JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TULLIO VIOLA

# Sur l'approximation des fonctions continues

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 31 (1952), p. 91-101.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__91_0>

# *Sur l'approximation des fonctions continues;*

PAR TULLIO **VIOLA** (*).

**1**. Dans un article publié en 1946 sous ce même titre ([1]), M. A. Ghizzetti a proposé une nouvelle méthode d'interpolation, dont il a démontré quelques propriétés fondamentales. Nous croyons reconnaître dans cette méthode beaucoup d'originalité, de simplicité, plusieurs avantages effectifs sur d'autres méthodes, même dans les applications du calcul numérique ([2]), ce qui nous encourage à poursuivre l'analyse faite par l'auteur.

En premier lieu nous rappelons brièvement les principes de cette méthode et les résultats déjà obtenus.

Soient donnés, dans le plan $xy$, $n+1$ points quelconques

$$P_0(x_0, y_0),\quad P_1(x_1, y_1),\quad \ldots,\quad P_n(x_n, y_n),\qquad \text{avec}\quad x_0 < x_1 < \ldots < x_n.$$

Posons $x_0 = a$, $x_n = b$ et indiquons par $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, ... une suite de fonctions absolument continues sur $(a, b)$, nulles en $a$, dont les dérivées $\Phi'_0(x) = \varphi_0(x)$, $\Phi'_1(x) = \varphi_1(x)$, ... soient à carrés sommables sur $(a, b)$, y formant un système orthogonal et complet (pour l'approximation linéaire en moyenne). Un entier $p > 0$ quelconque étant fixé, considérons la classe $\infty^{n+p}$ de fonctions

$$g_p(x) = y_0 + \sum_{h}^{0,\, n+p-1} c_h \Phi_h(x) \tag{1}$$

(*) Travail exécuté dans l'Institut National d'Italie pour les applications du Calcul.

([1]) Voir *Atti Reale Acad. Sc. Torino,* vol. **80**, 1944-1945.

([2]) De ce dernier point de vue, nous renvoyons à la Note : *Su un nuovo procedimento di interpolazione,* publiée par l'auteur dans *Ricerca Scientifica* (*Revue du Conseil national des Recherches d'Italie*), janvier 1946.

correspondant à tout choix possible des $n+p$ constantes $c_0, c_1, \ldots, c_{n+p-1}$, de façon que la courbe $y=g_p(x)$ passe par les $n+1$ points donnés. L'existence, dans cette classe, d'une fonction $g_p(x)$ qui rende minimum l'intégrale

$$\int_a^b \left(\frac{dg_p}{dx}\right)^2 dx,$$

est bien évidente. M. Ghizzetti a démontré que, pour $p$ suffisamment élevé, *la fonction minimante $g_p(x)$ est unique et donnée par l'équation du premier degré*

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{c|cccc} g_p(x)-y_0, & \Sigma\,\Delta\,\Phi_h(x_0)\,\Phi_h(x), & \Sigma\Delta\,\Phi_h(x_1)\,\Phi_h(x), & \ldots, & \Sigma\,\Delta\,\Phi_h(x_{n-1})\,\Phi_h(x) \\ \hline \Delta y_0 & & & & \\ \Delta y_1 & & \mathrm{D}_p & & \\ \ldots & & & & \\ \Delta y_{n-1} & & & & \end{array}\right| = 0,$$

les sommes $\Sigma$ étant effectuées pour l'indice $h$ variable de zéro à $n+p-1$, étant posé en outre :

$$\begin{array}{ll} \Delta y_0 \;=y_1-y_0, & \Delta\,\Phi_h(x_0) \;=\Phi_h(x_1)-\Phi_h(x_0), \\ \Delta y_1 \;=y_2-y_1. & \Delta\,\Phi_h(x_1) \;=\Phi_h(x_2)-\Phi_h(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta y_{n-1}=y_n-y_{n-1}, & \Delta\,\Phi_h(x_{n-1})=\Phi_h(x_n)-\Phi_h(x_{n-1}) \end{array}$$

$$(h=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\mathrm{D}_p \equiv \begin{vmatrix} \sigma_{00}^{(p)} & \sigma_{01}^{(p)} & \ldots & \sigma_{0,n-1}^{(p)} \\ \sigma_{10}^{(p)} & \sigma_{11}^{(p)} & \ldots & \sigma_{1,n-1}^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sigma_{n-1,0}^{(p)} & \sigma_{n-1,1}^{(p)} & \ldots & \sigma_{n-1,n-1}^{(p)} \end{vmatrix},$$

avec

$$\sigma_{kl}^{(p)} = \sum_h^{0,\,n+p-1} \Delta\Phi_h(x_k)\,\Delta\Phi_h(x_l) = \sum_h^{0,\,n+p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_h(x)\,dx \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi_h(x)\,dx$$

$$(k,\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

On a

$$\lim_{p\to\infty} \sigma_{kl}^{(p)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ \Delta x_k = x_{k+1}-x_k & \text{si } k=l, \end{cases}$$

et par suite

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{D}_p = \Delta x_0\,\Delta x_1 \ldots \Delta x_{n-1}.$$

*La minimante $g_p(x)$ converge uniformément sur $(a, b)$, pour $p \to \infty$, vers la fonction $\gamma(x)$ qui représente la polygonale $P_0 P_1 \dots P_n$. On a de plus*

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b [g'_p(x) - \gamma'(x)]^2 \, dx = 0.$$

Cette dernière formule exprime la convergence en moyenne, pour $p \to \infty$, de $g'_p(x)$ vers $\gamma'(x)$. Nous donnerons, au contraire, des conditions suffisantes pour la convergence

$$\lim_{p \to \infty} g'_p(x) = \gamma'(x)$$

en un point bien déterminé de $(a, b)$, ou sur tout un intervalle partiel de $(a, b)$, et nous en ferons ensuite l'application au problème indiqué dans notre titre ([3]).

**2.** Il est utile d'examiner les $n$ sommes

$$\sum_h^{0,\, n+p-1} \Delta\Phi_h(x_l)\, \Phi_h(x) \qquad (l = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

rangées dans la première ligne du déterminant (2). Si l'on dérive ces sommes par rapport à $x$, on obtient les réduites d'ordre $n+p-1$ des séries de Fourier

$$(3) \qquad \sum_h^{0,\, \infty} \Delta\Phi_h(x_l)\, \varphi_h(x) = \sum_h^{0,\, \infty} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \varphi_h(x)\, dx . \varphi_h(x) \qquad (l = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

---

([3]) Nous avons pris soin de choisir ces conditions, avec une généralité qui s'accorde avec celle qui a inspiré la méthode de M. Ghizzetti. On verra que les conditions choisies sont liées, en substance, aux propriétés des fonctions égales à la constante 1 dans un intervalle partiel de $(a, b)$, à la constante 0 hors de cet intervalle. Nous pensons, si nous sommes bien informés, que ces propriétés, pour un système $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... orthonormal et complet *tout à fait général*, n'ont pas été encore suffisamment mises en relief.

Pour ce qui concerne les notations, nous précisons ici que, dans la suite, nous indiquerons toujours par le symbole $g_p(x)$ (en correspondance d'un indice $p$ suffisamment élevé) la minimante, unique et bien déterminée, parmi les fonctions interpolatrices de la classe (1).

des $n$ fonctions :

$$\psi_l(x)=\begin{cases} 0 & \text{pour tout } x \text{ de } (a,\, b) \text{ extérieur à } (x_l,\, x_{l+1}), \\ 1 & \quad \text{»} \qquad\qquad \text{intérieur} \qquad \text{»} \quad , \end{cases}$$
$$(l=0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1).$$

Démontrons un premier théorème fondamental.

THÉORÈME I. — *Supposons qu'en un point $\bar{x}$ de $(a,\, b)$ les conditions suivantes soient satisfaites :*

1° $\Phi'_h(\bar{x})=\varphi_h(\bar{x})$ *pour chaque indice* $h=0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ (⁴);
2° *les réduites des séries* (3) *forment un ensemble numérique borné;*
3° *la fonction* $\gamma'(x)$ *soit développable en série de Fourier.*

*On a, dans ces conditions,*

$$\lim_{p\to\infty} g'_p(\bar{x})=\gamma'(\bar{x}).$$

*Démonstration.* — Soit $\omega_{kl}^{(p)}(k,\, l=0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1)$ le complément algébrique de $\sigma_{kl}^{(p)}$ dans le déterminant $D_p$. On a

$$(4)\qquad \lim_{p\to\infty}\omega_{kl}^{(p)}=\begin{cases} 0 & \text{si } l\neq k, \\ \Delta x_1\,\Delta x_2\ldots\Delta x_{k-1}\,\Delta x_{k+1}\ldots\,\Delta x_{n-1} & \text{si } l=k. \end{cases}$$

En résolvant l'équation (2) par rapport à $g_p(x)$ ($p$ étant suffisamment élevé), on obtient

$$g_p(x)=y_0+\frac{1}{D_p}\sum_{k,\,l}^{0,\,n-1}\omega_{kl}^{(p)}\,\Delta y_k\sum_{h}^{0,\,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_l)\,\Phi_h(x)$$

et, en dérivant par rapport à $x$ au point $\bar{x}$,

$$\begin{aligned} g'_p(\bar{x}) &= \frac{1}{D_p}\sum_{k,\,l}^{0,\,n-1}\omega_{kl}^{(p)}\,\Delta y_k\sum_{h}^{0,\,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(\bar{x}) \\ &= \sum_{k}^{0,\,n-1}\Delta y_k\sum_{l}^{0,\,n-1}\frac{\omega_{kl}^{(p)}}{D_p}\left\{\sum_{h}^{0,\,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(\bar{x})\right\}. \end{aligned}$$

(⁴) La continuité absolue des $\Phi_h(x)$ (*voir* § 1) nous assure, *a priori*, que cette première condition est vérifiée presque partout en $(a,\, b)$.

La troisième condition nous assure que

$$(5)\qquad \gamma'(\bar{x})=\sum_{h}^{0,\infty}\int_a^b \gamma'(x)\,\varphi_h(x)\,dx.\,\varphi_h(\bar{x})=\sum_{h}^{0,\infty}\left\{\sum_{k}^{0,n-1}\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\Delta\Phi_h(x_k)\right\}\varphi_h(\bar{x}).$$

Un nombre $\varepsilon > 0$ arbitraire étant fixé, il est donc possible de déterminer un entier $\mu=\mu(\varepsilon)>0$ tel que, pour chaque $p>\mu$, l'on ait

$$\left|\sum_{h}^{n+p,\infty}\left\{\sum_{k}^{0,n-1}\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\Delta\Phi_h(x_k)\right\}\varphi_h(\bar{x})\right|<\varepsilon.$$

Déterminons ensuite [*cf.* les relations (4)] un entier $\nu=\nu(\varepsilon)>0$ tel que, pour chaque $p>\nu$, l'on ait

$$\left|\frac{\Delta y_k\,\omega_{kl}^{(p)}}{D_p}\right|<\varepsilon \qquad \text{si } l\neq k,$$
$$\left|\frac{\Delta y_k\,\omega_{kl}^{(p)}}{D_p}-\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right|<\varepsilon \qquad \text{si } l=k.$$

Pour $p>\begin{cases}\mu\\ \nu\end{cases}$, on aura alors

$$\begin{aligned}|g_p'(\bar{x})-\gamma'(\bar{x})|<\varepsilon+\Bigg|&\sum_{k}^{0,n-1}\Delta y_k\sum_{l}^{0,n-1}\frac{\omega_{kl}^{(p)}}{D_p}\left\{\sum_{h}^{0,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(\bar{x})\right\}\\ &-\sum_{k}^{0,n-1}\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\left\{\sum_{h}^{0,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_k)\,\varphi_h(\bar{x})\right\}\Bigg|\\ \leqq\varepsilon+&\sum_{k}^{0,n-1}\left\{\left|\frac{\Delta y_k\,\omega_{kk}^{(p)}}{D_p}-\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right|\left|\sum_{h}^{0,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_k)\,\varphi_h(\bar{x})\right|\right.\\ &\left.+\sum_{l\neq k}^{0,n-1}\left|\frac{\Delta y_k\,\omega_{kl}^{(p)}}{D_p}\right|\left|\sum_{h}^{0,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(\bar{x})\right|\right\}\\ <\varepsilon&\left[1+n\sum_{l}^{0,n-1}\left|\sum_{h}^{0,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(\bar{x})\right|\right].\end{aligned}$$

La deuxième condition nous permet enfin de déduire le résultat annoncé.

*Observation.* — Il est sous-entendu, dans ce qui précède (*cf.* la troisième condition), que $x \neq x_l (l = 1, 2, \ldots, n-1)$, du moins si les valeurs $\gamma'(x_l)$ $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$ n'existent pas (ce qui est le cas, en général). Mais si, en posant $\overline{x} = x_l$ (pour un certain $l$ tel que $1 \leqq l \leqq n-1$), la série de Fourier écrite au deuxième membre de (5) converge et si S est sa somme (ce qui arrive par exemple pour les séries trigonométriques pour lesquelles $S = \frac{1}{2}[\gamma'(x_l^+) + \gamma'(x_l^-)]$), alors le raisonnement précédent peut être évidemment imité, pour démontrer (les conditions 1° et 2° étant conservées) que

$$\lim_{p \to \infty} g'_p(x_l) = S.$$

**3.** Cherchons ensuite des conditions suffisantes pour la *convergence uniforme*

$$\lim_{p \to \infty} g'_p(x) = \gamma'(x),$$

dans un intervalle $(u, v)$ partiel de $(a, b)$, supposé $x_l < u < v < x_{l+1}$ pour un certain $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. A ce propos, le théorème suivant peut être facilement démontré.

THÉORÈME II. — *Supposons que, dans l'intervalle $(u, v)$, les conditions suivantes soient satisfaites :*

1° $\Phi'_h(x) = \varphi_h(x)$ *pour chaque* $h = 0, 1, 2, \ldots$;

2° *les réduites des séries* (3) *soient également bornées* ([5]);

3° *la fonction* $\gamma'(x)$ *soit développable en série de Fourier uniformément convergente.*

*On a, dans ces conditions :*

$$\lim_{p \to \infty} g'_p(x) = \gamma'(x)$$

*uniformément sur* $(u, v)$.

---

([5]) Cette condition est sans doute vérifiée, par exemple si les fonctions dites de Lebesgue :

$$L_n(t) = \int_a^b \left| \sum_h^{0, n} \varphi_h(t)\, \varphi_h(x) \right| dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

sont également bornées en $(u, v)$ (*voir* S. KACZMARZ et H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa, 1935, p. 154 et suiv.).

La démonstration de ce théorème est tout à fait semblable à celle du théorème précédent, étant entendu que $\bar{x}$ varie sur $(u, v)$. Il suffit d'observer que les limitations trouvées pour $|g'_p(\bar{x}) - \gamma'(\bar{x})|$ subsistent (dans les conditions actuelles) indépendamment de $\bar{x}$ sur $(u, v)$. Ceci est une conséquence de la possibilité de choisir maintenant $\mu(\varepsilon)$ indépendant de $\bar{x}$, et de borner les termes

$$\left| \sum_{h}^{0,\, n+p-1} \Delta \Phi_h(x_l)\, \varphi_h(\bar{x}) \right|$$

indépendamment de $p$ et de $\bar{x}$.

4. Il est intéressant d'étudier le problème de l'approximation d'une fonction continue, ainsi que M. Ghizzetti lui-même l'a proposé dans son article.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle $(a, b)$. En décomposant $(a, b)$ en parties suffisamment petites, par un nombre fini de points $x_l$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, n$; $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$), la ligne polygonale ayant les points $P_l[x_l, f(x_l)]$ pour sommets, représentera une certaine fonction continue $\gamma(x)$ : et l'on pourra toujours obtenir que cette fonction $\gamma(x)$ s'approche de $f(x)$, sur tout $(a, b)$, à $\varepsilon$ près ($\varepsilon$ étant une quantité positive, arbitrairement donnée à l'avance). La possibilité d'approcher uniformément une fonction continue $f(x)$, arbitrairement donnée en $(a, b)$, par une suite de fonctions minimantes, c'est-à-dire de fonctions du type $g_p(x)$ étudié par M. Ghizzetti, est donc évidente.

Nous nous demandons maintenant s'il est possible, étant supposé de plus que $f(x)$ soit douée, sur tout $(a, b)$, d'une dérivée continue, d'approcher même $f'(x)$ par une suite de dérivées de fonctions minimantes $g_p(x)$, et cela uniformément, du moins à l'intérieur de $(a, b)$, c'est-à-dire du moins dans chaque intervalle $(a', b')$ intérieur à $(a, b)$.

Pour aborder cette question, il est convenable d'introduire certaines *hypothèses préjudicielles* [en les choisissant naturellement parmi les moins restrictives [6]] à propos du système complet $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$.

[6] Celles que nous allons faire, sont largement satisfaites par exemple par les séries trigonométriques.

Nous supposerons précisément que :

α. L'on ait $\Phi'_h(x) = \varphi_h(x)$ partout à l'intérieur de $(a, b)$ et pour chaque $h = 0, 1, 2, \ldots$;

β. Pour chaque intervalle $(u, v)$ partiel de $(a, b)$, la fonction

$$\psi(x; u, v) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } x \text{ de } (a, b) \text{ extérieur à } (u, v), \\ 1 & \text{»} \qquad \text{intérieur} \quad \text{»} , \end{cases}$$

soit développable en série de Fourier uniformément convergente sur tout intervalle $(r, s)$ intérieur à $(a, b)$, pourvu que les points $u$, $v$ soient extérieurs à $(r, s)$;

γ. Un intervalle $(a', b')$ intérieur à $(a, b)$ étant arbitrairement donné, il existe un nombre $H = H(a', b') > 0$ tel que, quel que soit l'intervalle $(u, v)$ partiel de $(a, b)$, les réduites de la série de Fourier de la fonction $\psi(x; u, v)$ restent en tout $(a', b')$ et à partir d'un certain ordre [7], plus petites que H en valeur absolue.

Sous ces hypothèses préjudicielles, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit $f(x)$ une fonction dérivable en $(a, b)$, et soit $f'(x)$ continue sur $(a, b)$. Un intervalle $(a', b')$ intérieur à $(a, b)$ et un nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement donnés, il existe un autre nombre $\delta > 0$ tel que, quelle que soit la décomposition de $(a, b)$ effectuée par les points $x_l$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, n$; $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$) avec $\Delta x_l < \delta$, l'on ait*

$$(6) \qquad |g_p(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad |g'_p(x) - f'(x)| < \varepsilon \qquad \text{sur tout } (a', b'),$$

*pour chaque indice $p < \bar{p}$, $\bar{p}$ étant un entier convenable [8] et $g_p(x)$ étant la fonction minimante d'indice $p$ (construite selon les règles données).*

*Démonstration.* — L'existence d'un nombre $\delta > 0$ et ensuite d'un entier $\bar{p}$, de façon que la première des limitations (6) soit satisfaite, n'a pas besoin d'être prouvée, après ce qui a été démontré par M. Ghizzetti.

---

[7] Cet ordre dépendra, en général, de $a'$, $b'$, $u$, $v$.

[8] Dépendant, en général, de la décomposition effectuée.

Il suffit donc de s'occuper de la deuxième limitation (6), et pour cela nous diviserons notre démonstration en trois parties :

*a.* Considérons d'abord une décomposition de $(a, b)$ tout à fait générale, et indiquons par

$$S_{n+p-1}(x) = \sum_{h}^{0,\,n+p-1} \left\{ \sum_{k}^{0,\,n-1} \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \Delta\, \Phi_h(x_k) \right\} \varphi_h(x)$$

une réduite, d'ordre $n+p-1$, de la série de Fourier de $\gamma'(x)$. Choisissons ensuite, avec une loi arbitraire, $n$ points $\overline{x}_l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$, chacun à chacun à l'intérieur des $n$ intervalles $(x_{l-1}, x_l)$.

Par rapport à un quelconque des $n-1$ intervalles $(\overline{x}_l, \overline{x}_{l+1})$ $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$, la série de Fourier de $\gamma'(x)$ peut être envisagée comme la somme, terme par terme, de deux autres séries de Fourier, c'est-à-dire :

1° de celle de la fonction

$$\gamma'_{1l}(x) = \begin{cases} \gamma'(x) & \text{pour tout } x \text{ de } (a, b) \text{ extérieur à } (x_{l-1}, x_{l+1}), \\ \gamma'(\overline{x}_l) & \quad\text{»} \qquad\qquad \text{intérieur} \qquad \text{»} \quad ; \end{cases}$$

2° de celle de la fonction

$$\gamma'_{2l}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } x \text{ de } (a, b) \text{ extérieur à } (x_l, x_{l+1}), \\ \gamma'(x) - \gamma'(\overline{x}_l) & \quad\text{«} \qquad\qquad \text{intérieur} \qquad \text{»} \quad . \end{cases}$$

$\gamma'_{1l}(x)$ est une combinaison linéaire de fonctions $\psi(x;\, u, v)$ se rapportant à des couples de points $u$, $v$, dont chacun est extérieur à $(\overline{x}_l, \overline{x}_{l+1})$ : sa série de Fourier, en vertu de l'hypothèse préjudicielle $\beta$, converge donc uniformément sur $(\overline{x}_l, \overline{x}_{l+1})$ vers la constante $\gamma'(\overline{x}_l)$. La série de Fourier de $\gamma'_{2l}(x)$, en vertu de l'hypothèse préjudicielle $\gamma$, a ses réduites plus petites que $H\sigma$, en valeur absolue, sur tout $(a', b')$ et à partir d'un certain ordre, $\sigma$ étant la discontinuité de $\gamma'(x)$ en $x_l$.

*b.* La continuité uniforme de $f'(x)$ sur $(a, b)$ nous donne la possibilité de choisir $\delta$ suffisamment petit pour que, une décomposition quelconque de $(a, b)$ en parties $\Delta x_l$ toutes $< \delta$ étant effectuée, l'on ait d'abord

$$|f'(\bar{x}) - \gamma'(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{4},$$

pour chaque valeur $\bar{x}$ de $x$ différent des $x_l$; en outre, une quelconque de telles valeurs étant fixée, soit par exemple $x$ intérieure à $(x_l, x_{l+1})$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, l'on ait

$$|f'(\bar{x}) - f'(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour tout $x$ appartenant à $(x_l, x_{l+2})$ (si $l < n-1$), et pour tout $x$ appartenant à $(x_{l-1}, x_{l+1})$ (si $l > 0$); enfin la discontinuité de $\gamma'(x)$, en chacun des $n-1$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, soit $< \frac{\varepsilon}{4\mathrm{H}}$, avec $\mathrm{H} = \mathrm{H}(a', b')$.

Nous supposerons, de plus, $\delta < a' - a$, $\delta < b - b'$.

*c.* Supposons effectués le choix de $\delta$ et la décomposition de $(a, b)$ selon les indications énoncées en *b*, enfin le choix des points $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ (*voir a*). Il en résulte, pour $x$ sur $(a', b')$,

$$\begin{aligned}|g'_p(x) - f'(x)| \leq |g'_p(x) - \gamma'(\bar{x}_l)| + |\gamma'(\bar{x}_l) - f'(\bar{x}_l)| \\ + |f'(\bar{x}_l) - f'(x)| < |g'_v(x) - \gamma'(\bar{x}_l)| + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

$\bar{x}_l = \bar{x}_l(x)$ étant, parmi les points $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}$, celui tel que $\bar{x}_l \leq x < \bar{x}_{l+1}$.

Nous obtiendrons une limitation favorable pour $|g'_p(x) - \gamma'(\bar{x}_l)|$, en rattachant la démonstration du théorème I à ce qui a été observé en *a*. La convergence de la série de Fourier de $\gamma'(x)$ aux points $\bar{x}_l$, nous assure que pour $p$ suffisamment élevé, on a d'abord

$$\left| \sum_h^{n+p, \infty} \left\{ \sum_k^{0, n-1} \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \Delta \Phi_h(x_k) \right\} \varphi_h(\bar{x}_l) \right| < \frac{\varepsilon}{8},$$

pour chaque $l = 1, 2, \ldots, n$. On en déduira ensuite, sur tout $(a', b')$, la limitation suivante :

$$\begin{aligned}|g'_v(x)-\gamma'(\bar{x}_l)| < \frac{\varepsilon}{8} + |\mathrm{S}_{n+p-1}(x)-\mathrm{S}_{n+p-1}(\bar{x}_l)|\\ +\left|\sum_k^{0,\,n-1}\Delta y_k\sum_l^{0,\,n-1}\frac{\omega_{kl}^{(p)}}{\mathrm{D}_p}\left\{\sum_h^{0,\,n+p-1}\Delta\,\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(x)\right\}\right.\\ \left.-\sum_k^{0,\,n-1}\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\left\{\sum_h^{0,\,n+p-1}\Delta\,\Phi_h(x_k)\,\varphi_h(x)\right\}\right|.\end{aligned}$$

Toujours pour $p$ suffisamment élevé, on aura, sur tout $(a', b')$ (*cf.* $a$)

$$|\mathrm{S}_{n+p-1}(x)-\mathrm{S}_{n+p-1}(\bar{x}_l)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

et

$$(7)\qquad \begin{aligned}&\left|\sum_k^{0,\,n-1}\Delta y_k\sum_l^{0,\,n-1}\frac{\omega_{kl}^{(p)}}{\mathrm{D}_p}\left\{\sum_h^{0,\,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(x)\right\}\right.\\ &\left.\qquad-\sum_k^{0,\,n-1}\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\left\{\sum_h^{0,\,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_k)\,\varphi_h(x)\right\}\right|\\ &\qquad<\eta n\sum_l^{0,\,n-1}\left|\sum_h^{0,\,n+p-1}\Delta\Phi_h(x_l)\,\varphi_h(x)\right|\end{aligned}$$

en vertu du raisonnement du paragraphe **2**, $\eta$ étant un nombre positif auxiliaire, arbitrairement petit. Enfin, en vertu de l'hypothèse préjudicielle $\gamma$, la somme écrite au deuxième membre de (7) est inférieure, pour $x$ sur $(a', b')$, à un certain nombre fixe M (pourvu que $p$ soit suffisamment élevé). Si nous supposons donc $\eta < \frac{\varepsilon}{8\mathrm{M}n}$, l'inégalité (7) donne (pour $p$ plus grand qu'un certain entier $\bar{p}$),

$$|g'_p(x)-\gamma'(\bar{x}_l)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{donc} \quad |g'_p(x)-f'(x)| < \varepsilon$$

sur tout $(a', b')$. C. Q. F. D.

*Observation.* — Avec des retouches très petites, la démonstration peut être reprise, en supposant, plus généralement, que $f(x)$ soit dérivable seulement à l'intérieur de $(a, b)$, $f'(x)$ y étant continue.