29	16	4,51	1,33	55,54
58	2,93	2,39	91,68	58	4,61	1,52	57,06
47	3,01	3,65	95,33	35	4,72	1,27	58,33
26	3,77	2,12	97,45	43	4,93	2,03	60,36
46	3,87	3,36	100,81	60	4,98	2,01	62,37
60	3,97	2,52	103,33	25	5,06	1,78	64,15
33	4,10	2,68	106,01	18	5,45	0,55	64,70
3	5,23	1,72	107,73	3	5,84	1,54	66,24
25	5,88	1,53	109,26	61	5,98	1,34	67,58
7	6,98	2,15	111,41	46	6,57	1,98	69,56
28	8,00	0,50	111,91	17	6,97	2,01	71,57
20	8,47	0,59	112,50	11	7,28	2,06	73,63
37	8,54	0,82	113,32	19	9,33	1,50	75,13
21	9,01	1,11	114,43	10	9,57	0,94	76,07
62	11,63	0,86	115,29	44	10,94	0,64	76,71
43	14,71	0,68	115,97	41	11,32	0,53	77,24
34	14,81	0,54	116,51	59	11,32	0,53	77,77
17	18,18	0,77	117,28	13	12,28	1,14	78,91
42	25,00	0,16	117,44	27	12,50	0,16	79,07
11	31,25	0,48	117,92	62	13,33	0,75	79,82
51	42,86	0,07	117,99	7	20,83	0,72	80,54
31	51,61	0,31	118,30	47	26,83	0,41	80,95
13	155,56	0,09	118,39	1	73,08	0,26	81,21
57	222,22	0,09	118,48	53	83,33	0,06	81,27

N.-B. — Le numéro de novembre commence au folio 283.

Le Gérant : R. WALTHER

IMPRIMERIE BERGER-LEVRAULT, NANCY-PARIS-STRASBOURG. — 1930