JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

J. MARCHAND

Une nouvelle application de la statistique graphique

Journal de la société statistique de Paris, tome 23 (1882), p. 33-40

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1882__23__33_0>

II.

UNE NOUVELLE APPLICATION DE LA STATISTIQUE GRAPHIQUE.

nfluence de la masse des opérations et du taux de l'escompte sur le dividende des actions de la Banque de France.

(Avec un diagramme.)

La statistique a pour but de constater les faits et de les présenter d'une manière telle qu'ils soient facilement intelligibles pour tout le monde, le desideratum serait de remonter des faits connus aux causes qui les ont amenés et par suite d'induire en quelque sorte l'avenir. En statistique le fait en lui-même importe assez peu, le point considérable c'est sa périodicité, c'est cette périodicité qui doit attirer l'attention des économistes et qui peut mettre sur la piste de phénomènes qui échappent à l'observation immédiate. En effet, si la statistique démontre qu'un fait se reproduit tous les ans à la même date, nous en conclurons logiquement qu'il est le résultat d'une cause dont il s'agira de déterminer la nature et l'influence. On trouve ainsi dans la plupart des statistiques des périodicités bien marquées et dont l'étude présenterait le plus haut intérêt, malheureusement les statistiques chiffrées, longues et fastidieuses, ne donnent qu'une idée vague et confuse des faits et il faudrait une mémoire surhumaine pour tirer parti des immenses tableaux que publient les différents ministères avec un zèle digne d'un meilleur sort.

Les inconvénients de la statistique chiffrée sont tellement évidents qu'on a dû chercher à les diminuer et on y est parvenu dans une certaine mesure par l'emploi de la statistique graphique qui fournit ces tableaux bien connus des économistes sous le nom de diagrammes. Ces diagrammes ont pour avantage d'indiquer avec beaucoup de netteté les variations des faits économiques et de mettre en évidence ceux qui dépendent du temps, ils représentent la fonction $y = f(x)$, dans laquelle y représente le fait et x le temps, mais le temps, quelle que soit son importance, n'est pas le seul élément à considérer, et il y a lieu de chercher si, tout en tenant compte du temps, il ne serait pas possible d'introduire la considération d'éléments nouveaux; c'est ce que nous avons essayé de faire.

Considérons un fait et supposons qu'il dépende de deux autres; si nous constatons l'existence simultanée de ces trois faits, nous aurons à étudier la fonction $z = f(x, y)$, x et y étant les influences qui déterminent les variations de z.

La représentation graphique de l'expression $z = f(x, y)$ donnant lieu à une courbe gauche, il est nécessaire, pour obtenir la représentation de cette courbe, de recourir aux procédés de la géométrie descriptive et on obtiendra non le diagramme lui-même, mais ses projections horizontale et verticale.

Il nous semble que ce procédé mettrait en relief une foule de faits dont la dépendance mutuelle est encore peu ou point connue, et pour n'en citer qu'un exemple, il fournirait de précieuses indications sur les rapports de la mortinatalité et de la taille des peuples.

Mais il n'entre pas dans le cadre de cette notice de faire ressortir toutes les applications de la méthode que nous indiquons. Nous avons essayé de l'appliquer aux cours des principales valeurs cotées à la Bourse, et nous avons obtenu des résultats discontinus, échappant à toute analyse et témoignant seulement de l'existence des syndicats et des fantaisies de leur imagination. Nous nous sommes alors adressé à un fait simple, et qui nous était familier, nous avons recherché l'influence de la masse des opérations et du taux de l'escompte de la Banque de France sur les bénéfices de cet établissement. Nous avons pris trois axes de coordonnées : $o\,x$, sur lequel nous avons compté la masse des opérations productives, escomptes et avances, $o\,y$, sur lequel figurent les taux de l'escompte, et $o\,z$ qui est l'axe des dividendes.

Les opérations sont comptées par milliards, le taux de l'escompte par unité et les dividendes par 10 fr.

Rien de plus simple que de construire le diagramme en question, en 1858 la Banque a fait 5,200,000,000 opérations productives au taux de 3.7 p. 100, nous prenons sur $o\,x$ la ligne 5.2, sur $o\,y$, 3.7 p. 100, et l'intersection de ces deux lignes nous fournit la projection horizontale du point cherché, nous abaissons de ce point une perpendiculaire sur $o\,x$ et nous la prolongeons d'une longueur 115 qui sera le dividende correspondant. En joignant, *dans l'ordre des années*, les points ainsi obtenus, nous aurons le diagramme cherché. Certes, ce diagramme est loin de donner toute la vérité, car bien des circonstances influent sur le dividende de la Banque : la longueur du papier présenté à l'escompte, les effets en souffrance, les frais d'administration, les réserves, mais en gros, les dividendes résultent surtout des deux éléments que nous avons considérés et nous relevons certains faits curieux: de 1858 à 1859 la masse des opérations augmente de 1 milliard et l'escompte diminue de 0.2 p. 100, le dividende reste stationnaire, nous pouvons donc en conclure à peu près que la Banque, en élevant le taux de son escompte de 0.2 p. 100, compensera une diminution de 1 milliard d'opérations et qu'un taux supérieur lui donnerait des bénéfices, car de 1860 à 1861 l'escompte croît de 1.9 p. 100, la masse des opérations de 150 millions seulement et le dividende du chiffre relativement considérable de 8 fr. Ce qui ressort de ce diagramme c'est l'influence prépondérante du taux de l'escompte sur les bénéfices. La projection horizontale et la projection verticale de la courbe offrent une quasi-symétrie très-intéressante et bien instructive, elles démontrent combien le taux de l'escompte est un instrument sensible et entre quelles étroites limites il peut produire de grands résultats.

Nous n'en dirons pas plus long sur la méthode que nous indiquons, nous réservant de revenir sur ce sujet et de tirer quelques déductions nouvelles de tableaux graphiques à trois dimensions que nous avons construits.

P. DES ESSARS.

III.

DU CALCUL DU TAUX PROPORTIONNEL ANNUEL D'ACCROISSEMENT D'UNE POPULATION.

Pour apprécier les variations des grandeurs qui font l'objet de leurs études, les statisticiens emploient le plus souvent la notion du taux proportionnel. Obéissant en cela à la nature des choses, leur mode de procéder se rapproche essentiellement de celui que l'usage a fait adopter pour les calculs d'intérêt, et de même que les opérations de banque ont pour base la connaissance d'un certain taux proportionnel exprimé en centièmes, de même dans les questions de statistique, les évaluations des divers éléments numériques considérés se ramènent constamment à la détermination de certaines quantités fractionnaires rapportées comme unité à une quelconque des puissances de 10. Ainsi, dans l'arithmétique financière, on dit le taux de l'intérêt est de tant p. 100; dans l'arithmétique statistique, le taux de variation de telle quantité est de tant p. 100, tant p. 1,000, etc.

Les lecteurs de cette revue n'ont rien à apprendre à cet égard. Il n'était pas inutile cependant de leur rappeler ces analogies, pour mettre en relief le but des remarques qui vont suivre, et dont l'objet essentiel est de relever les erreurs où l'on est exposé à tomber en statistique, faute de les avoir présentes à l'esprit.

Pour faire saisir la portée pratique de nos observations, prenons d'ailleurs un exemple.

Une citation très-courte empruntée à la deuxième édition de la *Statistique de la France* de M. Maurice Block nous le fournira.

Voici ce qu'on lit en effet à la page 39 du premier volume de cet intéressant et savant ouvrage :

« Dans les principaux États étrangers, l'accroissement de la population a suivi la « marche que nous allons indiquer.

Grande-Bretagne. — Voici le chiffre de sa population aux époques ci-après :

	1801.	1821.	1841.	1861.	1871.
Angleterre et Galles	8,872,980	11,978,875	15,906,829	20,066,224	22,704,408

Il en résulte que l'*accroissement proportionnel par année* a été ainsi qu'il suit pendant la période ci-après :

1801 à 1821.	1821 à 1841.	1841 à 1861.	1861 à 1871.
1.75 p. 100	1.65 p. 100	1.25 p. 100	1.30 p. 100

Or il est facile de reconnaître que M. Block a donné à tort le nom d'*accroissement proportionnel par année* à des quantités qui ne sauraient avoir cette signification.

Pour le montrer, considérons par exemple le premier des nombres ainsi dénommés, 1.75 p. 100, qui représente d'après l'auteur l'accroissement proportionnel annuel de la population de l'Angleterre et du pays de Galles pendant la période vigintésimale comprise entre les années extrêmes 1801 et 1821, et refaisons les calculs nécessaires pour arriver à ce résultat.

On y parvient : 1° en prenant la différence des populations aux deux limites de la période; 2° en divisant cette différence par son terme soustractif; 3° en divisant ensuite par 20 le quotient ainsi obtenu; 4° enfin, en multipliant par 100 ce dernier résultat, car l'on a bien en effet :

$$1.75 = \frac{11,978,875 - 8,872,980}{8,872,980} \times \frac{1}{20} \times 100$$

Mais étant établi que les opérations sont matériellement irréprochables, reprenons-les maintenant une à une pour en tirer successivement le sens.

Le premier des quotients auxquels nous sommes parvenus, représente bien une quantité proportionnelle, et il exprime évidemment, si nous le ramenons à la forme habituelle d'un taux en le multipliant par 100, l'accroissement d'un groupe de cent habitants, pris au hasard dans la population anglaise de 1801, pendant les 20 années qui suivent; mais il n'en résulte pas, et c'est en cela que l'opérateur s'est mépris, que le vingtième de ce premier résultat exprime à son tour l'*accroissement proportionnel annuel.*

Si cette définition était rigoureuse en effet, il s'ensuivrait, d'après le calcul même que nous venons de faire, que du moment que l'accroissement *proportionnel* annuel d'une population est *constant,* l'accroissement *absolu* est lui-même *constant;* et cela n'a pas lieu, nous allons le montrer.

Considérons pour cela un groupe initial quelconque, de 10,000 individus par exemple, s'accroissant de 1 p. 100 par an.

D'après cette hypothèse, ce groupe comptera après la première année 100 habitants de plus, de sorte que, l'année suivante, le taux d'accroissement étant encore le même, ce premier groupe de 10,000 personnes s'accroîtra bien encore de 100 nouveaux membres, mais que pour avoir l'augmentation totale de la population, il faudra tenir compte, en outre, de celle qu'éprouve un deuxième groupe de 100 personnes qui est venu grossir la population primitive dans l'intervalle annuel primordial. Ainsi, en résumé, l'accroissement absolu, qui était de 100 la première année, sera de 101 la deuxième, c'est-à-dire sera devenu plus grand alors que l'accroissement proportionnel annuel sera cependant resté constant.

A ces remarques, enfin, nous pouvons ajouter la suivante :

Deux quantités répondant au même objet, et ayant une signification identique, doivent forcément s'obtenir par des procédés identiques. Par conséquent, si le taux proportionnel annuel d'accroissement de la population dans la période (1801-1821) est défini avec la différence des populations aux époques extrêmes divisée par la population initiale, le taux proportionnel d'accroissement *par année,* de 1811 à 1812 par exemple, s'obtiendra de même en faisant la différence des nombres correspondant à ces deux limites, et en divisant ainsi cette différence par le premier de ces chiffres.

Comme nous le disions en débutant, l'analogie entre cette analyse et celle qui est suivie dans les questions d'intérêt est flagrante, et il suffisait de l'avoir présente à l'esprit pour ne pas tomber dans l'erreur signalée. L'auteur, en effet, n'a fait pour déterminer le taux annuel d'accroissement que se servir d'une formule d'intérêt; mais c'est celle de l'intérêt simple qu'il a employée, alors que c'était celle de l'intérêt composé qu'il fallait appliquer.

Dans le cas de l'intérêt simple on suppose qu'au bout de chaque année, le prêteur retire des mains de son débiteur l'intérêt de son argent, tout au moins que cet intérêt ne se capitalise pas, de sorte que c'est toujours *la même somme d'argent qui rapporte :* or, il est bien évident par suite de son augmentation continue (si l'on veut bien me passer une incorrection de langage), que ce n'est plus la même population qui *rapporte* au commencement et à la fin d'un intervalle annuel quelconque, et que chaque augmentation successive, immédiatement *capitalisée,* entre immédiatement *en rapport.*

Donc, c'est à la formule de l'intérêt composé qu'il faut avoir recours pour avoir l'expression des faits, et la détermination du taux d'accroissement annuel doit dès lors se faire par des opérations autres que celles dont nous avons signalé l'impropriété.

Nous n'avons plus, pour achever l'exposé de la question dans les limites que nous nous sommes posées, qu'à indiquer ces opérations.

Il importe cependant de bien préciser la nature du résultat auquel elles nous conduiront, et au point de vue de la clarté nous pensons devoir commencer par là cette dernière partie de nos observations.

Ce résultat en effet, bien qu'obtenu par une voie un peu différente de celle que l'on suit habituellement pour déterminer une *quantité moyenne,* est à proprement parler ce que l'on appelle une *moyenne* et il est facile de se l'expliquer.

Une population, par suite même des mille et mille influences qui agissent sur son développement, ne saurait conserver dans sa marche une vitesse uniforme. Cette marche subit des oscillations en sens divers, qui tantôt se traduisent par des accélérations, tantôt au contraire par des ralentissements. Les observations, pour donner une image fidèle de la nature des choses, devraient être suffisamment rapprochées pour que toutes ces perturbations vinssent se trahir; mais cela, on le sait, est pratiquement impossible. Ce que la statistique peut saisir se réduit donc à des états extrêmes peignant la marche du phénomène à des moments donnés, mais ne donnant évidemment aucune notion précise sur les états intermédiaires. Il est utile cependant de se les figurer, approximativement au moins, et dans leur trait essentiel. La science dès lors n'a qu'un moyen, de substituer à l'état vrai, insaisissable, un état virtuel ne représentant pas la réalité sans doute, pourtant ne s'en éloignant que le moins possible, et qui sous une forme simple et d'une intelligence facile restitue la physionomie d'ensemble du phénomène disparu.

C'est cet état virtuel que l'auteur de la *Statistique de la France* a cherché à traduire, et nous maintenant après lui, en complétant d'abord la notion de l'accroissement total s'appliquant à une longue période de 20 années, par celle du taux d'accroissement annuel, qui prend plus de netteté par cela même qu'elle s'applique à un intervalle de temps plus court; en négligeant ensuite les inégalités que le taux peut présenter d'une année à l'autre, et en les remplaçant par un taux constant, dont la valeur, comprise entre les valeurs réelles extrêmes, exprime le résultat des compensations qui ont dû se faire entre elles pour aboutir à l'état de choses finalement constaté.

Ce taux constant est donc, dans l'acception la plus rigoureuse du mot, une *expression moyenne :* cette propriété que nous venons de lui reconnaître maintenant est *spécifique,* c'est-à-dire absolument indépendante des calculs par lesquels on déterminera sa grandeur; de sorte que si, pour y parvenir, on doit recourir à autre chose qu'à la sommation de certaines quantités suivie de la division de leur total par leur nombre, le résultat n'en sera pas moins, malgré cela, une *expression moyenne,* que nous pourrons justement dès lors appeler le *taux annuel moyen* (1).

Abordant maintenant le calcul de cette quantité, il est clair d'après ce que nous venons de dire, que pour la déterminer il suffit de recourir à la formule de l'intérêt composé dans laquelle on supposera que le taux est l'inconnue.

Ainsi appelons Po la population initiale; Pn la population finale; n le nombre d'années écoulées entre les observations qui ont donné ces deux chiffres; le taux inconnu x se calculera en résolvant par rapport à x l'équation,

$$Pn = Po\,(1 + x)^n\,;$$

qui peut se mettre comme on sait sous la forme suivante :

$$\log\,(1 + x) = \frac{1}{n}\log\left(\frac{Pn}{Po}\right),$$

dans laquelle *log* désigne le symbole du logarithme vulgaire d'un nombre.

A l'aide d'une table de logarithmes on pourra maintenant déterminer $(1 + x)$, d'où x se déduira immédiatement ensuite.

(1) C'est au défaut de cette remarque que nous paraît suivant toute vraisemblance être en grande partie attribuable l'erreur que nous nous sommes proposé de signaler dans ce travail : Ceux qui l'ont commise les premiers, comme ceux qui la commettent encore tous les jours (nous en avons trouvé récemment un nouvel exemple dans un article du *Journal officiel* de la République française, sur les résultats du recensement du 1er décembre 1875 de l'empire allemand), ne l'ont pas aperçue, préoccupés sans doute de la nécessité de faire sortir leurs chiffres moyens du moule ordinairement employé dans la circonstance, concluant à tort de l'identité des opérations à l'identité des résultats.

Appliquant cette formule a l'exemple numérique sur lequel nous avons raisonné dans le courant de cet article, on aura

$$Po = 8{,}872{,}980 \qquad Pn = 11{,}978{,}875 \qquad n = 20$$

d'où l'on tire, à l'aide d'une table de Callet,

$$\log(1 + x) = 0{,}00651669,$$
$$1 + x = 1{,}0152,$$
$$x = 0{,}0152,$$

et finalement en multipliant la valeur de x par 100 :

Taux annuel moyen = 1.52 p. 100

Ce nombre, on le voit, diffère notablement de celui qu'indique la *Statistique de la France,* 1.75, puisque la différence absolue est égale à 0.23, et l'erreur relative de plus de 15 centièmes.

Il est, du reste, facile de donner une expression générale et de cette différence absolue et de cette erreur relative ; désignons, en effet, par x le taux calculé d'après la méthode que nous avons combattue : il est clair que l'on peut écrire entre cette quantité et la valeur de x la relation suivante .

$$1 + n\,x_1 = (1 + x)^n.$$

En développant le deuxième membre suivant la formule du binôme de Pascal, elle deviendra

$$n\,x_1 = n\,x + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,n^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,n^3 + \ldots\ldots$$

d'où l'on tire immédiatement les irrégularités

$$x_1 - x > \frac{n-1}{2}\,x^2, \quad \frac{x_1 - x}{x} > \frac{n-1}{2}\,x,$$

qui nous donnent des limites inférieures des quantités considérées, et nous montrent : 1° que plus la marche d'accroissement sera grande, plus l'erreur commise en se servant de x_1 au lieu de x sera sensible ; 2° que plus la période qui sépare les observations est considérable, plus l'erreur commise augmente également et pratiquement. Nous en concluons que, si dans une étude sommaire, pour s'épargner la peine de recourir à une table de logarithmes, on voulait substituer l'emploi de x_1 à celui de x, ce ne pourrait être, sous peine de se tromper gravement, qu'à condition de s'être assuré d'abord que x est très-faible, et d'autre part lorsque n est lui-même réduit à un petit nombre d'années.

Pour achever de mettre en relief la valeur de ces remarques, proposons-nous de calculer la période de doublement d'une population, en employant successivement le taux moyen annuel, tel que nous venons de le définir, et tel que nous l'avons trouvé défini par M. Block, et continuons de raisonner sur les chiffres dont nous avons jusqu'à présent fait usage.

L'inconnue ici n'est plus le taux, mais la période de doublement n. Dans le système que nous rejetons, elle se déduira de la formule suivante :

$$1 + n \times 0{,}0175 = 2, \text{ d'où l'on tire } n = 57 \text{ ans 2 dixièmes.}$$

Dans celui, au contraire, que nous avons proposé, de la relation

$$(1 + 0{,}0152)^{n} = 2,$$

qui donne avec une table de logarithmes :

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}0152} = \frac{30103000}{651669} = 46 \text{ ans 2 dixièmes.}$$

Comme on le voit, la divergence des deux résultats est de 11 ans, loin par conséquent d'être négligeable. Elle a en outre ceci de curieux que c'est précisément dans le même sens que celle, déjà constatée entre les taux, qu'elle s'accuse ; de sorte que contrairement à une première apparence, c'est à la valeur du taux la plus grande que correspond la période de doublement la plus considérable.

Ici encore les analogies avec les calculs d'intérêt permettent d'expliquer ces résultats avec la plus grande facilité. Mais nous laissons ce soin au lecteur, qui pourrait à juste titre se fatiguer à la longue de la monotonie de ces rapprochements, qu'il suffit d'ailleurs de signaler pour rendre évidents.

Dans tout ce qui précède, conformément d'ailleurs à ce qui se passe dans le plus grand nombre des cas, nous avons supposé la population à la fin de la période plus considérable qu'au commencement. Il peut se faire cependant que le contraire se produise, et par suite qu'au lieu d'une augmentation ce soit une diminution que l'on ait à mesurer.

Le taux total alors et le taux annuel, au lieu d'être positifs, seront négatifs, mais rien dans les raisonnements qui nous ont servi, à part cette circonstance, ne devra être modifié, de sorte que finalement, la formule dont nous avons fait usage peut être considérée comme générale à condition que le taux inconnu x soit regardé comme une quantité susceptible de prendre un quelconque des deux signes $+$ ou $-$; le premier répondant, comme nous l'avons trouvé, à une augmentation, le deuxième à une diminution.

Nous croirions faire injure au lecteur en insistant davantage sur ce point, qui clôt l'exposé que nous venons de faire.

J. Marchand,
Ex-Directeur de la Statistique générale du Pérou.