

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. MANDELBROJT

Quelques théorèmes de composition

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 31 (1952), p. 79-90.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__79_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Quelques théorèmes de composition ;

PAR S. MANDELBROJT.

Dans un Mémoire récent ⁽¹⁾, que j'ai écrit en collaboration avec H. Brunk, le théorème suivant (théorème 2 du Mémoire) a été démontré :

THÉORÈME A. — *Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1° *Les fonctions $F(z)$, $\Phi(z)$, $z = x + iy$, sont holomorphes dans le demi-plan $x > 0$ et continues sur le demi-plan fermé $x \geq 0$.*

2° *Il existe une constante positive δ telle que*

$$|F(z)| = O(|z|^\delta), \quad |\Phi(z)| = O(|z|^\delta)$$

lorsque $z \rightarrow 0$.

3° *Les nombres $\{M_n\}$, $\{M'_n\}$ étant positifs, $\log M_n$ et $\log M'_n$ étant fonctions convexes de n , et les nombres $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ étant réels ou complexes, on a pour $x > 0$, $n \geq 1$:*

$$(1) \quad \left| F(z) - \sum_1^n a_\nu z^{-\nu} \right| < M_n |z|^{-n},$$

$$(2) \quad \left| \Phi(z) - \sum_1^n b_\nu z^{-\nu} \right| < M'_n |z|^{-n}.$$

4°

$$a_{2\nu-1} = b_{2\nu-1} = 0 \quad (\nu \geq 1).$$

5°

$$a_{2\nu} b_{2\nu} = 0 \quad (\nu \geq 1).$$

⁽¹⁾ S. MANDELBROJT et H. BRUNK, *A composition theorem for asymptotic series* (*Duke Math. J.*, vol. 18, n° 2, 1951, p. 297).

6°

$$\sum \frac{M_n M'_n}{M_{n+1} M'_{n+1}} = \infty;$$

alors l'une des deux fonctions F, Φ est identiquement nulle. Si $F(z) \equiv 0$, on a aussi $a_\nu = o(\nu \geq 1)$, et si $\Phi(z) \equiv 0$, on a aussi $b_\nu = o(\nu \geq 1)$.

La démonstration de ce théorème est essentiellement basée sur les trois lemmes suivants que j'aurai à utiliser plus loin. Leur démonstration se trouve dans le Mémoire cité :

LEMME 1. — Soient $f(s), \varphi(s)$ deux fonctions holomorphes dans la bande $|t| < \frac{\pi}{2}$ ($s = \sigma + it$) et continues sur la bande fermée. Définissons ces fonctions pour tout s , avec $t \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, par périodicité, avec la période πi .

Supposons qu'il existe deux constantes positives M, M' telles que $|f(s)| < M, |\varphi(s)| < M'$ lorsque $|t| < \frac{\pi}{2}$; c étant une constante réelle, posons

$$(3) \quad H_c(\omega) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_c(\omega)} f(s) \varphi(\omega - s) ds, \quad \omega = u + i\nu,$$

où le chemin d'intégration $\Gamma_c(\omega)$ est la ligne polygonale partant du point $c - \frac{\pi}{2}i$, ayant comme sommets les points $u - c - \frac{\pi}{2}i, u - c + \frac{\pi}{2}i$ et aboutissant au point $c + \frac{\pi}{2}i$.

La fonction $H_c(\omega)$ est holomorphe dans la bande $0 < \nu < \pi$; elle est aussi définie par l'intégrale

$$(4) \quad H_c(\omega) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_c(\omega)} f(\omega - s) \varphi(s) ds.$$

LEMME 2. — Les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ satisfaisant aux mêmes conditions que dans le lemme 1, supposons qu'on ait en plus :

$$(5) \quad \left| f(s) - \sum_1^n a_\nu e^{-\nu s} \right| < M_n e^{-n\sigma},$$

$$(6) \quad \left| \varphi(s) - \sum_1^n a'_\nu e^{-\nu s} \right| < M'_n e^{-n\sigma}$$

pour $|t| < \frac{\pi}{2}$, avec $a_{2\nu-1} = b_{2\nu-1} = o(\nu > 1)$, $\log M_n, \log M'_n$ étant fonctions convexes n .

Il existe alors une constante K indépendante de c , telle que, pour $u < c$, $0 < \nu < \pi$, la fonction $H_c(w)$, définie par (4), satisfait aux inégalités

$$(7) \quad \left| H_c(w) - \sum_1^n a_\nu b_\nu e^{-\nu s} \right| < KM_{n+1} M'_{n+1} e^{-n\sigma} \quad (n \geq 1).$$

LEMME 3. — Si les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ satisfaisant aux conditions du lemme 1 et si, en plus, il existe une constante positive δ telle que pour

$|t| < \frac{\pi}{2}$ on ait

$$|f(s)| \leq M e^{-\delta|s|}, \quad |\varphi(s)| \leq M' e^{-\delta|s|},$$

la limite

$$(8) \quad H(w) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_c(w)} f(s) \varphi(w-s) ds$$

existe, et la fonction $H(w)$ est holomorphe et bornée pour $0 < \nu < \pi$. Et si $H(w) \equiv 0$, l'une des fonctions $f(s)$ ou $\varphi(s)$ est identiquement nulle.

Dans ce travail je me propose, tout d'abord, de généraliser le théorème A. Je rappelle que $\{\nu_n\}$ étant une suite de nombres positifs, en posant $N(t) = \sum_{\nu_n < t} 1$ ($t > 0$) (le nombre des ν_n inférieurs à t), $D(t) = \frac{N(t)}{t}$, on appelle fonction de densité inférieure de la suite $\{\nu_n\}$ la fonction $D.(t) = \overline{\text{borne } D(x)}$. La quantité $D. = \lim_{t \rightarrow \infty} D.(t) = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty} D(t)}$ est appelée densité inférieure de $\{\nu_n\}$. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — Supposons que les conditions 1°, 2°, 3° du théorème A soient satisfaites, et soit $\{\nu_n\}$ une suite d'entiers positifs contenant tous les entiers impairs, dont la densité inférieure est supérieure à $\frac{1}{2}$ et dont la fonction de densité inférieure est $D.(t)$. Posons

$$C(\sigma) = \overline{\lim_{n \geq 1}} [n\sigma - \log(M_n M'_n)].$$

Si

$$(\alpha) \quad a_{\nu_n} b_{\nu_n} = 0 \quad (n \geq 1), \quad a_{2\nu-1} = b_{2\nu-1} = 0 \quad (\nu \geq 1).$$

$$(\beta) \quad \int_0^\infty C(\sigma) e^{-\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sin(\nu(\tau))} d\tau} d\sigma = \infty,$$

l'une des deux fonctions $F(z)$, $\Phi(z)$ est identiquement nulle. Si $F(s) \equiv 0$, on a aussi $a_n = 0 (n \geq 1)$, si $\Phi(z) = 0$, on a aussi $b_n = 0 (n \geq 1)$.

Remarquons que la condition 6° du théorème A est équivalente à la condition (2)

$$(\beta') \quad \int_0^\infty C(\sigma) e^{-\sigma} d\sigma = \infty.$$

On voit aussi que l'ensemble des conditions 4°, 5° du théorème A équivaut à la condition (α) avec $\nu_n = n (n \geq 1)$. Comme $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{C(\sigma)}{\sigma} = \infty$, et comme, pour le cas où $\nu_n = n$, $D.(t) = \frac{n}{n+1}$ si $n < t \leq n+1$, on voit facilement que, dans le cas où $\nu_n = n$, la condition (β) est équivalente à la condition (β'), c'est-à-dire à la condition 6° du théorème A. Ainsi donc le théorème 1 contient bien le théorème A comme cas particulier.

Posons $f(s) = F(e^s)$, $\varphi(s) = \Phi(e^s)$. Il est clair que les fonctions f et φ satisfont aux hypothèses des lemmes 1, 2, 3, la constante δ intervenant dans le lemme correspondant 3 n'étant pas nécessairement la même que celle qui intervient dans l'énoncé du théorème. Si l'on désigne par $\{\lambda_n\}$ la suite d'entiers complémentaire à la suite $\{\nu_n\}$ par rapport à l'ensemble de tous les entiers positifs, on voit, d'après les lemmes 1, 2, 3, que la fonction $H(w)$ définie par (8) est holomorphe et bornée dans la borne $0 < \nu < \pi$, et, dans cette bande, on a, quel que soit $n \geq 1$:

$$(9) \quad \left| H(w) - \sum_1^n d_p e^{-\lambda_p w} \right| \leq m_\eta e^{-\eta u} (\lambda_n \leq q < \lambda_{n+1}),$$

(1) Voir, par exemple, S. MANDELBROJT, *Analytic Functions and classes of infinitely differentiable Functions* (The Rice Institute Pamphlet, vol. 29, 1942).

où

$$d_p = a_{\lambda_p} b_{\lambda_p}, \quad m_q = KM_{q+1} M'_{q+1}.$$

Si l'on désigne par $D_\lambda(t)$, \overline{D}_λ respectivement la fonction de densité supérieure de la suite $\{\lambda_n\}$ et la densité supérieure de $\{\lambda_n\}$, c'est-à-dire

$$D_\lambda(t) = \overline{\text{borne}}_{x \geq t} D_\lambda(x), \quad \text{où} \quad D_\lambda(t) = \frac{N_\lambda(t)}{t},$$

avec

$$N_\lambda(t) = \sum_{\lambda_n < t} 1 \quad (t > 0), \quad D_\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} D_\lambda(t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_\lambda(t),$$

on voit facilement que la condition (β) est équivalente à la condition

$$(10) \quad \int_0^\infty C_1(\sigma) e^{-\int_0^\sigma \frac{d\tau}{1-2b_\lambda^2(u_1(\tau))}} d\sigma = \infty,$$

où

$$C_1(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} (n\sigma - \log m_n).$$

On a d'ailleurs $D_\lambda < \frac{1}{2}$. Il suffit alors d'appliquer un cas très particulier du théorème fondamental du Mémoire que j'ai publié en 1947⁽³⁾ pour voir que de (9) (dans la bande $0 < \nu < \pi$), de (10) et du fait que $|H(\omega)| \leq L < \infty$ résulte que, quel que soit u_0 , on a

$$|d_p| < A \lambda_p \Lambda_p e^{\lambda_p u_0},$$

où la suite $\{\Lambda_n\}$, définie dans le Mémoire que je viens de citer, ne dépend que de la suite $\{\lambda_n\}$. En faisant alors tendre u_0 vers $-\infty$, on voit que $d_p = 0$ ($p \geq 1$). On peut alors écrire (9) sous la forme

$$(11) \quad |H(\omega)| \leq m_q e^{-q u} \quad (q \geq \lambda_1; 0 < \nu < \pi).$$

Il résulte, d'autre part, de (10), que

$$\int_0^\infty C_1(\sigma) e^{-\sigma} d\sigma = \infty,$$

c'est-à-dire

$$(12) \quad \sum \frac{m_q}{m_{q+1}} = \infty.$$

(³) S. MANDELBROJT, *Sur une inégalité fondamentale* (Ann. Éc. Norm. Sup., (3), t. 63, 1946, p. 351).

Il suffit d'appliquer le théorème classique de Watson [en posant, pour revenir à une forme plus connue de ce théorème, $H_1(z) = H(w)$, $z = e^w$], pour voir que $H(w) \equiv 0$. On arrive à la conclusion que l'une des deux fonctions f ou φ (c'est-à-dire F ou Φ) est identiquement nulle en appliquant la fin du lemme 3. Supposons alors, par exemple, que $F(z) \equiv 0$. Il résulte alors de (1) que (du fait que $a_{2p+1} = 0$) :

$$\left| \sum_1^{2p} a_\nu z^{-\nu} \right| \leq M_{2p+1} |z|^{-2p-1} \quad (p \geq 1)$$

et, en faisant tendre $|z|$ vers l'infini, on voit que $a_\nu = 0$ ($\nu \geq 1$). Le théorème est ainsi complètement démontré.

Nous allons maintenant établir quelques nouveaux lemmes qui nous permettront d'appliquer le théorème 1.

LEMME 4. — Si $\{q_n\}$ est une suite d'entiers positifs tels que

$$(13) \quad \sum \frac{1}{q_n} < \infty,$$

il existe une fonction non identiquement nulle $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) telle que $f(0) = f^{(q_n)}(0) = 0$ ($n \geq 1$), $f^{(m)} \neq 0$ ($m \neq q_n, n \geq 1, m \neq 0$), $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ ($n \geq 0, -\infty < x < \infty$).

Le produit

$$(14) \quad \Lambda(\zeta) = \prod \frac{\zeta - q_n}{\zeta + q_n} \quad (\zeta = \xi + i\eta)$$

représente une fonction méromorphe, et l'on a

$$(15) \quad \begin{cases} \overline{\text{borne}}_{\eta} |A(a + i\eta)| = 1 & \text{pour } a \geq 0, \\ \overline{\text{borne}}_{\eta} |A(a + i\eta)| \leq |A(a)| & \text{pour } a \leq 0. \end{cases}$$

Posons pour $-q_1 < a < 0$:

$$(16) \quad f_1(x) = \int_0^1 e^{iux} \left[\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} u^{-\zeta-1} A(\zeta) \frac{d\zeta}{(q_1 + \zeta)^2} \right] du.$$

D'après (15) on a, pour $\zeta = a + i\eta$, $-q_1 < a < 0$:

$$(17) \quad \left| u^{-\zeta-1} A(\zeta) \frac{1}{(q_1 + \zeta)^2} \right| \leq u^{-a-1} |A(a)| [(q_1 + a)^2 + \eta^2]^{-1}.$$

La valeur de $f_1(x)$ est donc indépendante du choix de a ($-q_1 < a < 0$). On le voit en appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $u^{-\zeta-1} A(\zeta)(q_1 + \zeta)^{-2}$, le chemin d'intégration étant le rectangle des sommets $a_1 - iT$, $a_2 - iT$, $a_2 + iT$, $a_1 + iT$, $-q_1 < a_1 < a_2 < 0$, $T > 0$, et en faisant tendre T vers $+\infty$. On voit aussi de cette inégalité que

$$(18) \quad |f_1^{(n)}(x)| \leq 2 |A(a)| \int_0^1 u^{n-a-1} du \int_0^\infty \frac{dy}{(q_1 + a)^2 + y^2} \\ = \frac{1}{n-a} \frac{\pi}{q_1 + a} |A(a)| \quad (n \geq 0).$$

On peut aussi écrire, en changeant l'ordre d'intégration :

$$(19) \quad f_1^{(n)}(0) = i^n \int_0^1 u^n \left[\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} u^{-\zeta-1} A(\zeta) \frac{d\zeta}{(q_1 + \zeta)^2} \right] du \\ = i^n \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[A(\zeta) \frac{1}{(q_1 + \zeta)^2} \int_0^1 u^{n-\zeta-1} du \right] d\zeta \\ = i^n \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} A(\zeta) \frac{1}{(q_1 + \zeta)^2} \frac{d\zeta}{n-\zeta} = i^n K(a, n) \quad (n \geq 0).$$

La valeur de $K(a, n)$ est indépendante de a lorsque $-q_1 < a < n$; et si $-\lambda_1 < a_1 < n < a_2$ on peut écrire

$$(19) \quad K(a_2, n) - K(a_1, n) = 2\pi i \left[\text{Résidu}_{\zeta=n} \frac{A(\zeta)}{(q_1 + \zeta)^2(n - \zeta)} \right] = \frac{2\pi i A(n)}{(q_1 + n)^2}.$$

Mais, d'après (15), on a

$$|K(a_2, n)| = \left| \int_{a_2-i\infty}^{a_2+i\infty} A(\zeta) \frac{d\zeta}{(q_1 + \zeta)^2(n - \zeta)} \right| \leq \frac{2}{a_2 - n} \int_0^\infty \frac{d\eta}{(q_1 + a)^2 + \eta^2} \\ = \frac{\pi}{(q_1 + a_2)(a_2 - n)},$$

ce qui prouve que $\lim_{a_2 \rightarrow \infty} K(a_2, n) = 0$, et d'après (19), on a

$$K(a_1, n) = - \frac{2\pi i A(n)}{(q_1 + n)^2}.$$

Il résulte alors de (18) que

$$f_1^{(q_n)}(0) = 0 \quad (n \geq 1), \\ f_1^{(m)}(0) \neq 0 \quad \text{si } m \neq q_n \quad (n \geq 1).$$

En multipliant $f_1(x) - f_1(0)$ par une constante convenable, on obtient la fonction voulue $f(x)$.

LEMME 5. — Si dans le lemme 4, les quantités q_n sont supposées paires, il existe une fonction paire non identiquement nulle $f(x)$, telle que

$$f(0) = f^{(q_n)}(0) = 0 \quad (n \geq 1), \quad |f^{(n)}(x)| \leq 1 \quad (n \geq 0).$$

Si $f_0(x)$ est une fonction non identiquement nulle sur $(-\infty, \infty)$ telle que

$$f_0(x) = f_0^{(q_n)}(0) = 0, \quad f_0^{(m)}(0) \neq 0 \quad (m \neq q_n, n \geq 1), \\ |f_0^{(n)}(x)| \leq 1 \quad (n \geq 0)$$

(une telle fonction existe en vertu du lemme 4), la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}[f_0(x) + f_0(-x)]$$

est la fonction voulue.

LEMME 6. — Soit $\{q_n\}$ une suite d'entiers positifs, croissants, pairs. Il existe une fonction $f(x)$, non identiquement nulle, paire, bornée, telle que

$$f(0) = f^{(m)}(0) = 0 \quad (m \neq q_n, n \geq 1), \quad |f^{(n)}(x)| \leq q_1 q_2 \dots q_n.$$

Ce lemme a été démontré dans le Mémoire déjà cité (*). Dans ce Mémoire, on ne suppose pas que les q_n sont pairs et l'on démontre l'existence d'une fonction f satisfaisant aux conditions de l'énoncé sur $[0, \infty)$. Mais, si les q_n sont pairs, on peut prolonger la fonction par symétrie [$f(x) = f(-x)$].

LEMME 7. — Si les hypothèses du lemme 5 sont satisfaites, il existe une fonction paire $g(x)$, non identiquement nulle, telle que

$$g(0) = g^{(q_n)}(0) = 0 \quad (n > 1), \quad g^{(m)}(0) \neq 0 \quad (m \neq 0, m \neq q_n, n \geq 1), \\ \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx \leq 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g^{(n)}(x)| dx \leq 1.$$

(*) Voir la note (3).

LEMME 8. — *Si les hypothèses du lemme 6 sont satisfaites, il existe une fonction paire $g(x)$, non identiquement nulle, telle que*

$$g(0) = g^{(m)}(0) = 0 \quad (m \neq q_n, n \geq 1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx \leq 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g^{(n)}(x)| dx \leq q_1 q_2 \dots q_{n+1} \quad (n \geq 1).$$

Les lemmes 7 et 8 résultent respectivement des lemmes 5 et 6 d'une manière semblable, et nous allons donner une démonstration commune des deux derniers lemmes.

Soit $\{M_n\}$ une suite positive croissante, et soit $\varphi(x)$ une fonction paire, non identiquement nulle, telle que

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{(p_n)}(0) = 0, \quad \varphi^{(m)}(0) \neq 0 \quad \text{si } m \neq 0, 2, p_n \quad (n \geq 1),$$

$\{p_n\}$ étant une suite d'entiers positifs pairs ($p_1 > 2$). Supposons que

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq M_n \quad (n \geq 0).$$

Posons

$$\psi(x) = \frac{\varphi''(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \int_0^x (x-t) \varphi^{(4)}(t) dt = \frac{1}{x^2} \int_0^x dy \int_0^y \varphi^{(4)}(u) du.$$

La fonction $\psi(x)$ est paire et non identiquement nulle. On a aussi

$$(20) \quad \psi^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x (x-t) \varphi^{(n+4)}(t) t^n dt.$$

En supposant cette égalité pour n , on la retrouve, après dérivation et intégration par parties pour $n+1$. On voit aussi immédiatement que

$$\psi^{(n)}(0) = [(n+1)(n+2)]^{-1} \varphi^{(n+4)}(0).$$

A partir de (20), par plusieurs intégrations par parties, on obtient facilement l'inégalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{(n)}(x)| dx \leq 2 M_{n+4} + 2 \int_0^{\infty} |\psi^{(n)}(x)| dx < AB^n M_{n+4},$$

où A et B sont des constantes. On voit maintenant facilement comment on passe des lemmes 5 et 6 respectivement aux lemmes 7 et 8. Ainsi, par exemple, pour avoir le lemme 7, à partir du lemme 5, il suffit de

choisir $p_n = q_n + 4$, $M_n = 1$, $g(x) = A^{-1}\psi(B^{-1}x)$. Le passage du lemme 6 au lemme 8 est aussi évident.

LEMME 9. — Soit $\{q_n\}$ une suite d'entiers positifs pairs tels que $\sum \frac{1}{q_n} < \infty$. Il existe une fonction $\Phi(z)$, non identiquement nulle, holomorphe dans le demi-plan $x > 0$, continue sur le demi-plan fermé $x \geq 0$, et une suite $\{b_n\}$ telle que $b_{2\nu-1} = 0$ ($\nu \geq 1$), $b_{q_n} = 0$ ($n \geq 1$), les relations suivantes étant satisfaites pour $x > 0$:

$$\left| \Phi(z) - \sum_1^n b_\nu z^{-\nu} \right| \leq \frac{1}{|z|^n} \quad (n \geq 1),$$

$$|\Phi(z)| = O(|z|) \quad (z \rightarrow 0).$$

Soit $g(x)$ la fonction du lemme 7, et posons

$$\Phi_1(z) = \int_0^\infty e^{-tz} g(t) dt.$$

En intégrant cette expression $n + 1$ fois par parties, on obtient

$$\Phi_1(z) = g(0)z^{-1} + g'(0)z^{-2} + \dots + g^{(n)}(0)z^{-n-1} + \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^\infty e^{-tz} g^{(n+1)}(t) dt,$$

ce qui permet d'écrire pour $x > 0$:

$$\left| z \Phi_1(z) - \sum_1^n g^{(\nu)}(0) z^{-\nu} \right| \leq \frac{1}{|z|^n} \int_0^\infty |g^{(n+1)}(t)| dt \leq \frac{1}{|z|^n} \quad (n \geq 1).$$

Et, pour $n = 1$, la même inégalité donne

$$|z \Phi_1(z)| \leq \frac{1}{|z|}.$$

Il est clair que la fonction $\Phi(z) = z \Phi_1(z)$ et les quantités $b_n = g^{(n)}(0)$ satisfont à la conclusion du lemme.

LEMME 10. — Soit $\{q_n\}$ une suite d'entiers positifs, pairs, croissants. Il existe une fonction $\Phi(z)$, non identiquement nulle, holomorphe dans le demi-plan $x > 0$, continue sur le demi-plan fermé $x \geq 0$, et une suite

$\{b_n\}$ avec $b_m = 0$ pour $m \neq q_n (n \geq 1)$, les relations suivantes étant satisfaites :

$$\left| \Phi(z) - \sum_1^n b_\nu z^{-\nu} \right| \leq q_1 q_2 \dots q_{n+8} |z|^{-n} \quad (n \geq 1),$$

$$|\Phi(z)| = O(|z|) \quad (z \rightarrow 0).$$

Le passage du lemme 8 au lemme 10 se fait exactement de la même manière que celui du lemme 7 au lemme 9.

En combinant le théorème 1 avec le lemme 9, on obtient immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — Soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $x > 0$ et continue sur le demi-plan fermé $x \geq 0$. Supposons qu'il existe une constante positive δ telle qu'on ait

$$F(z) = O(|z|^\delta) \quad (z \rightarrow 0).$$

Supposons qu'il existe une suite positive $\{M_n\}$, telle que $\log M_n$ soit une fonction convexe de n , et une suite $\{a_n\}$ satisfaisant à la condition

$$\left| F(z) - \sum_1^n a_\nu z^{-\nu} \right| \leq M_n |z|^{-n} \quad (n \geq 1, x \geq 0)$$

et aux conditions suivantes :

1° Il existe une suite d'entiers positifs $\{\nu_n\}$ contenant tous les entiers positifs impairs, la fonction de densité inférieure de $\{\nu_n\}$ étant $D.(t)$, sa densité inférieure étant $D. > \frac{1}{2}$. Pour tout m de $\{\nu_n\}$, sauf peut-être pour $m = q_n (n \geq 1)$, où $\{q_n\}$ est une suite d'entiers pairs tels que $\sum \frac{1}{q_n} < \infty$, on a $a_m = 0$.

2° En posant

$$C(\sigma) = \overline{\text{borne}} (n\sigma - \log M_n),$$

on a

$$\int_0^\infty C(\sigma) e^{-\int_0^\sigma \frac{d\tau}{2D.(C(\tau))-1}} d\sigma = \infty.$$

Dans ces conditions $F(z) \equiv 0$ et $a_\nu = 0 (\nu \geq 1)$.

En combinant, par contre, le théorème 1 avec le lemme 10, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *La conclusion du théorème 2 subsiste si l'on remplace les conditions 1° et 2° de ce théorème par les conditions 1° et 2° suivantes :*

1° *Il existe une suite $\{v_n\}$ contenant tous les entiers positifs impairs, la fonction de densité inférieure de $\{v_n\}$ étant $D.(t)$, sa densité inférieure étant $D. > \frac{1}{2}$, et une suite d'entiers positifs croissants pairs $\{q_n\}$ tels que pour tout m , de $\{v_n\}$ sauf, peut-être, pour m appartenant à la suite d'entiers positifs complémentaire à la suite $\{q_n\}$, on a $a_m = 0$.*

2° *En posant*

$$C(\sigma) = \overline{\text{borne}} [n\sigma - \log(q_1 q_2 \dots q_n M_n)],$$

on a

$$\int_0^\infty C(\sigma) e^{-\int_0^\sigma \frac{d\tau}{2D.(C(\tau))-1}} d\sigma = \infty.$$

Pour démontrer, par exemple, le théorème 2, il suffit d'appliquer le théorème 1 aux fonctions $F(z)$ de l'énoncé du théorème 2 et à la fonction $\Phi(z)$ de l'énoncé du lemme 9. Comme, d'après le lemme 9, $\Phi(z) \not\equiv 0$, on a, d'après le théorème 1, $F(z) \equiv 0$. Le passage du théorème 1 et du lemme 10 au théorème 3 est identique.

