

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. PÓLYA

Remarques sur un problème d'algèbre étudié par Laguerre

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 31 (1952), p. 37-47.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__37_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Remarques sur un problème d'algèbre
étudié par Laguerre ;*

PAR G. PÓLYA.

Les travaux de Laguerre sur les équations algébriques constituent la partie la plus remarquable de son œuvre, d'après Poincaré. Le problème qui sera discuté ici est un peu à l'écart du courant principal de ces travaux et les remarques suivantes sont bien élémentaires. Toutefois j'ai tenu à ce que le nom de Laguerre figure dans ce volume dédié à M. Montel dont les travaux ont influencé si profondément les recherches contemporaines sur la situation des racines des équations algébriques.

INTRODUCTION.

1. Dans ce qui suit $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent n variables indépendantes. En introduisant une variable auxiliaire z , posons

$$(1) \quad f(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_n) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n.$$

Ainsi

$$-a_1, \quad a_2, \quad -a_3, \quad \dots, \quad (-1)^n a_n$$

sont les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Posons

$$(2) \quad x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = s_k.$$

On sait que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont des polynomes en $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$. Ce résultat classique est bien différent du théorème suivant dû à Laguerre ⁽¹⁾ :

THÉORÈME 1. — *Les fonctions symétriques élémentaires $a_1, -a_2, a_3, \dots, (-1)^n a_n$ s'expriment rationnellement en fonction de $s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n-1}$.*

La méthode élégante que Laguerre a employée pour démontrer le théorème 1 peut être appliquée à un cas plus général. Considérons $2n$ variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ et posons

$$(3) \quad g(z) = (z - y_1)(z - y_2) \dots (z - y_n) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n,$$

$$(4) \quad y_1^k + y_2^k + \dots + y_n^k = t_k,$$

$$(5) \quad s_k - t_k = u_k,$$

$$(6) \quad \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x_i - y_j) = R.$$

Avec ces définitions nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Les $2n + 1$ quantités*

$$R, Ra_1, Ra_2, \dots, Ra_n; Rb_1, Rb_2, \dots, Rb_n$$

sont des polynomes en $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$ et l'expression de R ne contient pas u_{2n} .

Le théorème 2 affirme que les deux suites de fonctions symétriques élémentaires $-a_1, a_2, -a_3, \dots, (-1)^n a_n; -b_1, b_2, -b_3, \dots, (-1)^n b_n$ s'expriment rationnellement en fonction de $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$. Mais le théorème 2 dit davantage. Il désigne précisément le dénominateur commun de ces $2n$ fonctions rationnelles qui est la résultante (6) des polynomes (1) et (3) et s'exprime comme un polynome en $u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}$. Il est facile à voir (cf. n° 3) qu'on ne peut pas remplacer ce dénominateur commun par un autre de degré moins élevé.

⁽¹⁾ *Œuvres*, t. 1, p. 119-122. Malheureusement, le texte est défiguré par quelques fautes d'impression ou d'écriture.

Le théorème 2 contient le théorème 1. En effet dans le cas particulier où $y_i = -x_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, on a

$$u_{2m-1} = 2s_{2m-1}, \quad u_{2m} = 0$$

pour $m = 1, 2, 3, \dots$ et 2 se réduit à 1, le résultat trouvé par Laguerre. En dérivant 1 de 2 par la spécialisation indiquée, nous obtenons pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ un dénominateur commun d'un degré trop élevé, d'ailleurs le même dénominateur auquel la méthode de Laguerre nous conduirait. Pour obtenir le meilleur dénominateur commun (celui du degré le moins élevé), posons

$$(7) \quad \prod_{\substack{i, \dots, n \\ i < j}} (x_i + x_j) = P;$$

le produit est étendu aux valeurs $1, 2, \dots, n$ de i et de j qui satisfont à l'inégalité $i < j$, et ainsi P est de degré $\frac{n(n-1)}{2}$. Avec cette définition nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Les $n+1$ quantités*

$$P, Pa_1, Pa_2, \dots, Pa_n,$$

sont des polynomes en $s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n-1}$ et l'expression de P ne contient pas s_{2n-1} .

L'expression de P indiquée par le théorème 3 est fondamentale dans cette recherche; je la donne explicitement pour quelques petites valeurs de n . On a

$$\begin{aligned} P &= s_1, \\ 3P &= s_1^3 - s_3, \\ 45P &= s_1^5 - 5s_1^3s_3 + 9s_1s_5 - 5s_3^2, \\ 4725P &= s_1^{10} - 15s_1^7s_3 + 63s_1^5s_5 - 225s_1^3s_7 \\ &\quad + 315s_1^2s_3s_5 - 175s_1s_3^2 + 225s_3s_7 - 189s_5^2 \end{aligned}$$

pour $n = 2, 3, 4, 5$, respectivement.

Nous démontrerons d'abord le théorème 2 puis le théorème 3. Nous n'avons pas à nous occuper de 1 qui découle immédiatement de 2 ou de 3.

Démonstration du théorème 2.

2. Si z est suffisamment grand, nous avons

$$\begin{aligned}\log \frac{g(z)}{f(z)} &= \sum_{i=1}^n \log \frac{z - y_i}{z - x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - y_i}{z} + \frac{x_i^2 - y_i^2}{2z^2} + \frac{x_i^3 - y_i^3}{3z^3} + \dots \right) \\ &= \frac{s_1 - t_1}{z} + \frac{s_2 - t_2}{2z^2} + \frac{s_3 - t_3}{3z^3} + \dots = \frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{2z^2} + \frac{u_3}{3z^3} + \dots;\end{aligned}$$

nous avons utilisé (1), (2), (3), (4) et (5). Posons

$$(8) \quad \frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{2z^2} + \frac{u_3}{3z^3} + \dots + \frac{u_{2n}}{2nz^{2n}} = U(z),$$

et convenons de représenter par $((z^{-n}))$ une série quelconque de la forme

$$\frac{c_m}{z^m} + \frac{c_{m+1}}{z^{m+1}} + \dots$$

convergente pour des valeurs z de module suffisamment grand. Avec cette notation nous avons

$$\log \frac{g(z)}{f(z)} = U(z) + ((z^{-2n-1}))$$

ou

$$\frac{g(z)}{f(z)} = e^{U(z)} + ((z^{-2n-1}))$$

ou

$$(9) \quad f(z) e^{U(z)} = g(z) + ((z^{-n-1})).$$

Posons encore

$$(10) \quad e^{U(z)} = 1 + \frac{\nu_1}{z} + \frac{\nu_2}{z^2} + \frac{\nu_3}{z^3} + \dots,$$

où

$$\begin{aligned}\nu_1 &= u_1, \\ 2\nu_2 &= u_1^2 + u_2, \\ 6\nu_3 &= u_1^3 + 2u_3 + 3u_1u_2, \\ 24\nu_4 &= u_1^4 + 3u_2^2 + 8u_1u_3 + 6u_1^2u_2 + 6u_4, \\ &\dots\end{aligned}$$

En vertu de (2), (4) et (5), ν_m est un polynome en $x_1, \dots, x_n$;

$y_1, \dots, y_n$, homogène de degré m . L'équation (9) exprime que, dans le développement du premier membre les coefficients de z^{-1} , $z^{-2}, \dots, z^{-n}$ s'annulent. En vertu de (1) et (10), nous avons donc

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \varphi_1 a_n + \varphi_2 & a_{n-1} + \varphi_3 & a_{n-2} + \dots + \varphi_n & a_1 = -\varphi_{n+1}, \\ \varphi_2 a_n + \varphi_3 & a_{n-1} + \varphi_4 & a_{n-2} + \dots + \varphi_{n+1} & a_1 = -\varphi_{n+2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ \varphi_n a_n + \varphi_{n+1} & a_{n-1} + \varphi_{n+2} & a_{n-2} + \dots + \varphi_{2n-1} & a_1 = -\varphi_{2n}. \end{array} \right.$$

Le déterminant du système (II) de n équations linéaires aux inconnues $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ est

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_2 & \varphi_3 & \dots & \varphi_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n & \varphi_{n+1} & \dots & \varphi_{2n-1} \end{vmatrix} = V_n,$$

polynome homogène en $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$, de degré n^2 , symétrique en $x_1, \dots, x_n$ et symétrique aussi en $y_1, \dots, y_n$.

3. Si le système (11) a plus d'une solution, son déterminant V_n doit s'annuler. Voici un cas où cela arrive. Si $x_1 = y_1 = \lambda$ et λ varie, $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$ ne changent pas, en vertu de (2), (4) et (5); $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ ne changent pas non plus, en vertu de la définition par (8) et (10). Mais quelques-uns des coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n$ doivent changer avec λ . Donc le déterminant V_n s'annule si $x_1 = y_1$. Ainsi V_n est divisible par $x_1 - y_1$. Mais V_n est symétrique en $x_1, \dots, x_n$ et l'est aussi en $y_1, \dots, y_n$, donc V_n doit être divisible aussi par $x_i - y_j$ pour $i, j = 1, 2, \dots, n$. Finalement, V_n doit être divisible par R [cf. (6)]. Mais V_n et R sont du même degré n^2 et ainsi $\frac{V_n}{R}$ est une constante. Un cas particulier suffit de déterminer la valeur de cette constante; il est commode de choisir

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad y_1 = y_2 = \dots = y_n = -1.$$

Nous obtenons finalement [*cf.* (12)]

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_2 & \varphi_3 & \dots & \varphi_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n & \varphi_{n+1} & \dots & \varphi_{2n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R.$$

Le premier membre de (13) est un polynôme en $u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}$ à coefficients rationnels.

En vertu de (13) le système (11) nous permet d'exprimer $Ra_1, Ra_2, \dots, Ra_n$ comme certains déterminants, polynômes en $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$. Mais les rôles de $a_1, \dots, a_n$ et de $b_1, \dots, b_n$ sont interchangeables et ainsi nous avons obtenu une démonstration complète du théorème 2.

Notre procédé de démonstration nous fournit $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ comme fractions rationnelles en $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$ dont le dénominateur est le déterminant (13). La question se pose si un autre procédé pourrait fournir un dénominateur d'un degré moins élevé. La réponse est non. En effet, si $x_1 = \gamma_1$, les quantités $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ ne peuvent pas être déterminées par $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$, donc certaines fractions deviennent indéterminées, le dénominateur commun s'annule, il est divisible par $x_1 - \gamma_1$, donc par $x_i - \gamma_j$, et finalement par R . Notre raisonnement montre aussi que le polynôme en $u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}$ qui exprime R est absolument irréductible, c'est-à-dire irréductible dans un domaine de rationalité quelconque.

Démonstration du théorème 3.

4. En posant $\gamma_i = -x_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, nous changeons

$$g(z), \quad u_{2m-1}, \quad u_{2m}, \quad U(z), \quad v_m, \quad R$$

en

$$(-1)^n f(-z), \quad 2s_{2m-1}, \quad 0, \quad 2W(z), \quad w_m, \quad 2^n x_1 x_2 \dots x_n P^2$$

respectivement. Nous avons posé

$$(14) \quad \frac{s_1}{z} + \frac{s_3}{3z^3} + \frac{s_5}{5z^5} + \dots + \frac{s_{2n-1}}{(2n-1)z^{2n-1}} = W(z),$$

$$(15) \quad e^{2W(z)} = 1 + \frac{w_1}{z} + \frac{w_2}{z^2} + \frac{w_3}{z^3} + \dots;$$

w_m est un polynôme en $s_1, s_3, \dots, s_{2h-1}$ ou $2h-1 \leq m$. Par exemple,

$$\begin{aligned} w_1 &= 2s_1, \\ w_2 &= 2s_1^2, \\ 3w_3 &= 4s_1^3 + 2s_3, \\ 3w_4 &= 2s_1^4 + 4s_1s_3. \end{aligned}$$

Alors $a_2 = -\lambda^2 + \dots$ est un polynôme de second degré en λ qui dépend effectivement de λ , mais $s_1, s_3, s_5, \dots$ sont des constantes ($s_1 = s_3 = \dots = n-2$). Ceci suffit à démontrer notre affirmation concernant a_2 ; $a_3, a_4, \dots, a_n$ se traitent de la même manière.

Nous savons que a_2 s'exprime rationnellement en fonction de $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$. Nous pouvons en conclure que les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ que nous venons de choisir annulent le dénominateur de a_2 .

7. En vertu de (14) et (15), $w_1, w_2, w_3, \dots$ sont des polynômes en $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$. Par conséquent, le déterminant (17) est aussi un polynôme en $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$; nous allons le représenter par le symbole $W_n[s_h]$. Ainsi $W_n[s_h]$ est le déterminant du système (16) et $W_{n-1}[s_h]$ le déterminant du système (19). Supposons que $W_n[s_h]$ et $W_{n-1}[s_h]$ soient différents de 0. Alors on tire de (16) et de (19) que

$$(20) \quad a_2 = \frac{H}{W_n[s_h]} = \frac{H'}{W_{n-1}[s_h]};$$

H et H' sont certains polynômes en $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$, donc a_2 est une fonction rationnelle de ces quantités. Réduite à sa plus simple expression, cette fonction rationnelle aura un dénominateur qui est un commun diviseur de $W_n[s_h]$ et $W_{n-1}[s_h]$. En vertu du lemme du n° 6, ce commun diviseur ne peut pas être une simple constante. Il ne peut pas être $W_n[s_h]$ qui est du « poids » n^2 , supérieur au poids de $W_{n-1}[s_h]$ qui n'est que $(n-1)^2$ (2). Il suit de là que $W_n[s_h]$ est décomposable en un produit de deux facteurs

$$(21) \quad W_n[s_h] = D[s_h] D'[s_h],$$

où $D[s_h]$ et $D'[s_h]$ sont des polynômes en $s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n-1}$ et ni $D[s_h]$, ni $D'[s_h]$ ne sont constantes.

(2) D'après la terminologie usuelle de la théorie des fonctions symétriques, $k+l+\dots+p$ est le poids de $cs_k s_l \dots s_p$ si c est un coefficient numérique. Un polynôme possède un poids si chacun de ses termes a le même poids qu'on appelle justement le poids du polynôme. Le poids d'un produit est la somme des poids des facteurs; le poids de w_m est m , etc.

En combinant (17) et (21), nous obtenons

$$(22) \quad D[x_1^h + \dots + x_n^h] D'[x_1^h + \dots + x_n^h] \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^n x_1 x_2 \dots x_n \cdot P^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^n x_1 x_2 \dots x_n P \cdot P.$$

Dans la seconde ligne de (22), nous avons mis en évidence toutes les *décompositions* essentiellement différentes du second membre de (17) en deux facteurs *symétriques non constants* : évidemment il n'y en a que deux. (Nous considérons les facteurs constants comme non essentiels.) La décomposition dans la première ligne de (22) doit être essentiellement la même qu'une des deux décompositions dans la seconde ligne de (22). Mais, vu le lemme du n° 6, il n'y a qu'un choix possible : $a_n = x_1 x_2 \dots x_n$ n'est pas un polynôme en $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$ et, par conséquent, en négligeant un facteur non essentiel (constant) et en changeant la notation s'il le faut nous devons avoir

$$(23) \quad D[x_1^h + \dots + x_n^h] = x_1 x_2 \dots x_n P.$$

En changeant la notation encore une fois nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Le déterminant (17) formé des coefficients du développement (15) se décompose en facteurs comme suit :*

$$(24) \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ w_2 & w_3 & \dots & w_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n & w_{n+1} & \dots & w_{2n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^n D_n[s_h] D_{n-1}[s_h],$$

où $D_n[s_h]$ et $D_{n-1}[s_h]$ sont des polynômes à coefficients rationnels caractérisés par les relations

$$(25) \quad D_n[x_1^h + \dots + x_n^h] = x_1 \dots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j),$$

$$(26) \quad D_{n-1}[x_1^h + \dots + x_n^h] = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j).$$

8. Le théorème 4 affirme un peu plus que nous n'avons démontré,

mais quelques indications suffiront pour combler les lacunes qui restent.

En posant $x_n = 0$ dans l'équation (26), nous obtenons

$$D_{n-1}[x_1^h + \dots + x_{n-1}^h] = x_1 \dots x_{n-1} \prod_{i < j}^{1, \dots, n-1} (x_i + x_j).$$

Ainsi $D_{n-1}[s_h]$ joue le même rôle dans la décomposition de $W_{n-1}[s_h]$ que $D_n[s_h]$ joue dans celle de $W_n[s_h]$, ce qui justifie la notation employée.

Le raisonnement du n° 7 montre que $D[s_h]$ et $D'[s_h]$ sont des polynomes absolument irréductibles en $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$. Dans le cas contraire, $x_1 \dots x_n P^2$ pourrait être décomposé en produit de trois fonctions symétriques non constantes, chacune exprimable comme un polynome en $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$; ce qui est impossible en vue du lemme du n° 6. Nous pouvons donc obtenir $D_{n-1}[s_h]$ comme le plus grand commun diviseur de $W_{n-1}[s_h]$ et de $W_n[s_h]$ par des opérations rationnelles et ainsi $D_{n-1}[s_h]$ aura des coefficients rationnels.

L'expression de $D_n[s_h]$ est donnée pour $n = 1, 2, 3, 4$ à la fin du n° 1. Voici un exemple du théorème 4 :

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_1 & w_3 \\ w_2 & w_3 & w_4 \\ w_3 & w_4 & w_5 \end{vmatrix} = -8 \frac{s_1^2 - s_3}{3} \frac{s_1^6 - 5s_1^3 s_3 + 9s_1 s_5 - 5s_3^2}{45}.$$

9. Le théorème 3 découle immédiatement de (26). En effet, remplaçons-y $n-1$ par n , puis x_{n+1} par $-z$. Il vient

$$\begin{aligned} (27) \quad D_n[x_1^h + \dots + x_n^n - z^h] &= D_n[s_h - z^h] \\ &= (x_1 - z) \dots (x_n - z) \prod_{i < j}^{1, \dots, n} (x_i + x_j) \\ &= (-1)^n f(z) D_{n-1}[s_h] \\ &= (-1)^n D_{n-1}[s_h] (z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) \end{aligned}$$

et nous n'avons qu'à comparer les coefficients des différentes puissances de z .

Observons que $D_{n-1}[s_h]$ est un polynôme en $s_1, s_3, \dots, s_{2n-3}$. Par exemple, si $n=3$, nous avons

$$\begin{aligned} & - \frac{s_1^3 - s_3}{3} (x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3) \\ & = \frac{(s_1 - x)^6 - 5(s_1 - x)^3(s_3 - x^3) + 9(s_1 - x)(s_3 - x^3) - 5(s_3 - x^3)^2}{45}, \end{aligned}$$

ce qui donne, après réductions faciles,

$$\begin{aligned} - a_1 &= s_1, \\ a_2 &= \frac{2s_1^5 - 5s_1^2 s_3 + 3s_5}{5(s_1^3 - s_3)}, \\ - a_3 &= \frac{s_1^6 - 5s_1^3 s_3 + 9s_1 s_5 - 5s_3^2}{15(s_1^3 - s_3)}. \end{aligned}$$

Le calcul explicite dépend donc de l'expression de $D_n[s_h]$. La loi générale des termes de $D_n[s_h]$ ne paraît pas tout à fait simple, mais, à partir de (24), nous pouvons en obtenir le terme principal

$$(28) \quad D_n[s_h] = \frac{s_1^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1^n \cdot 3^{n-1} \cdot 5^{n-2} \dots (2n-3)^2 \cdot (2n-1)} + \dots$$

