JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

BERTILLON

Détermination de la mortalité

Journal de la société statistique de Paris, tome 10 (1869), p. 29-40
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1869__10__29_0>

JOURNAL

DE LA

SOCIÉTÉ DE STATISTIQUE DE PARIS.

I.

Détermination de la mortalité.

Méthode pour calculer la mortalité d'une collectivité pendant son passage dans un milieu déterminé, que ce milieu soit la société elle-même, ou une prison, un asile, une école, un hospice, un hôpital.

I. La mortalité des divers groupes humains est le mètre le plus certain (en l'absence de la morbidité) qui puisse mesurer dans leur résultante les conditions si multiples, si complexes, qui font la salubrité des milieux. Il importe donc d'avoir une méthode, non-seulement précise, mais encore uniforme et commode pour déterminer cette mortalité. Jusqu'à présent il est bien loin d'en être ainsi; et la plus grande divergence règne entre les auteurs, suivant l'idée que chacun se fait de cette valeur. Je vais montrer un auteur fort recommandable, dont la statistique est la spécialité exclusive, et qui, se proposant de déterminer la mortalité qui a pesé sur des prisonniers, trouve que cette mortalité est de 22 p. 1,000 prisonniers *pendant la durée de leur incarcération,* tandis que je soutiens, et je prouverai qu'elle est de 78! Il importe donc extrêmement de sortir de cette anarchie, mais je dis qu'il n'est possible de le faire qu'en trouvant la vraie définition de la mortalité, définition qui doit, non-seulement convenir au sens que le langage vulgaire attache à cette expression, mais de plus déterminer ce sens avec la rigueur qu'exige le langage scientifique; alors on pourra sans doute saisir les rapports précis, mais inconscients, qui ont fait naître cette idée et en déduire les formules mathématiques qui la déterminent d'une manière générale.

Quelques-uns pensent, au contraire, que, pour sortir de la confusion, il suffirait d'une convention entre les statisticiens arrêtant que, parmi les différents rapports entre les décédés et les vivants déjà en usage, un serait décrété devoir être désormais la mortalité. Il n'en est pas ainsi; une seule chose s'impose dans la science, c'est la vérité. Or, il est évident que, pour un même milieu et un même instant, il ne saurait y avoir deux mortalités, il n'y en a qu'une; la question n'est donc pas de choisir entre plusieurs, mais de trouver quelle est cette vraie mortalité; c'est pourquoi nous croyons indispensable de remonter d'abord aux sources pures de la théorie, je veux dire débarrasser le problème des complexités qui, dans la pratique, troublent l'entendement et lui dérobent les rapports fondamentaux. Ensuite nous ajouterons *une à une* les conditions secondaires du problème et nous nous efforcerons de déterminer leur influence et comment elles doivent modifier la formule première.

II. *Définition de la mortalité.* — Quelle est donc l'idée simple, générale, cachée sous cette expression: *mortalité d'un groupe de vivants?* Ce n'est point, à coup sûr, le nombre isolé des vivants qui pourra être l'indice de cette mortalité, ce ne sera pas davantage le nombre absolu et isolé de décès, mais évidemment le résultat d'une comparaison, intuitive ou formulée, entre les deux termes: le groupe de vivants d'une part, et de l'autre le groupe des décédés issus de ces vivants et dont ils faisaient partie avant d'en avoir été séparés. La chance de mort pesait sur tous, et avec le temps, les eût tous atteints; mais, dans une durée convenablement limitée, un certain nombre seulement que, vu notre ignorance, nous pouvons dire choisis au hasard, ont été retranchés. Cette considération ramène la mortalité, prise dans un temps limité, à n'être qu'un cas particulier de la *probabilité mathématique.*

III. *La probabilité de mourir.* — Comme cette assimilation est très-importante, puisqu'elle nous permettra d'appliquer à notre problème les solutions du calcul des probabilités, je vais citer la définition de ce calcul d'après un des derniers et des meilleurs auteurs:

« Lorsqu'il s'agit de la production d'un ou de plusieurs événements (dans notre « cas, le décès d'un certain nombre d'individus) élus parmi un grand nombre qui « nous paraissent également possibles (tous les vivants sont également aptes à la « mort), ce qu'il nous importe de savoir, ce n'est ni le nombre total des chances (les « vivants: P), ni le nombre absolu des cas favorables à la production de l'événe- « ment (les décès: D), mais seulement le rapport du nombre des chances qui favo- « risent l'événement (D) au nombre total des chances (P), rapport $\left(\frac{D}{P}\right)$ qui reste le « même quand les deux termes varient proportionnellement. Il faut donc donner à « ce rapport un nom qui dispense d'en reproduire sans cesse la définition : on l'ap- « pelle *la probabilité mathématique*, ou simplement la *probabilité de l'événement.* » (Cournot, *Théorie des chances*, p. 24.)

Ainsi, la mortalité passée, présente ou à venir d'un groupe humain, c'est précisément la probabilité de mourir (passée, présente ou à venir) présentée par ce groupe. Mais remarquons expressément que, pour pouvoir faire cette assimilation de la mortalité, il faut qu'elle s'exerce dans un temps bien déterminé et brièvement limité; car, puisque la chance de mourir dans un temps quelconque est absolue, elle devient une *certitude* et ne saurait constituer un problème; et de plus, comme la chance de mourir augmente d'âge en âge, et par suite change à chaque instant, il devient nécessaire de considérer des périodes assez courtes de l'existence pour que l'on puisse, sans erreur notable, supposer la probabilité de mourir également, répartie pendant toute la durée de cette courte période.

Cela posé, rappelons seulement que l'on estime la *probabilité* de la production d'un événement en divisant le nombre des chances favorables à sa production par le nombre total des chances favorables et adverses : ainsi, étant donné qu'il y a douze figures dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer une figure dans le jeu est de $\frac{12}{32}$, puisqu'il y a 12 chances favorables pour 32 chances totales; mais si, ayant tiré une première figure et l'ayant retranchée du jeu, je voulais faire un second tirage dans ce jeu incomplet, évidemment la probabilité de la venue d'une seconde figure ne serait plus la même, mais, d'après la règle formulée, elle ne serait plus que de $\frac{11}{31}$; enfin si, par hypothèse, les deux premiers tirages avaient donné des figures,

et que l'on essayât un troisième tirage, la probabilité de la venue d'une figure pour ce troisième tirage *pris isolément*, ne serait plus que de $\frac{10}{30}$.

IV. *Mortalité d'un groupe théorique.* — Mais quittons l'image et revenons à l'homme. Si dans un groupe *initial* de 1,000 vivants, observé pendant la durée de l'unité de temps adoptée, soit l'année, il se produit *un à un*, dans le cours de cette durée, un total de 200 décès, dira-t-on que la probabilité de mourir a été de $\frac{200}{1,000}$? Je ne le crois pas, car cela ferait présumer que, au moment de leur production, chacun des 200 événements avait la même chance de production, et c'est ce qui n'était pas. En effet, dès le commencement de la durée, lors de la production du premier décès, celui de Paul, par exemple, ce décès particulier n'avait qu'une chance de se produire sur 1,000 chances totales,[1] et la mesure de la probabilité de ce premier événement en ce premier instant est bien de $\frac{1}{1,000}$; mais il ne reste plus alors que 999 vivants, et lorsque, dans un second instant[1], un autre décès s'est produit, celui de Pierre, par exemple, sa probabilité était évidemment de $\frac{1}{999}$; de même le décès suivant du troisième instant avait une probabilité de $\frac{1}{998}$; ainsi de suite jusqu'à $\frac{1}{802}$, $\frac{1}{801}$, et lors de ce dernier décès, la probabilité de mourir l'instant suivant sera de $\frac{1}{800}$.

Mais le problème que pose la démographie n'est pas de savoir la probabilité de mort de chacun de ces instants de la durée qu'il faut pour produire un décès, car ces probabilités à dénominateurs inégaux et survenues dans des temps sans doute inégaux se prêteraient malaisément à la comparaison; en outre, leur trop grand nombre éparpillerait l'attention. Il faut la concentrer en réunissant les instants dont les durées et les probabilités respectives sont assez voisines et assez près de l'identité pour que l'on puisse, sans trop d'efforts, considérer leur *somme et leur moyenne* comme applicables à tous les instants de ce groupe. C'est précisément ce que l'on fait en prolongeant l'observation d'un même groupe pendant une succession d'instants dont la somme est appelée unité de temps, ordinairement l'année, comme dans l'exemple ci-dessus, pendant laquelle les chances de mort ont été successivement: $\frac{1}{1,000}$, $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{998}$, ... $\frac{1}{801}$, $\frac{1}{800}$, et ont fini par produire 200 décès dans l'année. Quelle sera alors la probabilité de mort pour toute l'année? La théorie mathématique l'enseigne: Ainsi dans notre exemple, où se rencontrent 200 cas favorables, mais dont les chances sont inégales pour chacun, la probabilité générale sera égale à la somme de la possibilité de chaque cas; or, ces possibilités forment la succession suivante: $\frac{1}{1,000}$, $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{998}$, ... $\frac{1}{801}$, $\frac{1}{800}$ dont il faudrait additionner tous les termes. Mais dans la pratique, il importe extrêmement d'éviter de pareils calculs; il

1. Ces instants mesurés, non par le temps écoulé, mais par celui nécessaire à la production d'un décès, seront très-probablement inégaux entre eux; ils le seront très-certainement s'il s'agit de la première année de la vie, puisque les rapports successifs qui expriment la mortalité de chaque enfant $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{998}$, $\frac{1}{997}$, etc., vont toujours en augmentant, tandis que la mortalité dans le même temps va en diminuant.

faut absolument, par un moyen facile, obtenir une approximation suffisante de cette somme; il est évident que cette somme sera plus grande que 200 fois $\frac{1}{1,000}$, qu'elle sera moindre que 200 fois $\frac{1}{800}$; mais qu'elle sera donc à très-peu près égale à 200 fois la fraction qui occupe le milieu de la succession précédente commençant par $\frac{1}{1,000}$ et finissant par $\frac{1}{800}$, c'est-à-dire à $200 \times \frac{1}{900}$.

L'erreur commise par cette approximation, dans laquelle on assimile la succession $\frac{1}{1,000}, \frac{1}{999}, \frac{1}{998}$ à une progression arithmétique, sera, en effet, très-petite et tout à fait négligeable en ces matières[1]; $\frac{200}{900}$ peut donc être regardé comme la somme des probabilités successives de mourir dans la somme des instants successifs, c'est-à-dire dans l'année. Toutefois, pour ne pas confondre cette valeur approchée de la probabilité mathématique de mort, on est convenu de l'appeler *mortalité*. Voilà déjà un premier point d'acquis, et résolu contrairement à la pratique de ceux qui, dans ce cas, disent que la mortalité est de $\frac{200}{1,000}$.

Formulons en une expression générale cette approximation de la probabilité: Soit **A**, une collectivité vivante au début de l'observation; à la fin de l'unité de temps elle aura fourni **D** décès; il ne restera plus alors que **A — D**, soit **Z**, encore vivants et au moment où ils sortent du champ de l'observation. D'après ce que nous venons de voir plus haut, la mortalité moyenne pendant l'unité de temps sera donc [1] $\frac{D}{\frac{1}{2}(A+Z)}$. Je ne prétends point qu'il faille repousser toujours le rapport $\frac{D}{A}$, le seul souvent qu'on puisse fournir sans *hypothèse;* mais je dis qu'il ne faut pas lui donner le même nom qu'au rapport $\frac{D}{\frac{1}{2}(A+Z)}$, et comme celui-ci, qui ne diffère que fort peu de la probabilité mathématique, s'appelle légitimement *mortalité,* j'ai proposé ailleurs de nommer *dîme mortuaire* cet autre rapport $\frac{D}{A}$ (2)

1. Signalons, à ce sujet, une confusion qui se fait trop souvent en démographie entre les conditions de la théorie et de la pratique : en théorie la signification rigoureuse, la détermination précise et mathématique des rapports, des termes et des formules employés est fondamentale, et ne saurait admettre aucun *à peu près,* sous peine d'entraîner aux conséquences les plus erronées. Mais une fois la théorie solidement établie, les conditions dans lesquelles les formules s'appliquent fixées, il n'importe guère moins, dans la pratique des calculs, d'écarter presque absolument les chiffrages trop laborieux et surtout d'éviter une vaine minutie que le peu de précision des données rendrait tout à fait illusoire. En démographie, les nombres ronds sont les meilleurs, parce que les données dont on part, peuvent rarement prétendre à plus de précision.

2. M. W. Farr a, comme nous, soigneusement distingué ces deux rapports, expressions approchées de la *probabilité mathématique;* comme nous il appelle le premier *mortalité,* mais il appelle le second $\left(\frac{D}{A}\right)$ *probabilité de mourir.* Ce serait, en effet, la probabilité mathématique, si l'on fait abstraction de la durée de l'unité de temps durant laquelle s'échelonnent les décès, et par suite, pendant laquelle la probabilité de mourir change à chaque instant (surtout aux âges extrêmes de la vie, et particulièrement dans la première année d'âge). Si donc, renonçant à avoir la probabilité *moyenne approchée* de ce temps (mortalité), on prenait pour mesure la probabilité du premier décès (on pourrait aussi bien prendre celle du dernier) multipliée par le nombre des décès survenus dans l'année (unité de temps beaucoup trop longue, mais le plus souvent imposée par les données). On aura, en effet, le rapport $\frac{D}{A}$; mais alors l'identité de cette valeur avec la probabilité mathématique ne

Cependant, cette formule $\frac{D}{(A+Z)^{1/2}}$ de la mortalité peut se mettre sous une autre forme dont nous nous servirons plus tard; en effet, $Z = A - D$; substituant à Z sa valeur, il vient [illegible] [2].

Il est vrai que l'hypothèse où nous sommes placé se réalise peu dans la pratique; il est rare que l'on puisse suivre un même groupe pendant l'unité de temps, sans que beaucoup n'échappent à l'observation avant la fin de sa durée, tandis que des nouveaux venus viennent incessamment se mêler au groupe observé. C'est ce qui arrive dans une population, quand on étudie soit ses groupes d'âge, soit ses groupes professionnels, etc.; c'est ce qui arrive encore dans les prisons et dans les hôpitaux, etc. Il faut donc étudier l'influence que peut avoir sur notre formule *cet écoulement incessant des vivants.*

V. *Mortalité de la population ordinaire.* — Supposons d'abord que nous voulions observer et déterminer les conditions de la mortalité chez un groupe de la population ordinaire, par exemple, pour le groupe compris entre la 20e et la 21e année de la vie de nos jeunes hommes. Je suppose que nous étendions notre enquête pendant 365 jours, depuis le 1er janvier jusqu'au 31 décembre de la même année. Il est clair qu'au 1er janvier le groupe que nous étudions, tel que le census ou le contingent militaire nous permettent de le connaître, ne nous offre pas que des jeunes gens de 20 ans précis; ils sont échelonnés de 20 à 21 ans. Considérons d'abord le premier sous-groupe qui a justement 20 ans accomplis le 1er janvier, et dont la 21e année d'âge commence avec l'année d'observation, soit a leur nombre; nous les suivrons pendant les 365 jours de l'année en enregistrant leurs décès, soit d ces décès, pendant tout le cours de l'année jusqu'à la fin du 31 décembre; le nombre de ce sous-groupe qui arrivera à la fin de leur 21e année sera nécessairement $a - d$, soit z ce nombre. En vertu de la formule précédemment posée $\frac{d}{(a+z)^{1/2}}$ sera la mortalité moyenne de cette première couche.

De même, et dès le début de l'observation, un autre sous-groupe (je dirai mieux, une seconde *couche*) sera composé de ceux qui ont précisément 20 ans et 1 jour; une troisième couche, de ceux qui ont 20 ans et 2 jours; une quatrième, 20 ans et 3 jours; ainsi de suite; et enfin une dernière comprendra ceux qui ont 20 ans 364 jours. Je dois admettre, *qu'en moyenne,* ces couches, qui composent la population de 20 à 21 ans, eussent été égales entre elles (et chacune égale a), si on eût considéré chacune au début de leur entrée dans la 21e année d'âge; mais, en fait, et parce que l'observation ne commence pas au début de cet âge, mais au début de l'année, la seconde couche, ayant 20 ans et 1 jour, a déjà dû être atténuée des décès de la première journée, soit de $\frac{d}{365}$, de sorte que le nombre de ses vivants,

---

saurait être admise un instant (même à titre d'approximation) pour la première année de la vie, et pourtant c'est surtout à cet âge que, le chiffre des naissances (= A dans notre formule) étant le seul parfaitement connu, ce rapport $\frac{D}{A}$ se présente de lui-même; c'est pourquoi, comme ce rapport ne peut prétendre à être la *probabilité,* qu'il n'est pas davantage la *mortalité,* nous avons proposé la dénomination spéciale de *dîme mortuaire.* Par cette dénomination toute confusion dans les termes est évitée, la *mortalité* et la *dîme mortuaire* restent deux degrés différents, mais chacun parfaitement déterminé, d'approximation de la probabilité mathématique, probabilité que les conditions des problèmes donnés aux statisticiens leur permettent rarement de déterminer.

au début de l'année d'observation, se trouve donc réduit à $a - \frac{d}{365}$; de même la troisième couche, âgée de 20 ans et 2 jours, entrera dans l'année d'observation en un nombre $a - \frac{2d}{365}$; la quatrième couche, âgée de 20 ans et 3 jours, sera au nombre de $a - \frac{3d}{365}$; ainsi de suite jusqu'à la dernière, qui sera au nombre de $a - \frac{365\,d}{365}$. Cela posé, suivons une quelconque de ces couches pendant l'année d'observation, soit, par exemple, la seconde couche, dont les individus sont au nombre de $a - \frac{d}{365}$ au début de l'année. Il ne nous sera donné de poursuivre l'enquête sur cette seconde couche que pendant 364 jours et jusqu'au 30 décembre, car, à cette date, elle aura 21 ans révolus et sera réduite à $a - \frac{365\,d}{365} = z$ sortants. Nous n'aurons donc les décès de cette seconde couche que durant 364 jours, les décès du premier jour de leur 21e année qui nous manquent, ayant eu lieu avant la mise en observation, appartiennent à l'année précédente, tandis que ceux du dernier jour de l'année observée, s'appliquant à des sujets de plus de 21 ans, seront portés dans le groupe de décès de 21 à 22 ans; mais, à cause de la régulière succession des vivants, précisément en ce jour (30 décembre) où cette seconde couche aura terminé sa 21e année, un nombre a de nouveaux venus la commenceront et passeront le premier jour de leur 21e année dans le dernier jour de l'année observée; ils y fourniront $\frac{d}{365}$ décès, c'est-à-dire, précisément ces décès du premier jour de la 21e année dont la deuxième couche, entrée en observation à 20 ans et 1 jour, avait frustré l'enquête. *C'est ainsi que la deuxième couche sera aussi complète que la première.* Il en sera de même de toutes les autres entrées en nombre a, sorties en nombre z et ayant fourni d décès. Ainsi la dernière qui, au début de l'observation, est âgée de 20 ans et 364 jours, et dont le nombre est réduit à $a - \frac{364\,d}{365}$, ne sera observée qu'un seul jour et ne fournira que les décès du dernier jour de sa 20e année; dès le 2 janvier, ce sous-groupe, âgé de 21 ans révolus, échappe à l'enquête en nombre $a - \frac{365\,d}{365} = z$, mais ce même jour, un nombre a de nouveaux venus ayant accompli leur 20e année entrent dans l'observation, et leurs décès vont être enregistrés pendant les 364 jours qui restent à courir de l'année d'observation; ainsi cette *dernière couche* aura fourni *son contingent* de décès *aussi complet que la première*, que la seconde, que toutes les autres, de sorte que, en définitive, le total des décès D enregistrés dans tout le cours de l'année est la somme complète des d partiels que nous avons considérés, de même aussi la somme des entrées $a + a + a + \ldots\ldots = A$ et celle des sorties $z + z + \ldots\ldots = Z$, comme si chaque couche était entrée complète en nombre a et sortie en nombre z, puisque, en effet, chaque couche âgée de plus de 20 ans a été précisément complétée le jour même où, ces 21 ans étant accomplis, elle sortait du champ de l'observation, par ceux qui le même jour dépassant leur 20e année y entraient. Nous savons donc, avec une entière exactitude, ce que représentent les D de chaque année livrés par les registres de l'état civil; nous savons que ce nombre de décès est précisément ce qu'il serait si on eût suivi une même collectivité complète depuis le premier instant de la 20e année en nombre A jusqu'à 21 ans révolus en nombre Z. Or, d'après nos solutions précédentes (page 32),

la mortalité de cette collectivité sera donnée par la formule [1] $\frac{D}{(A+Z)\,{}^1/_2}$, ou son autre forme [2] $\frac{D}{A-{}^1/_2 D}$.

Donnons à ce raisonnement une forme un peu plus mathématique; nous dirons: les documents statistiques, soit les census, soit les contingents militaires, ne donnent jamais précisément ni **A** ni **Z**, c'est-à-dire le nombre de ceux qui, dans le cours d'une année, arrivent successivement à avoir 20 ans révolus (**A**), ou 21 ans révolus (**Z**); ils donnent le nombre des vivants existant un jour *quelconque* et compris entre un âge et un autre, par exemple, la somme de ceux qui sont échelonnés depuis 20 ans révolus jusqu'à 21 ans. Or, nous avons vu (p. 34) que cette somme se compose:

1° De **a**, ceux qui ont précisément 20 ans le jour du dénombrement;

2° De $a - \frac{d}{365}$, ceux qui ont 20 ans 1 jour le jour du dénombrement;

3° De $a - \frac{2d}{365}$, ceux qui ont 20 ans 2 jours le jour du dénombrement;

4° De $a - \frac{3d}{365}$, ceux qui ont 20 ans 3 jours le jour du dénombrement;

. . . . . .

Enfin, de $a - \frac{364d}{365}$, ceux qui ont 20 ans 364 jours le jour du dénombrement;

Et de $a - d$, qui commence l'âge suivant.

Or, cette série est une progression arithmétique régressive; donc rien de plus facile par l'application des règles de l'arithmétique que d'en trouver la somme égale à $365\,a - \frac{365\,d}{2}$; mais 365 **a**, c'est justement tous ceux qui ont commencé leur 21e année dans l'année observée ou **A**; de même 365 **d**, c'est le total des décès dans tout le cours de l'année ou **D**; ainsi la population recensée **P** en un jour quelconque de l'année peut être représentée par la formule $A - {}^1/_2\,D$. Or, cette valeur est précisément le dénominateur de l'expression [2] qui donne la *mortalité* $\frac{D}{A-{}^1/_2 D}$.

Il résulte de là que l'on obtiendra aussi précisément la mortalité de tout groupe de l'âge $(_n)$ à l'âge $(_{n+1})$ en divisant les décès annuels compris dans ce groupe $D_{n..n+1}$ par la population du même âge $P_{n..n+1}$ et telle que la donne le dénombrement effectué un jour *quelconque* de l'année. On aura ainsi la troisième formule *fondamentale* $\frac{D_{n..n+1}}{P_{n..n+1}}$ [3] dont l'usage est en pratique la plus fréquente et l'une des plus connues. Cependant beaucoup s'en servent sans avoir déterminé au préalable, comme nous l'avons fait ici, les conditions rigoureuses qui font son exactitude, c'est pourquoi, l'appliquant à tort et à travers dans des circonstances où elle ne saurait l'être, ils en tirent les résultats les plus erronés, et comme c'est justement contre ces interprétations vicieuses qu'est rédigé ce travail, nous croyons devoir discuter *les conditions fondamentales* de cette formule.

On vient de voir que cette formule est née de l'égalité $P = A - {}^1/_2\,D$, ou, plus précisément en notant l'âge: $P_{n..n+1} = A_n - {}^1/_2\,D_{n..n+1}$ [4]; c'est cette égalité qui a permis de substituer le terme **P** à la valeur $A - {}^1/_2\,D$; cette égalité est donc la condition de la formule *fondamentale* [3] si usitée. Voyons les principales cir-

constances qui, dans la pratique, sont destructives de cette égalité [4] et par suite dans lesquelles la formule [3] n'est pas applicable.

VI. *Les conditions nécessaires à l'égalité fondamentale* [4] $P = A - \frac{1}{2} D$.

1. *La première condition*, et la seule qui puisse manquer quand on considère une population libre, c'est celle qui suppose la mortalité également répartie dans tous les instants du temps ($_n$) au temps ($_{n+1}$), ou durée que les individus du groupe étudié mettent à traverser le milieu assigné (soit à passer d'un âge à un autre, soit à séjourner dans un lieu déterminé), c'est, en effet, cette hypothèse de l'intensité égale de la mortalité qui a permis que les successions décroissantes des vivants et croissantes des décès qui s'y constituent forment à très-peu près des progressions arithmétiques et, par suite, a rendu possible de poser la formule $P = A - \frac{1}{2} D$[1].

C'est encore cette supposition qui permet (la mortalité pendant le temps ($_{n..n+1}$) étant déterminée) de dire la mortalité d'une fraction quelconque de ce temps. (Voyez la note ci-dessous.) Il est évident, cependant, qu'en toute rigueur, cette constance de la mortalité n'existe pas; puisqu'elle varie si profondément de 0 à 13, et de 13 à 100 ans, elle ne peut être rigoureusement égale à elle-même deux instants de suite. Mais ces différences de chaque instant, de chaque jour, et même, au milieu de la vie, de chaque année, sont trop petites pour qu'il y ait aucune utilité à essayer d'en tenir compte. Il s'agit donc seulement de choisir des unités de temps embrassant une durée assez resserrée pour que, pendant son cours, on puisse, sans erreur notable, supposer cette égalité d'intensité. Il ne faut ici ni minutie, ni trop de facilité. C'est le degré de précision des documents eux-mêmes qui doit déterminer celui qu'il convient d'apporter dans les calculs auxquels on les soumet. Il est évident qu'il serait puéril de compliquer les calculs pour arriver à une précision que les données numériques elles-mêmes ne comportent pas. Or, dans la pratique, on peut le plus souvent prendre l'unité de temps assez courte pour que cette égalité de mortalité pendant sa durée puisse être admise[2].

1. On pourrait remarquer ici (et ce n'est pas sans application pour les hôpitaux) que les formules [1], [2], [3] et [4] n'exigent pas que la mortalité soit d'égale intensité dans toute la durée de la période, prise comme unité de temps, elle pourrait croître jusqu'au milieu de cette période, puis décroître et redevenir au dernier instant ce qu'elle était au premier; tel est le cas de ceux atteints d'une maladie aiguë, dont le danger de mort croît et décroît très-vite. Nous pensons que le lecteur comprendra aisément, et par une simple indication, que nos formules ne seraient pas atteintes par ce mouvement *intérieur;* en effet, si, pour les établir, nous avons supposé une progression, cette hypothèse n'a été employée que pour pouvoir faire la somme de la progression, d'après son premier terme, le dernier et le nombre des termes; or, si ce premier et dernier terme et le nombre des termes ne sont pas modifiés par ces mouvements ou déplacements intérieurs des unités, la somme ou la formule ne le sera pas non plus, et comme la mortalité ainsi calculée s'applique à toute la durée du séjour, sans hypothèse d'une égale distribution dans tous les instants de ce séjour, elle restera rigoureusement vraie malgré l'augmentation et le déclin constatés. Mais je ferai de suite expressément remarquer qu'il n'en serait pas de même si, d'après cette mortalité d'ensemble et portant sur le séjour entier, on voulait calculer, par simple division des chances, la mortalité d'une fraction quelconque de séjour, d'une journée par exemple; il est clair que cette division suppose que la mortalité agisse également pendant chacune des fractions de cette durée, et c'est le contraire qui se rencontre dans les hôpitaux.

2. Remarquons d'ailleurs que l'approximation qu'il convient d'employer ici, et dont on s'est saisi pour arguer contre la statistique, n'a rien qui lui soit propre; cette approximation est commune à toutes les sciences appliquées. C'est pour en diminuer le vague que l'on a si heureusement substitué le nombre au mot, et ce nombre lui-même est le résultat d'une approximation; car dans la nature il n'y a jamais deux choses égales, et la moindre addition qui les suppose telles, ne peut fournir

La première année de la vie fait seule exception à cause des mouvements si rapidement décroissants de sa mortalité; il faudrait ici avoir les éléments par jour pour la première quinzaine, par semaine pour le mois suivant, et par mois jusqu'à la fin de la première année. Nous dirons une autre fois par quelle correction on peut, jusqu'à un certain point, remplacer ces données qui manquent le plus souvent.

2. *La seconde condition* de l'égalité $P_{n..n+1} = A_n - \frac{D_{n..n+1}}{2}$, c'est que *l'unité de temps pendant laquelle on veut déterminer le danger de mort soit précisément égale* A LA DURÉE DU SÉJOUR *des entrées* A *dans le milieu étudié*, ou (s'il s'agit de groupes d'âges) cette unité doit être l'intervalle compris entre $(_n)$ et $(_{n+1})$. Ainsi, si l'on veut déterminer le danger de mort qui menace les jeunes hommes de 20 à 25 ans, on doit déterminer ce danger pour la période quinquennale entière. On peut, il est vrai, et d'après la note (p. 32), c'est-à-dire, *si on suppose la mortalité également répartie*, dans le cours de l'unité de temps, en déduire par simple division le danger annuel, mensuel ou quotidien.

Cette deuxième condition résulte de la *simultanéité* des progressions des vivants et des décédés, bases de nos formules : a; $a - \frac{d}{365}$, $a - \frac{2d}{365}$, $a - \frac{3d}{365}$, etc., dont A, D sont les sommes; les décès de chaque jour sont issus des entrées suivies jour par jour jusqu'à leur sortie du groupe inclusivement; vivants et décès que fournissent ces vivants, sont donc deux successions nécessairement liées l'une à l'autre, l'une ne saurait se continuer sans l'autre. L'oubli de cette considération dans les populations cloîtrées a donné lieu à de si fréquentes et si grosses erreurs, qu'il convient d'en éclairer l'importance par quelques exemples.

Fournissons d'abord un exemple où l'erreur soit si manifeste qu'elle révolte le bon sens. Supposons une maison d'enfants trouvés où les nouveau-nés ne font en moyenne qu'un séjour d'un mois. La maison est toujours pleine et renferme 1,000 enfants; or, il arrive communément qu'une telle population fournit 100 décès par mois, soit par an 1,200 décès; mais la population constante étant de 1,000 enfants, la mortalité *annuelle* serait donc $\frac{1,200}{1,000}$, ce qui est absurde.

La vérité est que, la durée moyenne du séjour étant un mois, la mortalité est de $\frac{100}{1,000}$ pour le premier mois d'observation, et on n'a pas le droit d'en tirer la mortalité pour 12 mois, car ce n'est pas *la même* succession des vivants qui fournit la succession des 1,200 décès enregistrés dans l'année; tandis que la constitution de la formule [3] suppose cette continuité des uns et des autres. Il en serait de même si, relevant pendant 50 ans les décès des groupes successifs de 1,000 jeunes gens de 20 à 25 ans de la population libre, et ayant relevé 1,100 décès, on en concluait que la mortalité semi-séculaire de 20 à 25 ans est de $\frac{1,100}{1,000}$, cela n'aurait pas de sens. Dans tel asile provisoire de vieillards et de malingreux, qui renferme journellement 100 individus, il peut également arriver 2, 5, 10 décès par mois, c'est-à-dire 24, 60, ou 120 décès par année. Dira-t-on que la mortalité annuelle dans

qu'une somme approchée. L'important est de savoir l'étendue de l'erreur possible et de trouver la méthode qui, sans beaucoup surcharger l'exécution, arrive à resserrer le plus possible l'approximation; c'est précisément l'objet de la statistique qui substitue ses déterminations méthodiques et uniformes aux appréciations arbitraires et inégales de chacun.

cet asile est de 24, de 60 et de 120 p. 100? Ce dernier rapport montre par son absurdité que les autres ne sont pas moins erronés, et tous pèchent par l'oubli du même principe, celui précisé par la deuxième condition, savoir: que *l'unité de temps pendant laquelle on calcule la mortalité, ne doit pas dépasser le temps que la collectivité vivante séjourne dans le milieu étudié.* Cependant il ne faut pas confondre la durée de cette unité de temps avec celle de l'enquête elle-même, car celle-ci doit, au contraire, se prolonger pendant plusieurs unités de temps pour obtenir une valeur moyenne. Mais alors on divise les décès relevés par le nombre d'unités de temps pendant lesquelles on a observé; ou bien encore, conservant le nombre entier des décès relevés, on prend la population autant de fois qu'il y a eu d'unités de temps, puisque, pendant chaque unité de temps, la population a traversé à nouveau le milieu observé, et on obtient la mortalité pendant l'unité de temps ou pendant le séjour; c'est précisément ce que l'on fait quand, pour apprécier la mortalité d'un hôpital, on divise les décès relevés dans l'année par la somme des entrées (E) dans tout le cours de l'année, et nous prouverons que, pour ce cas, la formule $\frac{D}{E}$ est excellente, ou laisse très-peu à désirer, et que les critiques que l'on en a faites sont malheureuses[1]. Les deux conditions suivantes feront pénétrer dans la raison intime qui rend obligatoire cette seconde condition.

3. *Troisième condition.* — Malgré la condition précédente, nous avons vu (p. 33), en étudiant comment, dans la population libre, les vivants se succèdent et s'écoulent en traversant un groupe d'âges (de 20 à 21 ans dans l'exemple donné), nous avons vu, dis-je, que ce n'est pas toujours le même individu qui séjourne dans le groupe pendant toute la durée de l'unité de temps; que, par exemple, celui qui, au 1er janvier, a 20 ans et 7 mois ne séjourne que 5 mois dans le groupe de ceux âgés de 20 à 21 ans dont on relève les décès annuels, mais le jour même de sa sortie il se trouve remplacé, à cause de l'écoulement naturel des vivants, par un autre qui vient d'accomplir ses 20 ans, et qui, restant jusqu'au 31 décembre, c'est-à-dire 7 mois dans le groupe étudié, complète rigoureusement ce qui manquait à celui qui en est sorti. Cette condition que celui qui sort avant la fin soit remplacé immédiatement par une entrée qui *le continue, le complète*, en offrant *normalement* (*ou en moyenne*) les mêmes chances que le sortant, cette condition, dis-je, est indispensable; sans elle, nos formules établies avec l'hypothèse de cette succession, deviennent fausses, et ce point de théorie a échappé à beaucoup d'auteurs. Cependant deux cas peuvent se présenter:

1° L'individu quittant le groupe n'est pas remplacé.... ou ne l'est que tardivement;

2° Ou il est remplacé par un individu *dissemblable* et qui, n'offrant plus les mêmes conditions, ne peut être regardé comme le continuant.

Examinons ces deux cas:

1° *L'individu qui quitte le groupe n'est pas remplacé.* Je dis que ce rem-

1. Nous verrons que cette critique est fondée sur la prétendue nécessité d'ajouter à ces entrées le nombre A de ceux qui occupent l'hôpital au début de l'observation, assertion erronée à plusieurs titres et notamment parce que, dans un hôpital toujours à très-peu près plein, si, au commencement de l'année, un nombre d'individus A, *à demi traités*, occupant l'hôpital, ajoutent leur influence, un même nombre, *compris* implicitement dans les entrées de l'année (E), échappent *à demi guéris* à l'observation le 31 décembre, de sorte qu'il y a rigoureusement compensation avec ceux que l'on a trouvés le 1er janvier.

placement est une condition de l'exactitude de notre formule fondamentale [4] $P_{n..n+1} = A - \frac{1}{2} D$; si, en effet, des individus qui au début ont compté parmi les vivants du groupe étudié et, par conséquent, sont compris dans **A**, en sortent vivants dans le cours de l'année sans laisser de trace ni parmi les vivants ni parmi les décédés, il est clair que le census, fait à un jour quelconque de l'année, ne les retrouvera pas; ils ne seront pas compris dans **P**, tandis que l'expression $A - \frac{1}{2} D$ les contient; ainsi, au lieu de l'égalité fondamentale [4], le census donnera l'inégalité $P < A - \frac{1}{2} D$. D'ailleurs on comprend de reste que ces entrées, qui n'ont fait dans le milieu qu'une *fraction de séjour*, n'auront épuisé qu'une fraction de chance de mort et ne peuvent légitimement être assimilées à ceux qui les ont épuisées toutes. Cependant, si on connaît le nombre de ces sorties, supposées régulièrement distribuées (comme on suppose les **D**), il sera facile d'introduire une correction qui rétablisse l'égalité [4]. En effet, soit σ le nombre de ces sorties non remplacées, on peut, par leur influence décroissante sur la population **P**, les assimiler rigoureusement à des décès survenus pendant le cours de l'unité de temps, et alors on aura évidemment $P = A - \frac{1}{2}(D + \sigma)$, et par suite la mortalité aurait pour formule $\frac{D}{A - \frac{1}{2}(D + \sigma)}$.

2° Le second cas est celui où l'individu sortant a pour successeur un nouveau qui se trouve *normalement* dans des conditions différentes, alors il est clair que le sortant n'est pas continué, mais recommencé; c'est une nouvelle entrée à enregistrer. C'est le cas que présentent notamment les hôpitaux; le sortant, ayant d'ordinaire subi les chances les plus mauvaises de sa maladie, ne quitte l'hospice que dans sa convalescence, il ne saurait donc être regardé comme continué par un nouveau venu qui a ces chances à courir. Celui-ci doit être considéré *comme une entrée nouvelle* et le sortant comme ayant accompli son séjour dans le milieu. Nous verrons plus loin comment on fait droit à ces conditions dans le calcul de la mortalité dans les hôpitaux; examinons maintenant la dernière exigence de la formule fondamentale [4].

4. *La quatrième condition.* — Elle est, pour ainsi dire, le corollaire de la condition précédente et consiste en ce qu'une sortie par décès du groupe étudié ne saurait être remplacée par un vivant, car il est clair que celui-ci *recommence* les chances épuisées par celui-là.

On comprend, en effet, que, si on admettait qu'un vivant peut remplacer et continuer un mort, ce nouveau venu pouvant mourir lui-même pendant le temps de l'observation (et mourant nécessairement de temps à autre), on aurait alors, pour une entrée, deux décédés, ce qui est absurde, et, en réfléchissant, on se convaincra que c'est cette absurdité qui s'est manifestée dans les exemples que nous avons donnés à l'appui de la deuxième condition qui pourrait être déduite de celle-ci. D'ailleurs, toute l'économie de nos formules s'appuie sur cette atténuation incessante des vivants par leurs décès successifs, atténuation qui fait que la population libre va en s'épuisant du premier âge au dernier; c'est cette atténuation qui est représentée par la succession a, $a - \frac{d}{365}$, $a - \frac{2d}{365}$, $a - \frac{3d}{365}$, ... $a - \frac{364d}{365}$...., base de nos formules. Or, ce cas du remplacement immédiat d'un décès par un vivant est précisément celui qui se présente presque constamment dans les collectivités *cloîtrées:* hôpitaux, hospices, maisons d'arrêt, où les vides laissés par les décédés sont de suite comblés par les nouveaux arrivants; c'est la différence la plus radicale qui sépare

ces agglomérations artificielles de la population libre, et c'est pourquoi les mêmes formules pour déterminer la mortalité ne peuvent être appliquées. — Mais il n'est pas bien difficile d'introduire des corrections qui rendent de nouveau nos formules applicables. En effet, A représentant toujours le nombre de ceux existant dans l'asile au début de l'enquête, on conçoit que dans le cas maintenant supposé, où les décès successifs, immédiatement remplacés, n'affaiblissent plus les rangs des vivants, le nombre de ceux-ci (P) sera supérieur à l'expression $A - \frac{1}{2} D$ qui suppose cette atténuation à chaque décès. Si on sait combien de décès ont été *immédiatement* remplacés par un vivant, soit δ ce nombre, comme ces décès n'ont pas contribué à affaiblir le nombre des vivants, ils sont à ce point de vue comme s'ils ne se fussent pas produits; l'expression de la population ci-dessus deviendra donc $A - \frac{1}{2}(D - \delta)$, et par suite la mortalité de ce groupe sera $\frac{D}{A - \frac{1}{2}(D - \delta)}$.

Mais si, comme il arrive le plus souvent, tous les décès sont immédiatement remplacés, alors $\delta = D$ et la valeur évaluatrice de la population deviendra simplement A, c'est-à-dire, que l'on aura $P = A$; la mortalité aura donc pour formule $\frac{D}{A}$ [5]. Cette formule [5] sera donc celle qui sera applicable à toutes ces populations cloîtrées (hospices, maisons d'arrêt, etc.) toutes les fois que ces maisons resteront à peu près constamment pleines, ce qui est le cas ordinaire; mais alors il y aura lieu de ne pas perdre de vue la deuxième condition, c'est-à-dire que *la mortalité ne doit être calculée que pour la durée moyenne du séjour dans le milieu.* C'est cette durée, ce séjour qui constitue *la seule unité toujours légitime* du coefficient de mortalité, ce ne sera pas sans danger de s'égarer qu'on la changera contre telle ou telle autre, par exemple, contre le danger annuel ou quotidien. Selon les cas, on peut le faire quelquefois, mais non pas toujours, et c'est dans cette transformation, et dans la détermination qu'elle nécessite de la durée moyenne du séjour que se sont commises les plus grosses erreurs dont je m'occuperai dans le prochain article; puis je donnerai dans mes conclusions les formules diverses qui, dans la pratique, doivent servir à déterminer la mortalité, soit dans le milieu social (groupe d'âges, groupe professionnel, etc.), soit dans les hôpitaux, les hospices, les asiles, les prisons, etc.

Dr Bertillon.

(*La fin au prochain numéro.*)