JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. MILLOUX

Sur une propriété des fonctions méromorphes et de leurs dérivées

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 1-18.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__1_0>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Sur une propriété des fonctions méromorphes et de leurs dérivées;

PAR H. MILLOUX.

INTRODUCTION.

La recherche de critères de normalité de familles de fonctions analytiques constitue l'un des points essentiels de la théorie des familles normales. Sous l'impulsion du créateur de cette théorie, la recherche de critères s'est étendue à des familles de fonctions considérées en même temps que leurs dérivées. Citons deux exemples :

En complétant une importante étude de M. Bureau, M. Miranda a achevé en 1935 la démonstration du critère suivant, pressenti par M. Paul Montel : une famille de fonctions holomorphes dans un domaine où elles ne prennent pas la valeur zéro et dont les dérivées ne prennent pas la valeur 1, est normale dans ce domaine.

Le deuxième exemple est fourni par l'étude des conditions suffisantes permettant d'affirmer qui si certaines familles de fonctions holomorphes sont normales, les familles des dérivées sont aussi normales. M. Mandelbrojt a précisé certaines de conditions [1]. L'un des points de cette étude complété par M. Biernacki [2], a servi de base à ce dernier pour démontrer que toute fonction entière d'ordre fini possède, en commun avec ses dérivées et ses intégrales successives, au moins une direction de Julia.

La question se posait de savoir si cette dernière propriété s'étend aux directions de Borel (nous dirons : directions de Borel-Valiron). Cette question a été récemment résolue et complétée [3]. En particulier il a été démontré que *toute direction de Borel-Valiron d'une fonction entière d'ordre fini se conserve dans l'intégration.* A l'origine de ce théorème, qui s'étend à une classe importante de fonctions entières d'ordre nul, se place une propriété des fonctions holomorphes dans un cercle, propriété qu'on peut énoncer qualitativement sous la forme suivante : si le module d'une telle fonction est supérieur à 1 et si la dérivée de cette fonction s'annule un grand nombre de fois dans un cercle intérieur, alors dans ce dernier cercle, la variation relative de la fonction est très faible.

Cette propriété a été démontrée à l'aide de la formule de Jensen et et du lemme de Schwarz. Le but de cet article est d'en donner une nouvelle démonstration, basée sur les théorèmes de M. R. Nevanlinna et s'appliquant aux fonctions méromorphes. Nous verrons notamment (th. 4) que si une fonction méromorphe dans le cercle unité ne prend pas plus de n fois trois valeurs a, b, c, dont les distances sphériques prises deux à deux sont inférieures à e^{-n}, si la dérivée de la fonction s'annule plus de n' fois dans un cercle intérieur et si le rappot $\frac{n'}{n}$ est assez grand, alors la variation, dans ce cercle intérieur presque tout entier, du point représentant la fonction donnée sur la sphère de Riemann, est très faible.

---

(1) S. MANDELBROJT, *Sur les suites de fonctions holomorphes* (*J. Math. pures et appl.*, t. **8**, 1929, p. 179-195).

(2) M. BIERNACKI, *Sur la théorie des fonctions entières* (*Bull. Acad. polonaise Sc.*, Varsovie, 1929, p. 529-590).

(3) H. MILLOUX, *Sur les directions de Borel des fonctions entières, de leurs dérivées et de leurs intégrales* (*J. d'Anal. math.*, Jérusalem, à paraître en 1952, p. 244 et suiv.).

Un résultat plus précis est obtenu au préalable (th. 3) lorsque les trois valeurs a, b, c, sont 0, 1, ∞.

Le théorème 4 pourra servir ultérieurement dans l'étude comparative des directions de Borel-Valiron d'une fonction méromorphe d'ordre fini et de sa dérivée.

1. Rappelons d'abord le théorème suivant, dont la démonstration est basée sur la formule de Jensen et le lemme de Schwarz (4) :

THÉORÈME 1. — *Soit $g(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, où son module est supérieur à 1. On désigne par n' une quantité au moins égale au nombre des zéros de $g'(x)$ situés dans le cercle $|x| \leqq \mu < 1$ et l'on suppose que $(1-\mu)^3 n'$ dépasse une certaine constante numérique a. Pour $|x| \leqq \mu$ on a alors les inégalités suivantes :*

$$1-\delta(\mu) < \frac{\log|g(x)|}{\log|g(0)|} < 1+\delta(\mu), \tag{1}$$

avec

$$\log\delta(\mu) = -\frac{(1-\mu)^2}{10}n'. \tag{2}$$

Il résulte du théorème 1 que si n' est très grand, la variation relative de $\log|g(x)|$ est très faible dans le cercle intérieur. *A fortiori*, il en est de même de la variation relative de $|g(x)|$. C'est ce résultat que nous allons retrouver à partir de la théorie de M. R. Nevanlinna.

2. Nous allons nous appuyer sur une forme précise de la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna. Soit $g(x)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité; nous supposons que l'origine n'est ni un zéro, ni un pôle de cette fonction et nous désignons $g(0)$ par c_0 et $g'(0)$ par c_1. Pour $\frac{1}{2} < r < R < 1$, on a l'inégalité (5)

$$m\left(r, \frac{g'}{g}\right) < 24 + 2\log 2 + 3\log\frac{1}{R-r} + 4\overset{+}{\log} T\left(R, \frac{g}{c_0}\right),$$

(4) H. MILLOUX, *loc. cit. Voir* th. 2, p. 257.

(5) R. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1929). *Voir* inégalité (5), p. 61; on l'applique ici à la fonction $\frac{g(x)}{c_0}$.

et comme

$$T\left(r, \frac{g}{c_0}\right) \leqq T(r, g) + \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|},$$

il vient

$$(3) \qquad m\left(r, \frac{g'}{g}\right) < 29 + 3 \log \frac{1}{R-r} + 4 \overset{+}{\log}\, \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|} + 4 \overset{+}{\log} T(R, g).$$

Toujours d'après M. R. Nevanlinna ([6]), on a

$$(4) \qquad m\left(r, \frac{1}{g}\right) + m\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + m(r, g) < 2\,T(r, g) - N_1(r, g) + S(r')$$

avec

$$(5) \qquad \begin{cases} N_1(r, g) = [2N(r, g) - N(r, g')] + N\left(r, \dfrac{1}{g'}\right), \\ S(r) = 2m\left(r, \dfrac{g'}{g}\right) + m\left(r, \dfrac{g'}{g-1}\right) + \log \dfrac{3}{|c_1|} + 4 \log 2. \end{cases}$$

On suppose ici c_1 non nul.

Le crochet intervenant dans la définition de l'indice N_1 n'intéresse que les pôles multiples de g. Si a est un tel pôle et si son ordre est q, ce point intervient dans le crochet avec la multiplicité $q-1$. Dans tous les cas, $N_1(r, g)$ est au moins égal à $N\left(r, \frac{1}{g'}\right)$.

Il est utile de remarquer que $N_1\left(r, \frac{1}{g}\right) = N_1(r, g)$. En effet, il ne pourrait y avoir de doute que pour les zéros multiples de g : on les retrouve de part et d'autre avec les mêmes coefficients, dans les deux membres de l'égalité précédente. De plus, d'après sa définition, l'indice N_1 ne change pas si l'on remplace g par $\alpha g + \beta$ (α et β étant des constantes). En combinant ces deux propriétés, on constate que *l'indice* $N_1(r, g)$ *est invariant quand on opère une transformation homographique à coefficients constants sur la fonction* g.

Utilisons maintenant l'inégalité (3) pour majorer $S(r)$. En tenant compte de ce que l'on a

$$\overset{+}{\log} T(R, g-1) < \overset{+}{\log} T(R, g) + \log 2,$$

il vient

$$S(r) < 12 \overset{+}{\log} T(R, g) + 9 \log \frac{1}{R-r} + 8 \overset{+}{\log}\, \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|} + 4 \overset{+}{\log}\, \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0 - 1|} + \log \frac{1}{|c_1|} + 95.$$

([6]) *Loc. cit.* (*Voir* p. 66).

Quant au premier membre de (4), il s'écrit

$$\mathrm{T}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \mathrm{T}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + \mathrm{T}(r, g) - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) - \mathrm{N}(r, g).$$

D'après le premier théorème de R. Nevanlinna et la formule de Jensen, l'ensemble des trois premiers termes précédents diffère de moins de $\log 2$ de l'expression $3\mathrm{T}(r, g) - \log|c_0(c_0 - 1)|$.

D'où la forme suivante de la deuxième inégalité de R. Nevanlinna :

$$\begin{aligned}(6) \quad & \mathrm{T}(r, g) - 12 \log \mathrm{T}(\mathrm{R}, g) - 9 \log \frac{1}{\mathrm{R} - r} \\ & < \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + \mathrm{N}(r, g) - \mathrm{N}_1(r, g) + 8 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|} \\ & \quad + 4 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0 - 1|} + \log|c_0(c_0 - 1)| + \log \frac{1}{|c_1|} + 96.\end{aligned}$$

Cette formule suppose que c_0, $c_0 - 1$ et c_1 ne sont pas nuls.

Nous allons distinguer deux cas, suivant que $|c_0|$ est inférieur ou égal à e, ou non.

Premier cas : $|c_0| \leqq e$. — Un calcul numérique simple montre que l'on a

$$4 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0 - 1|} + \log|c_0 - 1| < 4 \log 4 - 4 < 2.$$

Deuxième cas : $|c_0| > e$. — On applique alors la formule (6) à la fonction $\frac{1}{g}$; la somme des quatre premiers termes du second membre reste inchangée. La somme des cinq derniers devient

$$8 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} |c_0| + 4 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \left| \frac{c_0}{c_0 - 1} \right| + \log \left| 1 - \frac{1}{c_0} \right| + \log \left| \frac{c_0}{c_1} \right| + 96,$$

expression qui est inférieure à

$$8 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} |c_0| + \log \left| \frac{c_0}{c_1} \right| + 97.$$

Dans tous les cas, on peut donc écrire l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}(6') \quad & \mathrm{T}(r, h) - 12 \overset{+}{\log} \mathrm{T}(\mathrm{R}, h) - 9 \log \frac{1}{\mathrm{R} - r} \\ & < \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + \mathrm{N}(r, g) \\ & \quad - \mathrm{N}_1(r, g) + 8 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} |c_0| + 8 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|} + \log \left| \frac{c_0}{c_1} \right| + 98,\end{aligned}$$

où h est, tantôt la fonction g, tantôt la fonction $\frac{1}{g}$.

3. Nous allons étudier le premier membre de l'inégalité (6') par la méthode de M. Borel sur les fonctions croissantes, sous la forme précise que lui a donné M. Bureau [7] :

Soit $U(r)$ *une fonction réelle positive non décroissante pour* $0 < r < 1$ *et satisfaisant à l'inégalité*

$$U(r) \leqq \sigma + \sigma_1 \log \frac{1}{R - r} + \sigma_2 \overset{+}{\log} U(R), \tag{7}$$

quel que soit le choix du couple r, R, *avec*

$$r_0 < r < R < 1, \qquad \sigma \geqq 0, \qquad \sigma_1 \geqq 2\sigma_2 > 8.$$

Alors on a, lorsque r *dépasse* r_0 *et* $1 - \frac{1}{\sigma_2}$,

$$U(r) \leqq \sigma(\sigma_2 + 1) + \sigma_1(\sigma_2 + 3) \log \frac{1}{1 - r}. \tag{8}$$

En fait, les coefficients de cette dernière inégalité peuvent être améliorés, par exemple en reportant la majoration (8) dans le second membre de (7), après avoir choisi $R = \frac{1 + r}{2}$. Ainsi, dans le cas où $\sigma = 0$, $\sigma_1 = 24$, $\sigma_2 = 12$ $\left(\text{donc } r \geqq \frac{11}{12}\right)$, il vient, après un calcul numérique simple,

$$U(r) < 75 + 28 \log \frac{1}{1 - r}. \tag{8'}$$

Transformons quelque peu cet énoncé par homothétie, en supposant

$$r_0 < r < R < r_1 < 1.$$

Nous ramenons au cas précédent en remplaçant r_0, r et R respectivement par $r'_0 = \frac{r_0}{r_1}$, $\frac{r}{r_1}$ et $\frac{R}{r_1}$. *Si donc, pour tout couple* r, R *de l'intervalle* r'_0, r_1, *on a l'inégalité*

$$U(r) \leqq 24 \log \frac{r_1}{R - r} + 12 \overset{+}{\log} U(R), \tag{9}$$

---

(7) Sur ce sujet consulter : G. Valiron, *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées* (*Act. Sc. et Ind.*, Hermann, Paris, 1937, n° 570). *Voir* p. 12.

alors, pour

$$r'_0 < r, \qquad \frac{11}{12} r_1 \leqq r < r_1,$$

on a l'inégalité

$$(10) \qquad \mathrm{U}(r) < 75 + 28 \log \frac{r_1}{r_1 - r}.$$

Remarque I. — Supposons, pour fixer les idées, $r_1 \geqq 0{,}95$. Alors l'inégalité (9) est entraînée par l'inégalité

$$(9') \qquad \mathrm{U}(r) - 24 \log \frac{1}{\mathrm{R} - r} - 12 \overset{+}{\log} \mathrm{U}(\mathrm{R}) \leqq -2$$

et, d'autre part, l'inégalité (10) entraîne l'inégalité

$$(10') \qquad \mathrm{U}(r) < 75 + 28 \log \frac{1}{r_1 - r}.$$

Remarque II. — L'inégalité (10′) entraîne la propriété suivante : le premier membre de l'inégalité (9′) est supérieur à l'expression

$$-24 \log \frac{1}{\mathrm{R} - r} - 12 \overset{+}{\log} \log \frac{1}{r_1 - \mathrm{R}} - 50.$$

Il suffit, pour le voir, de majorer le dernier terme de ce premier membre en utilisant (10′).

En particulier, si l'on choisit

$$1 - r = 2(1 - r_1), \qquad \mathrm{R} = \frac{r + r_1}{2},$$

l'expression précédente est elle-même supérieure à

$$-28 \log \frac{1}{1 - r} - 92.$$

Les conditions $\frac{11}{12} r_1 \leqq r$ et $r_1 \geqq 0{,}95$ sont vérifiées si l'on suppose $r \geqq 0{,}9$. Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Lemme. — *Soit* $\mathrm{U}(t)$ *une fonction positive non décroissante dans l'intervalle* $r \leqq t \leqq r_1$, *avec*

$$r \geqq 0{,}9, \qquad 1 - r = 2(1 - r_1).$$

L'un ou l'autre des deux cas suivants se présente nécessairement :

Premier cas. — Dans l'intervalle précédent, on peut trouver deux nombres r', $R'(r' < R')$ *tels que l'on ait l'inégalité*

$$U(r') - 24 \log \frac{1}{R' - r'} - 12 \overset{+}{\log} U(R') > -2$$

et, a fortiori,

$$U(r') - 9 \log \frac{1}{R' - r'} - 12 \overset{+}{\log} U(R') > 53.$$

Deuxième cas. — A r, *on peut associer* $R(r < R < r_1)$ *de façon que l'on ait l'inégalité*

$$U(r) - 24 \log \frac{1}{R - r} - 12 \overset{+}{\log} U(R) > -28 \log \frac{1}{1 - r} - 92$$

et, a fortiori

$$U(r) - 9 \log \frac{1}{R - r} - 12 \overset{+}{\log} U(R) > -13 \log \frac{1}{1 - r} - 65.$$

Remarque. — L'inégalité concluant le deuxième cas est, *a fortiori*, vérifiée dans le premier cas, après changement du couple (r, R) en le couple (r', R').

4. Appliquons le lemme précédent à l'étude faite au paragraphe **2**, en faisant $U(r) = T(r, h)$. Nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* $g(x)$ *une fonction méromorphe dans le cercle unité du plan* x *et telle que* $g(0)$ *est différent de* 0, 1, ∞ *et* $g'(0)$ *différent de* 0. *On a l'inégalité suivante :*

$$(11)\quad \log \left| \frac{g(0)}{g'(0)} \right| > N_1(r', g) - N\left(r', \frac{1}{g}\right) - N\left(r', \frac{1}{g - 1}\right) - N(r', g)$$
$$- 13 \log \frac{1}{1 - r'} - 8 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} |g(0)| - 8 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{|g(0)|} - 163,$$

avec

$$(12)\qquad N_1(r' g) = 2N(r', g) - N(r', g') + N\left(r', \frac{1}{g'}\right) \geqq N\left(r', \frac{1}{g'}\right).$$

Quant à r', *c'est une certaine quantité comprise entre* r *et* $1 - \frac{1 - r}{2}$, r *étant un quantité arbitraire comprise entre* $0{,}9$ *et* 1.

5. Avant de continuer cette étude, rappelons quelques définitions et propriétés [8]. Étant donné deux points a et b intérieurs au cercle unité, on appelle pseudo-distance de ces deux points une expression qui se réduit à la distance euclidienne lorsque l'un des points est à l'origine et qui est invariante dans toute transformation homographique du cercle sur lui-même.

Soit n points fixes intérieurs au cercle et un point variable M. Formons le produit des pseudo-distances du point variable aux points fixes. Les points M pour lesquels le logarithme de ce produit est inférieur à $-7n$ constituent des domaines appelés *domaines d'exclusion,* qui peuvent être enfermés dans des cercles en nombre au plus égal à n, intérieurs au cercle unité et dont la somme des pseudo-rayons (pseudo-distance constante d'un point du cercle au centre non euclidien de ce cercle) est inférieur à 0,01.

Ces cercles s'appellent *cercles d'exclusion*; les points intérieurs à ces cercles constituent un ou plusieurs domaines connexes intérieurs au cercle unité et dont aucun ne peut traverser toute couronne circulaire suffisamment épaisse. D'une façon plus précise, si u et v sont les rayons des cercles frontières ($u < v < 1$), lesquels sont centrés en O et si l'on a l'inégalité $\frac{1-v}{1-u} < \frac{49}{51}$, alors il existe un cercle de centre O, intérieur à la couronne et dont tous les points sont extérieurs aux cercles d'exclusion.

D'après leur définition, sur la frontière des domaines d'exclusion, le logarithme du produit des pseudo-distances aux n points fixes est égal à $-7n$. Donc *les domaines d'exclusion se correspondent dans une transformation conforme du cercle unité sur lui-même.* On peut, par suite, faire correspondre également les cercles d'exclusion.

Enfin, le pseudo-rayon d'un cercle étant inférieur ou égal à son rayon, étant donné deux points situés hors des cercles d'exclusion, il est toujours possible de les joindre par une courbe composée de segments de droite et d'arcs de cercle, dont la longueur (euclidienne) est inférieure à $2 + 0{,}01\,\pi < 2{,}04$.

---

[8] *Voir* H. MILLOUX, *loc. cit.*, p. 258-260.

Utilité des pseudo-distances. — On est conduit très souvent à faire des transformations conformes du cercle unité sur lui-même, de façon à amener un point déterminé à l'origine. Or, le produit des distances euclidiennes de l'origine à certains points intérieurs au cercle unité s'introduit naturellement dans les indices $N\left(r, \frac{1}{g-a}\right)$. Dans certaines études, il est nécessaire de pouvoir majorer ces indices.

Ainsi, supposons que dans le cercle unité du plan x, le nombre total des zéros de $g(x)$, $g(x-1)$ et $\frac{1}{g(x)}$ soit au plus égal à n et soit p le nombre de ces zéros situés dans le cercle $|x| \leqq r' < 1$. Supposons encore que l'origine O soit hors des cercles d'exclusion γ relatifs aux zéros précédents. Alors, on a l'inégalité

$$N\left(r', \frac{1}{g}\right) + N\left(r', \frac{1}{g-1}\right) + N(r', g) < 7p + p\log r' < 7p \leqq 7n.$$

L'utilité d'une telle inégalité est évidente quand on se reporte à l'inégalité (11).

6. Poursuivons maintenant l'étude de la fonction méromorphe $g(x)$ à partir du théorème 2, en introduisant les hypothèses complémentaires suivantes :

A. Dans le cercle unité, la fonction $g(x)$ ne prend pas plus de n fois au total les valeurs 0, 1, ∞.

B. Dans le cercle $|x| \leqq \mu$ $(0,8 \leqq \mu < 1)$, le nombre total des zéros de $g'(x)$ et de pôles multipless de $g(x)$, chacun de ces derniers étant pris avec son ordre de multiplicité diminué d'une unité, est au moins égal à n'.

Rappelons que ces points (zéros de g' et pôles multiples) sont ceux qui interviennent dans la définition de l'indice N_1 et que cet indice N_1 est invariant si l'on change g en $\frac{1}{g}$.

C. L'origine est en dehors des cercles d'exclusion relatifs aux zéros de g, $1-g$, $\frac{1}{g}$.

D. La fonction $g(x)$ n'est ni trop petite, ni trop grande à l'origine. D'une facon précise,

$$-\mathrm{D} \leqq \log|g(0)| \leqq \mathrm{D} \qquad (\mathrm{D} > e).$$

Ceci posé, choisissons $r = 1 - \frac{1-\mu}{2}$, d'où $r \geqq 0{,}9$ et $1 - r' > \frac{1-\mu}{4}$. On a donc

$$\mathrm{N}_1(r', g) \geqq n' \log \frac{r'}{\mu} > \frac{n'(1-\mu)}{3},$$

d'où, en application de l'inégalité (11),

$$(13) \qquad \log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right| > \frac{n'(1-\mu)}{3} - 7n - 13 \log \frac{1}{1-\mu} - 8 \log \mathrm{D} - 182.$$

Cette inégalité est évidemment vérifiée encore si $g'(0)$ est nul.

7. Nous nous proposons maintenant d'étudier le comportement d'une fonction $g(x)$ méromorphe dans le cercle unité, ne prenant qu'un petit nombre de fois les valeurs 0, 1, ∞ (ou plus généralement trois valeurs distinctes) et dont la dérivée s'annule un grand nombre de fois dans le cercle intérieur $|x| \leqq \lambda (\lambda \geqq 0{,}8)$. Nous allons voir que dans le domaine Δ constitué par l'intérieur du cercle $|x| \leqq \lambda$ duquel on a enlevé les points intérieurs aux cercles d'exclusion, la fonction $g(x)$ varie relativement très peu.

Nous allons faire les hypothèses suivantes :

A'. Identique à l'hypothèse A du paragraphe **6**;

B'. Identique à l'hypothèse B du paragraphe **6**, après remplacement de la lettre μ par la lettre λ;

C'. On suppose vérifiées les inégalités suivantes :

$$(14) \qquad n'(1-\lambda)^3 > 10^6, \qquad n < 10^{-3} n'(1-\lambda)^3.$$

Ceci posé, distinguons deux cas, suivant que dans le domaine Δ la fonction $g(x)$ n'est pas uniformément voisine, soit de ∞, soit de 0, ou bien est uniformément voisine de l'une de ces deux valeurs.

Premier cas. — Dans le domaine Δ il existe au moins un point x_0 en lequel on a

$$-D < \log|g(x_0)| < D, \tag{15}$$

avec

$$\log D = 10^{-2} n'(1-\lambda)^2. \tag{15'}$$

Si nous effectuons une transformation conforme du cercle unité du plan x sur le cercle unité du plan u, de façon qu'un point $x = \alpha$ de module au plus égal à λ corresponde au point $u = 0$, alors au cercle $|x| \leqq \lambda$ correspond un cercle dont les points sont situés à une distance de l'origine inférieure ou égale à $\mu = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$, comme le montre la formule de transformation

$$u = \frac{x-\alpha}{1-x\bar{\alpha}}.$$

On remarquera que $1-\mu$ est compris entre $\frac{(1-\lambda)^2}{1,64}$ et $\frac{(1-\lambda)^2}{2}$. Effectuons la transformation homographique

$$u = \frac{x-x_0}{1-x.\bar{x}_0}.$$

Soit $G(u)$ la fonction transformée de $g(x)$. On a

$$G'(0) = (1-|x_0|^2)\, g'(x_0).$$

Le point $u = 0$ est en dehors des cercles d'exclusion relatifs aux zéros de G, $G-1$, $\frac{1}{G}$, d'après la position du point x_0. D'autre part, le nombre total des zéros de $G'(u)$, augmenté du nombre des pôles multiples de $G(u)$, est au moins égal à n' dans le cercle de centre O et de rayon $1 - \frac{(1-\lambda)^2}{2}$. On se trouve dans les conditions d'application, à cette fonction, de l'inégalité (13) qui donne ici

$$\log\left|\frac{G(0)}{G'(0)}\right| > \frac{n'(1-\lambda)^2}{6} - 7n - 13\log\frac{2}{(1-\lambda)^2} - 8.10^{-2} n'(1-\lambda)^2 - 182,$$

d'où plus simplement, en utilisant les inégalités (14) et après un calcul numérique simple,

$$\log\left|\frac{G(0)}{G'(0)}\right| > 0,08\, n'(1-\lambda)^2.$$

D'où résulte que l'on a, au point $x = x_0$, l'inégalité

$$(16)\quad \log\left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right| < -\log(1-\lambda^2) - 0{,}08\, n'(1-\lambda)^2 < -0{,}07\, n'(1-\lambda)^2.$$

Nous allons maintenant démontrer que *le premier membre de l'inégalité* (16) *est inférieur à* $-0{,}06\, n'(1-\lambda)^2$ *pour tout point* x *du domaine* Δ.

Tout d'abord, cette propriété est vérifiée, nous venons de le voir, en x_0 et, par continuité, au voisinage de x_0. Supposons qu'elle ne soit pas vérifiée dans tout Δ. Dans ce domaine, il existe donc un point $x = x_1$ en lequel on a l'inégalité

$$(17)\quad \log\left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right| \geqq -0{,}06\, n'(1-\lambda)^2,$$

laquelle n'est pas vérifiée au voisinage de x_0.

Joignons x_0 et x_1 par la ligne L la plus courte en dehors des cercles d'exclusion. Comme nous l'avons vu au paragraphe **5**, la longueur euclidienne de cette ligne L est inférieure à 2,04. Quitte à rapprocher x_1 du point x_0 sur la ligne, on peut toujours supposer que le premier membre de (17) est inférieur au second membre tant que x reste entre x_0 et x_1 sur la ligne L et égal au second membre en x_1.

Il résulte de ce qui précède qu'en évaluant $\log g(x_1)$ à partir de $\log g(x_0)$ par le déplacement de x sur la ligne L, on a l'inégalité suivante :

$$|\log g(x_1) - \log g(x_0)| < 2{,}04\, e^{-0{,}06 n'(1-\lambda)^2} = \varepsilon.$$

Cette inégalité montre que $\log|g(x_1)|$ est compris entre $\log|g(x_0)| + \varepsilon$ et $\log|g(x_1)| - \varepsilon$, donc *a fortiori* entre $-D-\varepsilon$ et $D+\varepsilon$.

Effectuons la transformation

$$v = \frac{x - x_1}{1 - x.\bar{x}_1}.$$

Soit $H(v)$ la transformée de $g(x)$. On a

$$H'(0) = (1 - |x_1|^2)\, g'(x_1),$$

d'où, en rappelant que l'inégalité (17) est vérifiée pour $x = x_1$,

$$(18)\quad \log\left|\frac{H(0)}{H'(0)}\right| < \log\frac{1}{1-\lambda^2} + 0{,}06\, n'(1-\lambda)^2.$$

On peut encore appliquer les résultats du paragraphe **6** à la fonction $H(v)$. Dans l'inégalité (13), on remplace toujours $1-\mu$ par $\frac{(1-\lambda)^2}{2}$. Par contre, d'après ce qui précède, on remplace D par $D+\varepsilon$, D étant défini par (15'). La conclusion reste cependant la même que pour la fonction $G(u)$

$$\log\left|\frac{H(0)}{H'(0)}\right| > 0,08\, n'(1-\lambda)^2.$$

Elle est en contradiction avec l'inégalité (18). Par suite, l'hypothèse sur laquelle nous nous sommes basés est fausse. En d'autres termes, *l'inégalité* (17) *n'est vérifiée en aucun point du domaine* Δ. La propriété suivante en résulte :

Soit x' et x'' deux points quelconques de ce domaine. En les joignant par un chemin convenable et en définissant $\log g(x'')$ par continuité à partir de $\log g(x')$, on a l'inégalité

$$(19) \qquad |\log g(x') - \log g(x'')| < 2,04\, e^{-0,06 n'(1-\lambda)^2},$$

d'où résulte

$$(19') \qquad \left|\frac{g(x')-g(x'')}{g(x'')}\right| < e^{-0,05 n'(1-\lambda)^2}.$$

8. Résumons les résultats obtenus dans l'étude de ce premier cas.

THÉORÈME 3. — *Soit $g(x)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, où elle ne prend pas plus de n fois les valeurs* 0, 1, ∞. *Soit Δ le domaine intérieur au cercle $|x| \leqq \lambda < 1$, dont tous les points sont extérieurs aux cercles d'exclusion (voir* § **5**) *entourant les zéros de g, $g-1$, $\frac{1}{g}$; rappelons que l'ensemble de ces cercles est très petit, puisque la somme de leurs pseudo-rayons est inférieure à* $0,01$.

Supposons, d'autre part, que dans le cercle $|x| \leqq \lambda$, le nombre des zéros de $g'(x)$, augmenté du nombre des pôles multiples de $g(x)$, avec indice de multiplicité diminué d'une unité, soit au moins égal à n'.

Supposons enfin vérifiées les inégalités suivantes :

$$(20) \qquad n'(1-\lambda)^3 > 10^6, \qquad n < 10^{-3}\, n'(1-\lambda)^3, \qquad \lambda \geqq 0,8$$

Alors, dans le domaine Δ, ou bien la fonction $g(x)$, ou bien la fonction $\frac{1}{g(x)}$ est uniformément grande; d'une façon précise,

$$\log\log|g(x)| \geqq A = 10^{-2}\, n'(1-\lambda)^2 \tag{21}$$

ou

$$\log\log\frac{1}{|g(x)|} \geqq A; \tag{21'}$$

ou bien la variation relative de $g(x)$ est très faible et inférieure à $e^{-0,05n'(1-\lambda)^2}$.

Comparaison avec le théorème 1 rappelé au paragraphe **1**. — Supposons maintenant $g(x)$ holomorphe dans le cercle unité et de module supérieur à 1. C'est le cas visé dans le théorème 1.

Dans ce cas, il n'y a pas de cercle d'exclusion : le domaine D d'exception dans l'application du théorème 3 n'existe pas. Ce théorème nous montre que, *dans le cas où* $\log\log|g(0)|$ *est inférieur au second membre de l'inégalité* (21), alors la majoration de la variation de $\log|g(x)|$ dans le cercle $|x| \leqq \lambda$ est comparable à celle qui est fournie par le théorème 1. Mais l'intérêt du théorème 3 est qu'il s'applique à des cas nettement plus généraux que le théorème 1. Les applications qui ont été tirées de ce dernier (*voir* référence dans l'introduction) concernent par ailleurs uniquement des cas où $\log\log|g(0)|$ est très inférieur au second membre de (21), donc des cas où le théorème 3 est plus intéressant, parce que plus général, que le théorème 1.

9. La méthode développée au paragraphe **7**, dans le cas où la fonction $g(x)$ n'est ni uniformément petite, ni uniformément grande dans le domaine Δ, peut aussi s'appliquer, avec un certain succès, dans les deux cas écartés.

On peut se contenter d'étudier le cas où la fonction est uniformément grande, cas de l'inégalité (21), quitte à changer g en $\frac{1}{g}$: les zéros des dérivées coïncident en général; si l'on y adjoint les pôles multiples des fonctions, la coïncidence est totale.

Nous ne développerons pas les calculs, qui se conduisent comme au paragraphe **7**. On commence par établir, à la place de l'inégalité (17), l'inégalité

$$(17') \qquad \log\left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right| < -0{,}06\, n'(1-\lambda)^2 + 8 \log\log|g(x_0)|,$$

où x_0 est un point fixe quelconque (du domaine Δ); x est un point variable quelconque du même domaine. Cette inégalité résulte de l'inégalité (13), où le 4e terme du second membre joue un rôle qui n'est plus négligeable.

Enfin, de (17′) on déduit la majoration suivante de la variation de $\log|g(x)|$ dans le même domaine :

$$(22) \qquad [\log|g(x_0)|]^{17}\, e^{-0{,}05 n'(1-\lambda)^2}.$$

En fait l'exposant 17 du premier facteur peut être ramené à une valeur proche de 8 et même, en améliorant la méthode, de 4. Même avec l'exposant 4, l'expression (22) est moins favorable que celle qui est fournie par le théorème 1, il est vrai dans le cas des fonctions holomorphes ne s'annulant pas, c'est-à-dire dans un cas moins général. Si l'on se reporte au théorème 1, on constate, en effet, au lieu de la majoration (22), une majoration où l'exposant 17 du premier facteur est remplacé par 1. Cet avantage est probablement dû à l'utilisation du lemme de Schwarz dans la démonstration du théorème 1.

Signalons — sans démonstration — qu'en partant du théorème 1, on peut réduire à 1 l'exposant 17 de l'expression (22).

10. Terminons sur un énoncé un peu plus général que celui du théorème 3, en nous plaçant cependant dans des conditions un peu plus restrictives :

Théorème 4. — *Soit $h(x)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, où elle ne prend pas plus de n fois, au total, trois valeurs a, b, c dont les images sur la sphère de Riemann sont distantes deux à deux d'au moins e^{-n}. On suppose, en outre, que la dérivée $h'(x)$ s'annule au moins n' fois dans le cercle $|x| \leqq \lambda < 1$ et que les inégalités (20) sont vérifiées.*

Alors, étant donné deux points quelconques x' et x'' situés dans le *domaine* Δ *précisé au théorème* 3, *la distance sphérique de* $h(x')$ *à* $h(x'')$ *est inférieure à*

$$\varepsilon = e^{-\frac{n'(1-\lambda)^2}{40}}.$$

Remarque. — Dans l'énoncé précédent, on peut désigner par n' un nombre inférieur ou égal au nombre des zéros de $h'(x)$ augmenté du nombre des pôles multiples (avec indice de multiplicité diminué d'une unité).

Démonstration.—D'après la remarque précédente, on peut démontrer le théorème précédent, soit pour la fonction h, soit pour la fonction $\frac{1}{h}$ (pour laquelle a, b, c sont remplacés par leurs inverses). On peut donc supposer que des trois quantités a, b, c, deux au moins sont de modules $\leqq 1$. Désignons-les par a et b; c pourra être de module supérieur ou inférieur ou égal à 1.

Si la distance sphérique de $h(x)$ à a, ou à b, ou à c, est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ dans Δ, alors le théorème est démontré. Sinon, il existe au moins un point x_0 dans Δ, en lequel les distances sphériques de $h(x)$ à a, à b et à c, sont toutes trois supérieures à $\frac{\varepsilon}{2}$. Considérons la fonction

$$g(x) = \frac{h(x)-a}{h(x)-b} : \frac{c-a}{c-b}.$$

Cette fonction ne prend pas plus de n fois, au total, les valeurs 0, 1, ∞, Dans le cercle $|x| \leqq \lambda$, le nombre des zéros de sa dérivée, augmenté du nombre des pôles multiples (avec ordre de multiplicité diminué d'une unité) est supérieur ou égal à n'. En effet, cette somme des deux nombres précédents est invariante dans toute transformation homographique (*voir* § **2**).

Les inégalités (20) du théorème 3 sont vérifiées. Ce théorème est donc applicable. Montrons que parmi les trois conclusions possibles, les deux premières sont à rejeter.

Tout d'abord, considérons $\frac{c-b}{c-a}$. Si $|c|$ est supérieur à 2, ce rapport est inférieur en module à 3. Si $|c|$ est inférieur ou égal à 2, comme la distance sphérique est inférieure à la distance euclidienne, ce rapport est inférieur à $3e^n$.

Le même raisonnement, appliqué à $\frac{h(x_0)-a}{h(x_0)-b}$, montre que ce deuxième rapport est inférieur en module à $\frac{6}{\varepsilon}$. Donc $|g(x_0)|$ est inférieur à $\frac{18}{\varepsilon}e^n$: l'inégalité (21) est *a fortiori* non vérifiée au point x_0. On démontre de la même façon que l'inégalité (21′) est aussi non vérifiée en x_0.

Donc, c'est la troisième conclusion qui s'impose pour la fonction $g(x)$

$$\left|\frac{g(x')-g(x'')}{g(x')}\right| < e^{-\frac{n'(1-\lambda)^2}{20}} = \varepsilon^2,$$

d'où

$$\left|\frac{h(x')-h(x'')}{[h(x')-b][h(x'')-a]}\right| < \frac{\varepsilon^2}{b-a} < \varepsilon^2 e^n < 10\,\varepsilon.$$

D'où l'on déduit *a fortiori*

$$\frac{|h(x')-h(x'')|}{[|h(x')|+1][|h(x'')|+1]} < 10\,\varepsilon.$$

Cette inégalité entraîne tout de suite le fait que la distance sphérique de $h(x')$ à $h(x'')$ est inférieure à ε et le théorème 4 est établi.

11. Nous nous proposons de montrer, dans un autre Mémoire, que le théorème 4 peut s'étendre au cas où l'on substitue à l'hypothèse relative aux zéros de la dérivée $h'(x)$, une hypothèse analogue relative aux zéros de $h'(x)-\alpha$, où α est une constante quelconque. Dans ce cas, la conclusion est à modifier comme suit : la majoration de la distance sphérique concerne, non plus la fonction $h(x)$, mais la fonction $h(x)-\alpha x$.

On conçoit que si, étant donnée une fonction méromorphe $h(x)$ dans le cercle unité, on peut trouver deux valeurs distinctes de α pour lesquelles les hypothèses sont vérifiées, les deux conclusions sont en contradiction, sauf si $h(x)$ est très grand dans le domaine Δ. Des conséquences en résultent pour la théorie des fonctions méromorphes.