

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

BERTILLON

La théorie des moyennes en statistique

Journal de la société statistique de Paris, tome 17 (1876), p. 265-271

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1876__17__265_0

© Société de statistique de Paris, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

II.

LA THÉORIE DES MOYENNES EN STATISTIQUE.

MOYENNE. 1. *Définition.* Ce mot, qui est plutôt adjectif dans la langue commune, se prend aussi substantivement dans le calcul des PROBABILITÉS et en STATISTIQUE. Dans les sciences, la moyenne est une valeur (numérique ou géométrique) qui s'obtient en additionnant un nombre N de valeurs dont les grandeurs sont plus ou moins différentes entre elles (plusieurs peuvent même être égales), mais de même nature, et en divisant leur somme par ce nombre N , le quotient est la moyenne cherchée. Il résulte de là que l'on peut donner de la moyenne la définition suivante :

Une moyenne est une valeur intermédiaire qui tient le milieu entre plusieurs autres valeurs de même ordre déjà constituées et qui servent à déterminer cette valeur moyenne par la double influence de leur grandeur particulière et de leur fréquence relative ou probabilité de production. Une moyenne est donc une valeur abstraite créée de manière à former une sorte de résultante intermédiaire et unique d'un grand nombre de grandeurs déjà connues. Nous établirons, plus loin, pourquoi il ne faut pas confondre cette valeur moyenne avec ce qu'on appelle quelquefois en statistique un résultat moyen. Établissons d'abord qu'il y a deux genres de valeurs auxquels on applique cette dénomination.

L'une est la valeur approchée d'une grandeur ayant une existence réelle, ou objective, et résumant un plus ou moins grand nombre de mesures approximatives de la grandeur existante.

L'autre est une grandeur imaginaire ou subjective, synthétique de plusieurs grandeurs existantes et déjà mesurées. Par des exemples, précisons mieux cette distinction, et voyons comment elle est née.

2. *Moyenne prise comme valeur approchée d'une grandeur réelle, mais inconnue, ou moyenne objective.* Si, par exemple, un voyageur se propose de déterminer la hauteur d'un monument difficile à mesurer, s'il désire un résultat aussi précis que possible, il procédera à un premier mesurage, mais pour peu qu'il réfléchisse aux causes d'erreur qui peuvent entacher cette première opération, il ne s'y tiendra pas et voudra la vérifier par une seconde; et comme très-probablement le deuxième résultat différera du premier, il sera conduit à prendre une troisième mesure. S'il apporte quelque précision dans le mesurage, il trouvera encore que cette troisième diffère des deux précédentes et sera conduit à une quatrième; ainsi de suite, suivant la précision qu'il lui importe d'obtenir et le temps dont il peut disposer. S'il a pris ainsi dix mesures en relevant, par exemple, les mètres, décimètres, centimètres et millimètres, il aura vraisemblablement dix mesures différentes, et comme il a apporté une égale attention à chacune, il n'a aucune raison pour en adopter une plutôt qu'une autre; il sera donc conduit à faire la somme de ces dix hauteurs et à diviser ce résultat par dix; le *quotient sera la valeur moyenne*, la valeur représentative approchée de la hauteur vraie du monument (1).

Les astronomes font une opération de même genre lorsqu'ils ont des grandeurs angulaires ou des durées à déterminer avec une extrême précision; aussi répètent-ils un grand nombre de fois les mêmes mesures pour calculer la moyenne; et ils la regardent comme se rapprochant d'autant plus de la grandeur vraie, non-seulement que leurs instruments sont meilleurs et leur habileté plus grande, de sorte que les erreurs de chaque observation sont moindres, mais aussi qu'ils ont répété un plus grand nombre de fois leur mensuration.

Le physicien, le chimiste, chacun dans sa science, emploie la même méthode et résume ses données par des évaluations moyennes également dans le but de se rapprocher davantage des grandeurs vraies. On voit que toutes ces moyennes sont des approximations de grandeurs existantes que l'on cherche à déterminer aussi rigoureusement que possible. Pour abrégé, nous les appellerons *moyennes objectives*.

3. *Moyennes subjectives.* Cependant, en d'autres circonstances, et notamment dans les sciences qui ont pour objet les êtres vivants, l'esprit a été amené spontanément à concevoir des grandeurs moyennes qui n'ont qu'une existence imaginaire ou subjective. Ainsi, la vue des objets donne à chacun une idée plus ou moins juste de la taille moyenne du cheval, du chat, et notamment de l'homme; c'est cette idée qui permet d'avancer que tel individu est petit, tel autre grand, tel autre de *taille moyenne*. Mais si, au lieu de cet aperçu vague que la science ne saurait utiliser, on se demande quelle est au juste cette taille moyenne; où commence et finit la grande,

(1) On remarquera que, si par extraordinaire il lui est arrivé deux ou trois fois de trouver précisément la même grandeur, cette grandeur entrera deux ou trois fois, tant dans la somme (comme valeur) que dans le diviseur (comme unité): c'est pourquoi, dans notre définition, nous avons dû dire que la moyenne est formée sous la double raison de la valeur et de la fréquence des grandeurs particulières.

la petite taille; une embarrassante incertitude surgit, et elle ne peut être surmontée que par la considération d'un grand nombre de tailles de même ordre et relevées isolément.

Nous verrons plus loin toutes les connaissances, souvent fort imprévues, que peut fournir un tel relevé quand on sait l'interroger; présentement, je n'ai en vue que la détermination de la taille moyenne que l'on déduit comme toujours, *en additionnant toutes ces grandeurs et en divisant leur somme par leur nombre*, le quotient faisant connaître la grandeur *moyenne*. Cependant il est manifeste que cette moyenne ne se rapporte pas, comme la précédente, à un objet extérieur, substantiel, ayant sa grandeur propre, mais bien à une pure abstraction de notre esprit; de là le nom ou plutôt la qualification de subjective que nous proposons de donner à cette moyenne en conformité avec le sens que la langue philosophique, aujourd'hui courante, attribue à cette expression. En vain objecterait-on que cette grandeur moyenne peut aussi avoir sa réalisation objective, être justement la grandeur qui convient à quelques-uns des objets mesurés; c'est là une rencontre toute fortuite, nullement nécessaire. La taille moyenne de dix hommes, que le hasard a réunis, ne sera probablement celle d'aucun d'eux, elle ne cesse pas pour cela d'être la taille moyenne du groupe. Remarquons en outre que non-seulement toute grandeur mesurable s'appliquant à plusieurs individus : taille, poids, volume, vitesse, force, est susceptible de valeur moyenne, mais que tout attribut également variable : couleur, odeur, forme, etc..., l'est également. Seulement, ces moyennes ne seront facilement déterminables que si l'on a pu exprimer en nombre les degrés de variation de chacun de ces attributs.

4. Ainsi, nous avons déjà déterminé deux espèces fort différentes de valeur moyenne que, pour abrégé, j'appellerai :

1° *Moyenne objective*, valeur approchée d'une grandeur existante se rapportant à un objet déterminé. Nous avons vu que les motifs qui conduisent à la détermination de cette moyenne n'ont d'autre raison que l'imperfection de nos instruments et de nos sens.

2° *Moyenne subjective*, résumant des impressions multiples que font naître les variations individuelles, et se rapportant à une abstraction imaginaire créée par notre esprit pour synthétiser ces impressions et décharger d'autant notre mémoire, notre attention et nos investigations.

L'introduction de ces moyennes subjectives est certainement une nécessité de notre entendement, puisque les méthodes de détermination scientifique ne font que formuler et préciser une création spontanée de notre intellect; mais si leur admission est nécessitée par notre faiblesse, cette faiblesse, a été heureuse, car elle nous a conduit à ordonner et à grouper nos connaissances.

5. Cependant, les *moyennes subjectives* sont encore susceptibles de plusieurs divisions, suivant le point de vue auquel on se place. On peut, avec Cournot, considérer :

1° Un groupe de moyennes qui ont un intérêt en soi : le prix du blé, la ration moyenne du soldat, la production moyenne d'un pré, etc...

2° Un autre groupe de moyennes qui est un besoin de la théorie, un indice de variation; l'âge moyen d'une population, la taille moyenne, la vie moyenne, etc...

Nous avouons pourtant que cette division nous paraît bien artificielle et sans application utile. Il en est une autre beaucoup plus importante pour la science

et sur laquelle Quételet a insisté avec raison : c'est celle qui dépend de la nature même de la collectivité dont on détermine une grandeur moyenne, suivant que, dans un premier cas, les individualités qui la forment concourent vers un seul type, constituent un groupe naturel, telle serait la taille moyenne (et plus généralement chacun des attributs moyens) d'une collectivité constituant une nationalité homogène; et, dans un second cas, suivant que les individus considérés ne sont qu'une agglomération fortuite et factice, telle serait la taille moyenne des habitants de la Scandinavie, dont une portion est indo-européenne, de haute stature, tandis que l'autre est laponne et de très-petite taille. Des différences fort importantes dans la signification et l'interprétation de ces valeurs séparent ces deux espèces de moyennes : l'une mériterait le nom de *moyenne typique*, parce qu'elle mesure l'un des attributs typiques d'un groupe naturel, et l'autre de *moyenne indice*, parce qu'elle n'a d'autre effet que de fournir un indice servant à mesurer les variations (1).

6. *Grandeur moyenne et grandeur probable ou médiane.* Il importe de ne pas confondre ces deux valeurs. La *moyenne* est une grandeur qui, par sa valeur propre, tient le milieu entre différentes grandeurs de même ordre; la *probable* est une limite en deçà et au delà de laquelle les individualités classées par ordre de grandeur se trouvent en même nombre. Souvent même (avec les moyennes typiques), on considère deux limites entre lesquelles et au delà desquelles on compte un nombre égal d'individus offrant la grandeur considérée : l'intervalle compris entre chacune de ces limites et la moyenne est dit *écart probable*, et aussi erreur probable, surtout pour la moyenne objective; la somme des deux écarts est l'*amplitude* de variation probable. Cependant quelques auteurs, mais non mathématiciens, appellent aussi grandeur probable toute grandeur comprise entre les deux limites; dans ce cas, on voit que la probable n'est plus une limite, mais devient un groupe de grandeurs comprenant la moitié des observations faites. Dès lors il y a autant de probabilité pour qu'une individualité, classée d'après la grandeur étudiée, trouve sa place en deçà ou au delà de la limite ou des limites déterminant la valeur probable. Mais la probable, entendue le plus souvent par les géomètres comme étant une grandeur limite, ne saurait être la grandeur la plus probable; en effet, il n'y a guère de chance pour une valeur d'être sur cette limite. C'est pourquoi Cournot propose, avec raison, il me semble, de remplacer cette dénomination, d'ailleurs fort connue, par celle de *valeur médiane*, qui coupe les grandeurs considérées en deux groupes de même nombre.

7. Enfin, pour compléter le parallèle entre la *valeur moyenne* et la *valeur*

(1) Quételet propose de réserver à la valeur de la première catégorie (à notre moyenne typique) la dénomination exclusive de *Moyenne*, et de donner à la seconde le nom de *Moyenne arithmétique*. J. Herschel, qui insiste aussi sur l'importante distinction établie par Quételet, accepte aussi de ne recevoir que dans son acception restreinte le mot de moyenne, mais il propose en outre de désigner notre moyenne-indice par le nom anglais d'*average*. Dira-t-on jamais, même en Angleterre, *Vie avérage* pour dire *vie moyenne*? âge avérage? etc. Je ne le pense pas. Quant à la proposition de Quételet, elle a deux défauts; le premier, imputable aussi à l'adhésion de J. Herschel, de décider que désormais on ne prendra plus que dans un sens restreint et convenu entre savants un mot que la langue commune nous offre à chaque instant dans son acception générale; c'est là un décret illusoire qui dépasse de beaucoup la compétence comme la puissance des savants. L'autre critique dont est passible la proposition de Quételet, et que lui adresse J. Herschel, est de donner comme trait distinctif de la moyenne, dite arithmétique, une qualification que l'une et l'autre méritent également, car l'une et l'autre sont issues de considérations et d'opérations arithmétiques, afin d'obtenir, dans le premier cas, la mesure d'un des attributs typiques du groupe, et dans le second, un indice de variations; c'est pourquoi nous pensons qu'il vaut mieux tirer de ces significations différentes la caractéristique du langage.

médiane ou *probable*, nous dirons que la moyenne est déterminée par la considération du *poids* des valeurs enregistrées, c'est-à-dire par leur grandeur absolue multipliée par le nombre, tandis que la médiane ne tient compte que de leur grandeur relative, ou rang, et de leur nombre. Il résulte de là que, suivant les cas, la médiane est égale à la moyenne, ou plus grande ou plus petite que la moyenne : elle est plus grande, lorsque la fréquence relative des valeurs dépassant la moyenne l'emporte sur celles qui sont au-dessous de cette moyenne ; elle est au-dessous quand c'est l'inverse, mais ces deux valeurs tendent à l'égalité à mesure que la fréquence relative (ou probabilité) des deux groupes se rapproche. Les exemples ci-après éclairciront ce que ces définitions présenteraient de trop abstrait.

8. *Moyenne objective, ou donnant la valeur approchée d'une grandeur existante, et Sériation.* J'emprunterai un exemple à Quételet, qui lui-même l'a pris aux registres de l'Observatoire de Greenwich. Il s'agit, dans le cas spécial, de connaître avec la plus grande précision possible l'heure à laquelle une étoile passe au méridien (ascension droite). Or, 487 passages de la polaire ont été enregistrés ; et la somme de ces déterminations en temps, divisée par 487, a donné pour cette valeur, en heures, minutes, secondes et fractions de seconde, une moyenne que pour abrégér j'appellerai *m*. Voilà un premier résultat qui condense en un seul terme les 487 nombres enregistrés. Mais on va voir combien une étude plus fine de ces nombres va augmenter la solidité de cette moyenne. En effet, si on passe en revue les 487 relevés en les comparant à la valeur moyenne *m*, on constate que les uns donnent un temps plus long, les autres plus court que la moyenne, mais que les uns en diffèrent peu, les autres beaucoup. Si, pour concentrer la comparaison, on réunit ensemble et l'on considère comme égales les observations dont les différences ne dépassent pas un quart de seconde en plus ou en moins, on constatera qu'une seule observation a donné la différence maximum (en moins) de 3 secondes 1/2, ce que nous pourrons indiquer par l'expression [1 (*m*—3,5)]; que six autres observations diffèrent, de 3 secondes en moins [6 (*m*—3)], et une en plus [1 (*m*+3)]; que douze autres diffèrent en moins de 2 secondes 1/2 [12 (*m*—2,5)] et cinq en plus [5 (*m*+2,5)], ainsi de suite. On peut, en trois lignes, exprimer tous ces résultats :

Au-dessous	{ temps relevés . . .	(<i>m</i> —3,5)	(<i>m</i> —3)	(<i>m</i> —2,5)	(<i>m</i> —2)	(<i>m</i> —1,5)	(<i>m</i> —1)	(<i>m</i> —0,5)
de la moyenne,	{ nombre des observ.	1	6	12	21	36	61	73

Moyenne = *m* (à moins d'un quart de seconde près en plus ou en moins) 82 observations.

Au-dessus	{ temps relevés . . .	<i>m</i> +3,5	<i>m</i> +3	<i>m</i> +2,5	<i>m</i> +2	<i>m</i> +1,5	<i>m</i> +1	<i>m</i> +0,5
de la moyenne,	{ nombres observés .	0	1	5	16	36	63	73

Pour rendre la succession du nombre des observations plus nette et plus facile à étudier, je ramènerai leur nombre à 1000, et j'écrirai cette succession sur une seule ligne en mettant en gras le nombre des observations qui sont égales à la grandeur moyenne (à un quart de seconde près) :

2 — 12 — 25 — 43 — 74 — 126 — 150 — **168** — 148 — 129 — 78 — 33 — 10 — 2

Il est bien entendu que ces nombres se succèdent dans le même ordre que ceux qui précèdent et répondent aux valeurs de mêmes grandeurs ; que, par exemple, le groupe central **168**, correspondant à 82, montre que sur 1000 observations il y en aurait 168 dont la valeur se confondrait avec la valeur moyenne, à $\frac{1}{4}$ de seconde près en plus ou en moins ; les groupes à gauche (dont la somme est 432), ont les nombres des observations dont les valeurs sont au-dessous de la moyenne,

et les groupes à droite (leur somme=400), ceux dont les valeurs sont au-dessus. Cela convenu, on remarquera combien ces quatorze groupes d'observations sont inégaux par le nombre des relevés qu'ils renferment; mais vont régulièrement croissant, depuis les groupes extrêmes qui disent les nombres des observations dont les valeurs s'éloignent le plus de la valeur moyenne, et qui, sur 1000, n'ont fourni que 2 relevés, jusqu'au groupe central, 168, qui, comprend à lui seul plus du sixième des observations, au lieu du quatorzième, de sorte que, par la seule présence de ce plus grand groupe central, on peut dire à très-peu près quelle est la valeur moyenne que nous avons vu pourtant être déterminée par une toute autre méthode. En outre, on constatera que la somme des nombres d'observations dont les valeurs sont au-dessous de la valeur moyenne (=432) dépasse de peu la somme des observations (=400) ayant des valeurs supérieures à cette moyenne.

9. Enfin, on notera expressément que le nombre des observations du groupe comprenant les valeurs moyennes (168), ajouté au nombre qui le précède (150), et à celui qui le suit (148), font un ensemble de 466 observations sur 1000, dont les valeurs ne s'éloignent de la moyenne que d'une $\frac{1}{4}$ seconde en moins ou en plus.

Il suffirait donc d'emprunter 22 observations à chacun des groupes qui précèdent ou qui suivent (c'est-à-dire environ le sixième de leurs observations), pour avoir 500, c'est-à-dire la moitié de toutes ces observations considérées. Si, comme il s'en faut de peu, la somme de ces trois nombres centraux (150, 168, 148), égalait la moitié des relevés, on pourrait conclure que, sur 1000 observations, il y a autant de probabilité pour relever une valeur qui dépasse la moyenne de plus de $\frac{1}{4}$ seconde, que d'en trouver une qui en diffère moins; et comme au fond ces écarts doivent être considérés comme des erreurs de mesure, on conclurait avec raison que, dans ces observations, on a autant de chances de commettre une erreur plus grande qu'une erreur plus petite, d'une demi-seconde (en plus ou en moins). Cet écart, qu'on a autant de chances de dépasser que de ne pas atteindre, est ce qu'on appelle vulgairement *écart* ou erreur *probable*, ou avec Cournot, *écart médian*.

10. Cependant, dans l'exemple choisi, on voit que cet écart est en réalité un peu plus grand que $\frac{1}{4}$ seconde. Si, pour réunir la moitié des observations (ou 500) il fallait encore ajouter le groupe qui précède (126), et celui qui suit (129), et dont les valeurs s'écartent d'une seconde de la moyenne, on dirait donc que l'écart probable est d'une seconde; mais, comme en fait il ne faut ajouter qu'une fraction des observations de ces groupes pour faire 500, il est clair que l'erreur probable est plus grande que $\frac{1}{4}$ seconde et moindre qu'une seconde. Notre intention étant de traiter la partie mathématique quand nous parlerons de la PROBABILITÉ, nous montrerons alors la manière de déterminer cette erreur probable ou médiane avec plus de précision; ici, en fait, elle dépasse un peu 0^s,8, ce qui veut dire que, dans la moitié des observations, l'erreur n'atteindra pas huit dixièmes de seconde en plus ou en moins, et que, dans l'autre moitié, cette erreur sera dépassée (en plus ou en moins).

11. Nous avons dû nous arrêter avec quelques détails sur ce premier exemple, parce que nous avons d'abord à déterminer le sens du langage usité. Puis, — cet exemple n'est particulier que par l'objet auquel il s'applique, — la détermination du temps du passage d'une étoile au méridien dont nous ne nous sommes pas occupé; il est, au contraire, très-général par l'arrangement des nombres, sur lequel nous nous sommes arrêté. Cette symétrie si singulière des erreurs en plus ou en moins de chaque côté de la moyenne, ce fait si remarquable que le nombre

des relevés entachés d'erreur va diminuant avec une régularité parfaite à mesure que les erreurs commises vont croissant, tous ces faits, dis-je, ne sont pas particuliers à tel exemple, ils se retrouvent partout : tout mesurage suffisamment répété (plusieurs centaines de fois), et dont les résultats sont convenablement sériés en groupes, donne lieu à de pareils arrangements, d'autant plus réguliers que le nombre des mesures est plus grand.

12. Il n'y a qu'une exception à signaler à cette symétrie : c'est le cas où une cause constante, tenant, soit aux instruments employés, soit à l'observateur, tend à favoriser plus particulièrement les erreurs en plus, ou celles en moins. Je noterai tout de suite que telle serait l'influence d'une opinion préconçue ou d'un vif désir de trouver un résultat de préférence à un autre, désir qui pourrait avoir pour effet, même à l'insu de l'observateur, de faire éviter plus particulièrement les erreurs d'un côté de la moyenne, de lui faire forcer de préférence les chiffres qui en traduisent les grandeurs, etc.

« Ce qui est remarquable, dit J. Herschel, c'est que l'adresse avec laquelle les mesures sont prises n'a aucune importance en ce qui concerne cette loi de distribution. Une conséquence importante suit de là, c'est que des mesures grossières et sans art, de quelque genre que ce soit, dès qu'elles sont accumulées en nombres très-grands, peuvent conduire à des résultats moyens précis. Les seules conditions sont l'*animus mensurendi* continuuel, l'absence de toute idée préconçue, l'exactitude de l'échelle avec laquelle les mesures sont comparées et l'assurance que nous avons toutes les erreurs. » Ces paroles sont d'autant plus significatives, qu'elles sont, non-seulement d'un esprit éminemment philosophique, mais aussi d'un illustre astronome et, comme tel, difficile à satisfaire sans doute en ce qui touche la précision des mesures.

Ce qui est bien remarquable, dirai-je à mon tour, c'est de voir, ici comme dans beaucoup de cas, le préjugé plus funeste à la découverte de la vérité que l'ignorance elle-même!

Nous n'épuiserons pas les enseignements que nous pourrions tirer de cette sériation des nombres qui constituent la valeur moyenne. Mais nous croyons qu'il en ressort déjà que la valeur moyenne fournie par l'arithmétique gagne beaucoup de prix à être confirmée ainsi et appuyée par la sériation ci-dessus, qui montre les écarts possibles et probables autour de cette moyenne. C'est ce que vont mettre en évidence les exemples qui suivent.

D^r BERTILLON.

(La suite au prochain numéro.)