

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. OUDART

Sur le schéma de Helmholtz-Kirchhoff

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 22 (1943), p. 245-320.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1943_9_22_245_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur le schéma de Helmholtz-Kirchhoff;

PAR A. OUDART.

Introduction.

On sait que, parmi les figures physiques de l'écoulement d'un fluide, se présente le mouvement permanent, avec sillage en aval d'un obstacle.

A cette figure particulière correspond le problème hydrodynamique théorique de l'écoulement plan du fluide incompressible avec surfaces de discontinuité s'étendant à l'infini, qui donne lieu au schéma de Helmholtz-Kirchhoff.

Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux, en tête desquels se situent par leur importance, les Mémoires de M. Henri Villat (¹); depuis il a été particulièrement étudié par MM. Alexandre Weinstein et Caius Jacob et surtout par M. Jean Leray dont les travaux occupent une position centrale dans la théorie des sillages, et dont la Thèse (²) de M. Julien Kravtchenko constitue le prolongement. On trouvera dans ce dernier travail une bibliographie étendue de la question ainsi qu'un exposé capital d'un caractère définitif.

Dans le présent Mémoire, j'ai tenté une extension des résultats déjà obtenus dans diverses directions, et en particulier dans le cas d'un obstacle fixe par rapport à un canal à parois rectilignes indéfinies et parallèles, cas ayant fait l'objet de la thèse précitée, laquelle m'a été du plus précieux secours.

Il s'agit ici, en l'espèce, du mouvement plan irrotationnel du fluide parfait incompressible enfermé dans un canal indéfini dont les parois sont des courbes μ_1, μ_2 . Le fluide vif provenant de l'infini amont heurte un obstacle \widehat{BC} fixe dans le canal, se subdivise en un point O de l'obstacle en deux courants qui lèchent celui-ci le long des éléments ϖ_1 et ϖ_2 , pour s'en détacher aux points P_1 et P_2 , confondus avec B et C dans le cas dit du sillage, en amont de ces points dans le cas de la proue, et pour laisser entre eux un sillage de fluide mort limité aux lignes de jet λ_1 et λ_2 .

(¹) Et en premier lieu sa première Thèse : *Sur la résistance des Fluides*, n° d'ordre 1412, Paris.

(²) *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz, Théorie des sillages et des proues* (*J. Math. pures et appliquées*, 9^e série, t. 20, 1941, p. 35 à 303).

Dans un premier Chapitre, je situe des généralités et les représentations conformes employées; je rappelle, en particulier, l'emploi du demi-plan supérieur (T) de la variable t et de la demi-couronne (d) comprise entre les cercles de rayon 1 et $q < 1$ concentriques à l'origine du plan de la variable Z .

Le second Chapitre concerne le problème inverse (indéterminé) de MM. Levi-Civita et Villat, et en particulier l'étude du module de continuité.

Le troisième Chapitre étudie l'obstacle, les parois et les lignes de jet et met en évidence certains aspects du problème en ce qui concerne la limitation du canal.

Le quatrième Chapitre a trait aux conditions de validité dites de M. M. Brillouin; j'établis l'impossibilité de satisfaire en général à la condition $V \leq 1$ dite de limitation de la vitesse ou première condition de validité (que j'appelle condition de validité totale) pour un canal convergent; par contre, j'obtiens une proposition tout à fait satisfaisante pour le canal divergent et l'obstacle tranchant.

Le cinquième et dernier Chapitre traite de l'existence de la solution en application du Critère d'existence de MM. Jean Leray et Jules Schauder.

Sur les suggestions de M. J. Kravtchenko, j'ai tenté d'exploiter le plus possible le demi-plan (T); l'étude poursuivie m'a montré que l'emploi de la demi-couronne (d) avait aussi ses avantages et que cette représentation, qui nécessite l'usage des fonctions elliptiques, conservait sa valeur; d'ailleurs, l'étude de ces dernières fonctions n'est pas sans intérêt en soi et est une excellente application de la théorie des fonctions.

Chemin faisant, je me suis rendu compte qu'il n'était guère possible de se passer complètement des dites fonctions, et en conséquence, j'emploie l'une ou l'autre représentation, indifféremment, selon la plus ou moins grande facilité qu'elle peut offrir.

D'ailleurs l'usage du demi-plan (T) n'est pas sans inconvénients en raison de l'existence du point à l'infini du plan et de la nécessité d'introduire la fonction $\frac{\Omega(t)}{\sqrt{R(t)}}$, moins simple que $\Omega(Z)$.

Enfin les résultats qu'on peut obtenir dans le problème indéterminé de MM. Levi-Civita et Villat par exemple, concernent des domaines de solutions voisins, mais non identiques.

A ce sujet, il y a lieu de noter que les sujétions du plan Z , par exemple la limitation de q par l'inégalité $q < 0,517$ dans un certain problème, si elles n'ont pas leur équivalent dans le plan t , laissent la place à d'autres sujétions, par exemple la nécessité que la fonction $\Phi(t)$ satisfasse à deux conditions de régularité.

Dans un but d'allègement, j'ai reporté en Annexe un certain nombre d'études préliminaires, et j'ai retranché un certain nombre de résultats numériques qui pourront prendre place dans quelque autre Mémoire.

J'ai adopté pour les références à la thèse de M. J. Kravtchenko les initiales (*J. K...*) suivies du numéro du paragraphe ou de la formule et de la page; j'ai procédé de même pour les références aux *Éléments de la théorie des Fonctions elliptiques*, par Jules Tannery et Jules Molk (*T. M...*); mes propres références ne comportent que le numéro du paragraphe et de la formule sans initiales, sauf pour ce qui concerne l'Annexe.

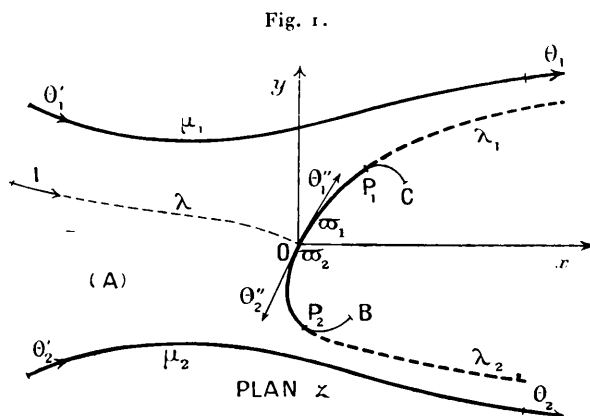
En terminant cette Introduction, je veux reporter ma pensée sur les Maîtres de ma jeunesse, et je veux exprimer toute ma respectueuse gratitude à mon Maître M. Henri Villat, qui a bien voulu suivre mes travaux et les encourager avec tant de bienveillance, et leur donner l'impulsion qui m'a permis de les conduire à bonne fin, malgré les vicissitudes de la guerre.

Je suis également heureux de remercier ici mon ami M. Julien Kravtchenko de l'aide si efficace et si cordiale qu'il m'a donnée pour vaincre les difficultés du sujet traité.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS ET REPRÉSENTATIONS CONFORMES.

10. La figure 1 situe le problème posé, comme nous l'avons exposé dans l'Introduction.



11. Soit $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ le potentiel complexe dans le domaine (A) du fluide vif.

La vitesse complexe $W = u - iv = \frac{df}{dz}$ donne les composantes (u, v) de la vitesse \vec{V} du fluide en chaque point.

On pose

$$(1) \quad \frac{df}{dz} = e^{-i\Omega}$$

et

$$(2) \quad \Omega = \Theta + iT \quad (\text{fonction de Levi-Civita}).$$

Θ est l'angle de \vec{V} avec Ox et $T = \log V$ ($V =$ valeur absolue de la vitesse \vec{V}).

Nous ferons la convention habituelle

$$(3) \quad V = 1$$

sur les lignes de jet et à l'infini aval dans le domaine (A), d'où

$$(4) \quad p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$$

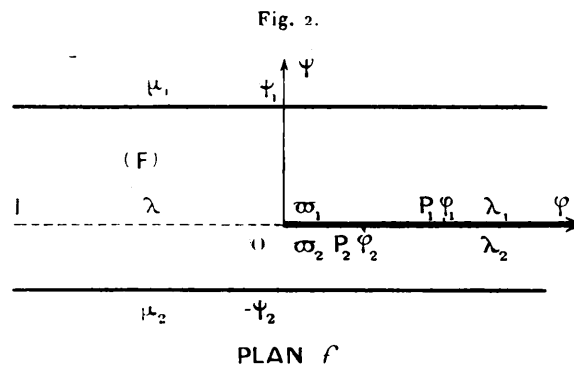
et

$$(5) \quad \left| \frac{df}{dz} \right| = \frac{d\varphi}{dt} = 1 \quad \text{sur } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2,$$

et à l'infini aval sur μ_1 et μ_2 ; $p =$ pression statique au point de vitesse V ; $p_0 =$ pression statique dans le sillage et aux points de vitesse 1.

La densité du fluide est posée égale à 1 conventionnellement.

12. La fonction $f(z)$ définit la représentation conforme de (A) de (z) sur (F) de (f) (fig. 2).



Par convention $f(o) = o$, c'est-à-dire

$$(1) \quad \varphi(o, o) = \psi(o, o) = o.$$

Nous devons justifier que la bande s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ le long de l'axe des φ .

Considérant μ_1 par exemple, V y tend vers 1 à l'infini aval; on voit donc que $\frac{d\varphi}{dt} \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow \infty$ et $\varphi \rightarrow +\infty$; même raisonnement pour λ_1 , λ_2 et μ_2 .

A l'infini amont, cela se complique: il n'est pas certain que φ y prenne la valeur $-\infty$ que nous lui assignons sur la figure 2. Cependant il en est bien ainsi, lorsque les parois y possèdent des asymptotes parallèles ($\theta'_1 = \theta'_2$)

distantes de L ; on a alors

$$(2) \quad V_{-\infty} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{L}, \quad \frac{d\varphi}{dl} \rightarrow A \neq 0 \text{ et } \varphi \rightarrow -\infty.$$

Si le canal s'épanouit indéfiniment vers l'amont et si l'on a pour $x = -\infty$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= k_1(-x)^{p_1} \text{ sur } \mu_1 \\ y_2 &= k_2(-x)^{p_2} \text{ sur } \mu_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &k_1 \text{ et } k_2 \text{ étant des fonctions bornées,} \\ &p_1 \text{ et } p_2 \text{ étant } \leq 1; \end{aligned}$$

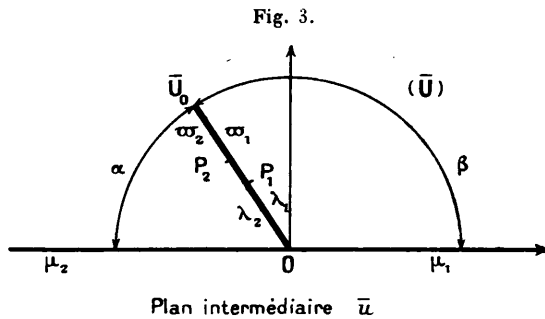
la vitesse sera de l'ordre de $\frac{1}{(-x)^{p_1}}$ ou $\frac{1}{(-x)^{p_2}}$ et $\int V dl$, c'est-à-dire φ , deviendra infinie négative.

C'est le cas d'une direction parabolique unique (parallèle à Ox) (p_1 et $p_2 < 1$).

C'est le cas d'un canal admettant deux asymptotes ($p_1 = p_2 = 1$) ou même deux directions paraboliques faisant un angle $< \frac{\pi}{2}$ en valeur absolue avec l'axe des x .

Dans le cas où l'épanouissement du canal est égal à π (ou supérieur), on ne peut plus affirmer que $\varphi \rightarrow -\infty$ à l'infini amont. Nous éliminons de tels cas de nos préoccupations.

13. Le procédé des images conduit à doubler la bande (F) par symétrie par rapport aux frontières ψ_1 et $-\psi_2$, puis à couvrir le plan (f) par la translation $2i(\psi_1 + \psi_2)$ réitérée. La fonction $\bar{u} = e^{\lambda f + \mu}$ de périodicité $2i\pi$ conduit à représenter la bande ($2F$) sur le plan (\bar{u}) en posant $\lambda = \varepsilon \frac{\pi}{\psi_1 + \psi_2}$ ($\varepsilon = \pm 1$).



En posant $\mu = -\varepsilon \frac{\pi\psi_1}{\psi_1 + \psi_2}$, le demi-plan supérieur (\bar{U}) correspondra à la bande (F); en posant $\varepsilon = -1$, le point $\bar{u} = 0$ correspondra à $\varphi = +\infty$; d'où

$$(1) \quad \bar{u} = e^{-\frac{\pi}{\psi_1 + \psi_2} f + \frac{\pi}{\psi_1 + \psi_2} \psi_1} \text{ et la figure 3.}$$

avec

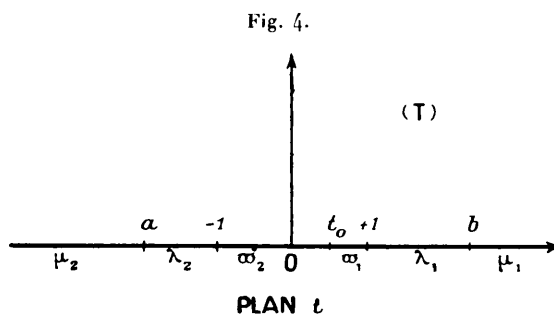
$$(2) \quad \beta = \pi \frac{\psi_1}{\psi_1 + \psi_2},$$

$$(3) \quad \alpha = \pi \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \quad (\text{notations de la figure 3}).$$

14. La transformation de Schwarz permet alors d'étendre le demi-plan \bar{U} coupé le long de $O\bar{U}_0$ (\bar{U}_0 image de O) sur le demi-plan (T) en assurant la correspondance (fig. 4)

$$(1) \quad \begin{cases} -\infty & a & t_0 & b & +\infty \\ -\infty & 0 & \bar{u}_0 & 0 & +\infty \end{cases}$$

où trois couples suffisent à la détermination.



Les points a, t_0, b seront singuliers et les développements en a et b seront de la forme $(t-a)^{\frac{\alpha}{\pi}}$ et $(t-b)^{\frac{\beta}{\pi}}$, ce qui conduit à

$$(2) \quad \bar{u} = k'(t-a)^{\frac{\alpha}{\pi}}(t-b)^{\frac{\beta}{\pi}}.$$

La singularité t_0 consiste en ce que la variation d'argument de $(\bar{u} - \bar{u}_0)$ est double de celle de $(t - t_0)$, de sorte que

$$\bar{u} - \bar{u}_0 = \gamma(t - t_0)^2 + \dots \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right)_0 = 0,$$

donc

$$\frac{\alpha}{t_0 - a} + \frac{\beta}{t_0 - b} = 0,$$

il s'ensuit

$$(3) \quad t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}.$$

Passant aux logarithmes, il vient alors

$$(4) \quad f = -\frac{\psi_2}{\pi} \log(t-a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(t-b) + k_2,$$

$$(5) \quad 0 = \underbrace{-\frac{\psi_2}{\pi} \log(t_0-a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(b-t_0)}_{\text{partie réelle}} - i\psi_1 + k_2 \quad \text{qui détermine } k_2.$$

La correspondance fondamentale de la bande (F) et du demi-plan (T) est donnée par

$$(6) \quad \begin{cases} \infty \text{ amont} & \varphi_2 & \varphi_1 \\ \infty & -1 & +1 \end{cases}$$

et conduit aux relations

$$(6_2) \quad \varphi_1 = -\frac{\psi_2}{\pi} \log(1-a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(1-b) + k_2,$$

$$(6_3) \quad \varphi_2 = -\frac{\psi_2}{\pi} \log(-1-a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(-1-b) + k_2.$$

Nous noterons les trois formules

$$(7) \quad f = -\frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{t-b}{t_0-b} - \frac{\psi_2}{\pi} \log \frac{t-a}{t_0-a},$$

$$(8) \quad df = -\frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t-t_0}{(t-a)(t-b)} dt,$$

$$(9) \quad k_2 = \frac{\psi_1}{\pi} \log(t_0-b) + \frac{\psi_2}{\pi} \log(t_0-a),$$

et rappellerons avec M. J. Kravtchenko que :

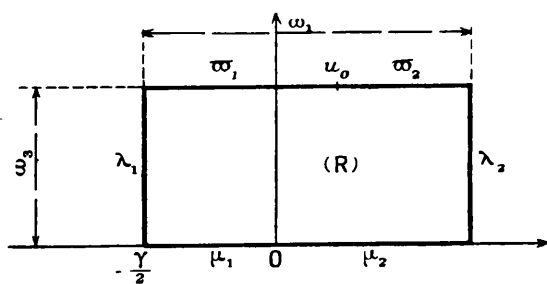
- le domaine (T) dépend de trois paramètres a, b, t_0 ;
- le domaine (F) dépend de quatre paramètres $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$.

Ceci ne peut nous étonner, car le domaine (T) peut représenter conformément aussi bien (F) que tout domaine semblable, de sorte que les équations qui donnent a, b, t_0 sont homogènes en $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$.

15. La transformation de Schwarz fait correspondre l'aire (T) du demi-plan supérieur (\bar{T}) à l'aire d'un rectangle (R) du plan (u) (fig. 5) par la formule

$$(1) \quad du = \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t^2-1)(t-b)}}.$$

Fig. 5.



PLAN u

Soit en partant de $u = 0$ pour $t = -\infty$

$$(2) \quad u = \int_{-\infty}^t \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t^2-1)(t-b)}},$$

le radical étant pris positif pour $t = -\infty$.

Nous avons (cf. *fig. 5*) évidemment

$$(3) \quad \frac{\gamma}{2} = \int_b^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

$$(4) \quad \omega_1 = \int_b^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} + \int_{-\infty}^a \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

$$(5) \quad \frac{\omega_3}{i} = \int_a^{-1} \frac{dt}{\sqrt{-R(t)}} = \int_{-1}^b \frac{dt}{\sqrt{-R(t)}},$$

les radicaux étant pris avec leur sens arithmétique et en posant

$$(6) \quad R(t) = (t-a)(t^2-1)(t-b).$$

L'inversion de l'intégrale elliptique peut être conduite en faisant appel direct aux traités classiques, ou à partir de la connaissance des pôles et des zéros de la dérivée $\frac{dt}{du} = \sqrt{(t-a)(t^2-1)(t-b)}$. On obtient ainsi

$$(7) \quad \frac{dt}{du} = pu - p(u + \gamma)$$

(p étant la fonction elliptique de Weierstrass aux périodes $2\omega_1, 2\omega_3$); puis

$$(8) \quad t = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p'u - p'\gamma}{pu - p\gamma}.$$

On obtient également par la même méthode une autre forme de $\frac{dt}{du}$

$$(9) \quad \frac{dt}{du} = \frac{p'\frac{\gamma}{2}p'\left(u + \frac{\gamma}{2}\right)}{\left[p\frac{\gamma}{2} - p\left(u + \frac{\gamma}{2}\right)\right]^2}.$$

16. La méthode des images permet de doubler le rectangle (R) dans le sens de ω_1 et d'obtenir une bande de hauteur ω_3 et de périodicité $2\omega_1$.

La fonction cellule, $\log Z$ de période $2i\pi$, conduit à poser

$$(1) \quad u = C \pm i \frac{\omega_1}{\pi} \log Z$$

et à obtenir une demi-couronne (d) pour la représentation de (R). La constante C et le signe sont alors déterminés par la correspondance des figures 5 et 6, où les lignes libres sur la figure 6 sont représentées sur OX, d'où

$$(2) \quad u = \omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z,$$

Le rayon du petit cercle est

$$(3) \quad q = e^{i\pi \frac{\omega_3}{\omega_1}},$$

comme on le calcule aisément.

17. CORRESPONDANCES PONCTUELLES ET REMARQUES. — Le point O du plan (z) devient le point u_0 défini par

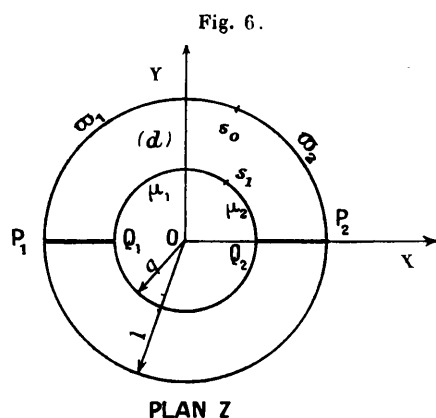
$$(1) \quad t_0 = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p'u_0 - p'\gamma}{p u_0 - p\gamma}$$

où

$$(2) \quad \begin{cases} u_{1,0} = \omega_1 - \frac{\gamma}{2} + \int_{-1}^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} \\ u_0 = u_{1,0} + \omega_3. \end{cases} \quad (\text{radical arithmétique}),$$

Ce point O correspond à $Z_0 = e^{ts_0}$ avec

$$(3) \quad s_0 = \frac{\pi}{\omega_1} \left(u_{1,0} - \omega_1 + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\pi}{\omega_1} \int_{-1}^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} \quad (\text{radical arithmétique}).$$



L'infini amont correspond à $u_1 = 0$ (par définition) et à $Z_1 = qe^{ts_1}$ avec

$$(4) \quad s_1 = \frac{\pi}{\omega_1} \left[\omega_1 - \frac{\gamma}{2} \right] = \frac{\pi}{\omega_1} \int_{-\infty}^a \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} \quad (\text{radical arithmétique}).$$

Par ailleurs la correspondance (t) et (Z) est assurée directement par

$$(5) \quad t = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p' \left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p'\gamma}{p \left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p\gamma}$$

et

$$(6) \quad dt = - \frac{\omega_1}{i\pi} \frac{p' \frac{\gamma}{2} p' \left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)}{\left[p \frac{\gamma}{2} - p \left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \right]^2} \frac{dZ}{Z}$$

Enfin le domaine (d) est défini par q , s_0 et s_1 , où q et s_1 ne dépendent que de a et b , mais où s_0 dépend de a , b et t_0 .

CHAPITRE II.

PROBLÈME INVERSE OU INDÉTERMINÉ DE MM. LEVI-CIVITA ET VILLAT.

20. Le problème direct consiste à déterminer les lignes de jets et les fonctions $f(z)$, c'est-à-dire à déterminer le mouvement. Le problème inverse consiste à déterminer $z(f)$ pour un domaine (F) donné, c'est-à-dire des couples obstacle-canal cadrant avec la bande (F).

La représentation conforme transpose le problème du domaine (F) dans le domaine (T) ou (d) et la formule (11. 1) remplace la détermination de $z(f)$ par celle de $\Omega(t)$ ou $\Omega(Z)$ réelle pour les lignes de jets λ_1, λ_2 :

$$(1) \quad T = 0.$$

21. SOLUTION DE M. H. VILLAT (1) [demi-couronne (d)].

210. Suivant les notations de M. H. Villat, soient $\Phi(s)$ fonction d'obstacle et $\Psi(s)$ fonction de paroi, les valeurs de $\Theta(X, Y)$ données sur les demi-circonférences de rayon 1 et q

$$(1) \quad \begin{cases} \Theta(X, Y) = \Phi(s) & \text{sur la demi-circonférence de rayon } 1, \text{ avec } 0 \leq s \leq \pi; \\ \Theta(X, Y) = \Psi(s) & \text{» } q, \text{ avec } 0 \leq s \leq \pi. \end{cases}$$

Soient s_0, s_1 les images du point de bifurcation et de l' ∞ amont, valeurs données pour lesquelles on peut avoir discontinuité

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi(s_0 + 0) \neq \Phi(s_0 - 0) & [\text{pour un bord arrondi, } \Phi(s_0 + 0) = \Phi(s_0 - 0) + \pi]. \\ \Psi(s_1 + 0) \neq \Psi(s_1 - 0). \end{cases}$$

Remarquons qu'il faut

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi(s_0 + 0) \geq \Phi(s_0 - 0), \\ \Psi(s_1 + 0) \leq \Psi(s_1 - 0) \quad (\Theta'_2 \geq \Theta'_1), \end{cases}$$

et aussi

$$(4) \quad \Psi(\pi) \geq \Psi(0) \quad (\Theta_1 \geq \Theta_2).$$

Lorsque $\Psi(s_1 + 0) = \Psi(s_1 - 0)$, nous prendrons $\Psi(s_1) = 0$, Ox est alors direction asymptotique amont.

La nullité de T le long de λ_1 et λ_2 (20. 1) permet le prolongement analytique dans la demi-couronne inférieure par les valeurs imaginaires conjuguées.

(1) Cf. *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.* **29**, 1912, p. 227; *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides*, p. 67 (*Scientia*, n° 38).

La fonction $\Omega(Z)$ est alors une fonction analytique, uniforme de Z régulière excepté en $s_0, s_1, 2\pi - s_0, 2\pi - s_1, q, -q, +1, -1$ et en général aux points de discontinuité ou de non-analyticité de Φ et Ψ .

Parois, obstacle et lignes de discontinuité seront analytiques sauf aux points indiqués ci-dessus. En particulier les lignes de jets seront analytiques sauf peut-être à leurs extrémités, points $\pm q$ compris [ce qui distingue le canal curviligne du canal rectiligne (*J. K.*, p. 59)]. Par contre, étant donné que Φ et Ψ ne sont pas, en général, analytiques, le squelette du schéma (parois et obstacle) ne sera pas, en général, analytique,

211. M. Villat a montré ⁽¹⁾ que ce problème de Dirichlet dans la couronne est résolu par

$$(1) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \left\{ \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right) \right] d\varepsilon - \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) \left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right) + \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right) \right] d\varepsilon \right\}$$

avec la condition de régularité (ou d'uniformité)

$$(2) \quad \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Psi(\varepsilon)] d\varepsilon = 0.$$

212. Les formules (*T. M.*, VII, 3) et (*T. M.*, XI, 2) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \zeta_3(u+a) + \zeta_3(u-a) &= \zeta(u+\omega_3+a) + \zeta(u+\omega_3-a) - 2\eta_3 \\ &= 2\zeta(u+\omega_3) + \frac{p'(u+\omega_3)}{p(u+\omega_3) - pa} - 2\eta_3, \end{aligned}$$

$$\zeta(u+a) + \zeta(u-a) = 2\zeta u + \frac{p'u}{pu - pa},$$

$$2\zeta(u+\omega_3) = 2\zeta u + \frac{p'u}{pu - e_3} + 2\eta_3.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \left\{ 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \left[\int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Psi(\varepsilon)] d\varepsilon \right] - \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - e_3} \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ \left. + p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \int_0^\pi \frac{\Phi(\varepsilon) d\varepsilon}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right)} - p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \omega_3\right) \int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) d\varepsilon}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \omega_3\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right)} \right\}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Scientia*, p. 72.

La condition d'uniformité de $\Omega(Z)$ nous impose ici la condition (211.2), d'où

$$(1) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \left\{ p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \int_0^\pi \frac{\Phi(\varepsilon) d\varepsilon}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right)} \right. \\ \left. - \frac{p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - e_3} \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ \left. - p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) \int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) d\varepsilon}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) - p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right)} \right\},$$

où les fonctions du second membre (') sont uniformes.

213. On a alors

$$(1) \quad z = \int_{e^{i\alpha_0}}^Z e^{i\Omega} \frac{df}{dt} \frac{dt}{dZ} dZ$$

avec (14.8), (17.6) et (17.5).

22. EXPRESSIONS VALABLES JUSQU'À L'OBSTACLE OU JUSQU'AUX PAROIS.

220. Pour mettre les formules (211.1) et (212.1) sous une forme valable sur l'obstacle ou les parois, on emploie l'artifice classique consistant à faire apparaître la forme $0 \times \infty$ ou $\frac{0}{0}$ et à prendre la valeur limite, si elle existe.

2210. On est amené à remplacer la première intégrale de (211.1) par

$$\int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) \right] d\varepsilon + \Phi(s) \cdot I_1,$$

et de même la deuxième par des expressions analogues en Ψ , ζ_3 avec une intégrale I_3 .

2211. On a

$$(1) \quad I_1 = \frac{\pi}{\omega_1} \log \frac{\sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \omega_1 \right)}{\sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_1 \right)}$$

(1) A signaler ici une erreur dans la formule (::), page 27 de l'ouvrage de M. Umberto Cisotti, *Idromeccanica Piana*, parte prima. On constate que le second terme a été omis dans cet ouvrage.

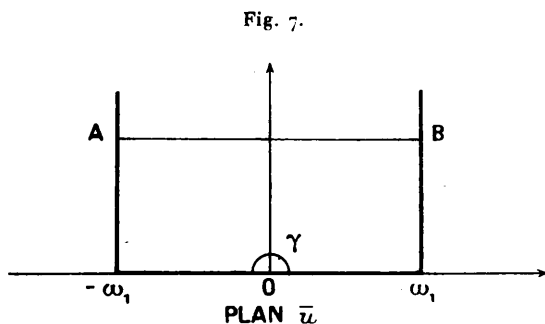
et compte tenu de (*T. M.*, VI, 1), on a

$$\sigma(\nu + \omega_1) = -e^{2\eta_1\nu} \sigma(\nu - \omega_1),$$

d'où

$$(2) \quad \log \frac{\sigma(\nu + \omega_1)}{\sigma(\nu - \omega_1)} = 2\eta_1\nu + (2k + 1)i\pi \quad \text{avec } \nu = \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z.$$

Posons $u = \nu + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon$. Le domaine de u est limité aux abscisses $-\omega_1, +\omega_1$ pour Z réel < 1 . De plus ν sera imaginaire pure avec coefficient de i positif, d'où le domaine figure 7.



La valeur limite de $\log \sigma \frac{\nu + \omega_1}{\nu - \omega_1}$ quand $\nu \rightarrow 0$ fixera k . Il s'agira de suivre $\log \sigma u$ le long de $-\omega_1, \gamma, \omega_1$. La seule difficulté réside en O : $\sigma u \cong u$ dont l'argument varie de $-\pi$, d'où

$$\log \sigma u = \log \sigma(-u) - i\pi \quad \text{et} \quad \log \frac{\sigma(\omega_1)}{\sigma(-\omega_1)} = -i\pi \quad (k = -1).$$

Dès lors

$$(3) \quad \log \frac{\sigma(\nu + \omega_1)}{\sigma(\nu - \omega_1)} = 2\eta_1\nu - i\pi$$

$$(4) \quad I_1 = \frac{2\eta_1 \log Z}{i} + \frac{\pi^2}{i\omega_1}.$$

2212. De même

$$(1) \quad I_3 = \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta(u + \omega_3) d\varepsilon - 2\eta_3\pi \quad \text{avec } u = \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon$$

et

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta(u + \omega_3) d\varepsilon = \frac{\pi}{\omega_1} \log \frac{\sigma(\nu + \omega_1)}{\sigma(\nu - \omega_1)} \quad \text{avec } \nu = \omega_3 + \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z.$$

La formule issue de (*T. M.*, VI, 1) reste valable avec cette valeur de ν . De plus, pour $q < Z < 1$ et Z réel, on a

$$\nu = \frac{\omega_1}{i\pi} \log qZ = i \frac{\omega_1}{\pi} |\log qZ|;$$

ν est imaginaire pure avec coefficient de i positif; on aboutit encore à $k = -1$ et

$$(3) \quad I_3 = \frac{2\eta_1 \log Z}{i} + 2\eta_1 \omega_3 \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{i\omega_1} - 2\eta_3 \pi,$$

compte tenu de (2211.3), (2212.1) et (2212.2).

La formule $\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = i\frac{\pi}{2}$ réduit (3) à

$$(4) \quad I_3 = \frac{2\eta_1 \log Z}{i}.$$

2213. On en conclut les deux suivantes :

$$(1) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) \right] d\varepsilon \\ + \Phi(s) + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} \log Z \Phi(s) \\ - i \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) \left[\zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) + \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) \right] d\varepsilon;$$

$$(2) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) \right] d\varepsilon \\ - \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} \log Z \Psi(s) \\ - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)] \left[\zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) + \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) \right] d\varepsilon,$$

valables, la première jusque sur l'obstacle ($Z = e^{i\alpha}$), la deuxième jusqu'aux parois ($Z = qe^{i\alpha}$), sous condition bien entendu que les produits indéterminés aient un sens, ou conservent un sens aux intégrales correspondantes, c'est-à-dire en somme à $\int \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\varepsilon - s}$ et $\int \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)}{\varepsilon - s}$. Ces deux formules peuvent être vérifiées à partir de la page 19 de *Scientia*, n° 38.

2220. On peut de même remplacer la première intégrale de (212.1) par

$$\int_0^\pi \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} d\varepsilon + \Phi(s) \int_0^\pi \frac{d\varepsilon}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}$$

et la deuxième par

$$\int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} d\varepsilon + \Psi(s) \int_0^\pi \frac{d\varepsilon}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \pm \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}$$

2221. Mais (*T. M.*, VII, 3),

$$\frac{p'a}{pa - p\alpha} = \zeta(a + \alpha) + \zeta(a - \alpha) - 2\zeta a$$

et (*T. M.*, XI, 2),

$$\frac{p'(a \pm \omega_3)}{p(a \pm \omega_3) - p\alpha} = \zeta_3(a + \alpha) + \zeta_3(a - \alpha) \pm 2\eta_3 - 2\zeta(a \pm \omega_3),$$

d'où (*T. M.*, VII, 8)

$$\frac{p'(a \pm \omega_3)}{p(a \pm \omega_3) - p\alpha} = \zeta_3(a + \alpha) + \zeta_3(a - \alpha) - 2\zeta a + \frac{p'a}{pa - e_3}.$$

2222. On a alors

$$p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \int_0^\pi \frac{d\varepsilon}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - p\frac{\omega_1}{\pi}} = I_1 - 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \pi$$

et

$$p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \pm \omega_3\right) \int_0^\pi \frac{d\varepsilon}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \pm \omega_3\right) - p\frac{\omega_1}{\pi}} = I_3 + \left[\frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - e_3} - 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \right] \pi.$$

2223. On en conclut les deux formules suivantes

$$(1) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \left\{ p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \int_0^\pi \frac{[\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] d\varepsilon}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - p\frac{\omega_1}{\pi}} + \left[\frac{2\eta_1 \log Z}{i} + \frac{\pi^2}{i\omega_1} - 2\pi\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \right] \Phi(s) \right. \\ \left. - \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - e_3} \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon - p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3\right) \int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) d\varepsilon}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3\right) - p\frac{\omega_1}{\pi}} \right\},$$

$$(2) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \left\{ p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) \int_0^\pi \frac{\Phi(\varepsilon) d\varepsilon}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - p\frac{\omega_1}{\pi}} - \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - e_3} \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ \left. - p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3\right) \int_0^\pi \frac{[\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)] d\varepsilon}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3\right) - p\frac{\omega_1}{\pi}} \right. \\ \left. - \left[\frac{2\eta_1 \log Z}{i} - 2\pi\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) + \frac{\pi p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - e_3} \right] \Psi(s) \right\}.$$

formules valables, la première jusqu'au point $Z = e^{is}$, la deuxième jusqu'au point $Z = qe^{is}$.

2224. On vérifie aisément que ces formules découlent aussi de 2213.1 et 2213.2.

2225. En faisant $Z = e^{is}$ dans la première, on vérifie que $\Omega(Z)$ a bien $\Phi(s)$ pour partie réelle sur la circonférence de rayon (1). En faisant

$$Z = q e^{is} = e^{i\left(s + \pi \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}$$

dans la deuxième, en tenant compte de ce que

$$Z\left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3\right) = \zeta \frac{\omega_1}{\pi} s + \gamma_3 + \frac{1}{2} \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} s}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3} \quad (T. M., VII, 9) \text{ et } (T. M., IX, 6),$$

puis de

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = i \frac{\pi}{2},$$

on vérifie de même que $\Omega(Z)$ a bien $\Psi(s)$ pour partie réelle sur la circonférence de rayon q .

23. REMARQUES.

231. On peut observer que la condition $T = 0$ pour Z réel conduit à partir de la formule (2213. 2), appliquée au point $Z = q$ (ou $-q$), après quelques calculs élémentaires, à la condition de régularité (211. 2).

232. Cette condition peut s'établir directement en appliquant le théorème de Cauchy à la demi-couronne, pour la fonction $\frac{\Omega(Z)}{Z}$ et prenant quelques précautions pour les points de discontinuité de $\Omega(Z)$ sur le contour.

233. La formule (211. 1) peut être établie à partir du théorème fondamental de Cauchy appliqué au cercle, que l'on transpose successivement sur le demi-plan, le rectangle, la demi-couronne (voir Annexe I).

24. SOLUTION DE M. J. KRAVTCHENKO [demi-plan (T)].

240. M. Basile Demtchenko indique dans un ouvrage (¹), sans toutefois insister et sans en tirer une méthode, le raisonnement de base. M. J. Kravtchenko, dans une lettre du 8 août 1939, m'a proposé l'emploi du plan t au lieu du plan Z ; il y voyait la source de simplifications importantes et envisageait même son emploi systématique.

J'ai pu reprendre la question quelques mois après mon retour de captivité en 1941. M. J. Kravtchenko donne également (²) quelques indications à ce sujet.

(¹) *Problèmes mixtes harmoniques en hydrodynamique des fluides parfaits*, p. 2 et 3 (Gauthier-Villars, 1933).

(²) J. KRAVTCHENKO, p. 103-106, § 14 bis.

2411. La partie réelle de Ω est connue : sur les parois donc pour

$$-\infty < t \leq a \quad \text{et} \quad b \leq t < +\infty$$

et sur l'obstacle donc pour

$$-1 \leq t \leq +1.$$

La partie imaginaire de Ω est nulle ($T = 0$) sur λ_1 et λ_2

$$a \leq t \leq -1 \quad \text{et} \quad +1 \leq t < b.$$

2412. *Convention de signe.* — Considérons le polynome

$$(1) \quad R(t) = (t-a)(t+1)(t-1)(t-b)$$

qui s'annule en changeant de signe pour $a, -1, 1, b$.

Nous prendrons la détermination de $\sqrt{R(t)}$ positive à ∞ (*J. K.*, p. 104). Chaque fois que t passe par les valeurs $a, -1, 1, b$, l'argument du radical varie de $-\frac{i\pi}{2}$, de sorte que $\sqrt{R(t)}$ sera imaginaire pure dans $(a, -1)$ et $(1, b)$ et négative sur $(-1, +1)$. En particulier $\sqrt{R(0)} = -|\sqrt{-ab}|$.

2413. $\frac{\Omega(t)}{\sqrt{R(t)}}$ a sa partie réelle égale à $\frac{\Psi(t)}{|\sqrt{R(t)}|}$ pour $(-\infty, a)$ et $(b, +\infty)$, à $\frac{\Phi(t)}{-|\sqrt{R(t)}|}$ pour $(-1, +1)$, à 0 sur le reliquat de l'axe réel. Nous posons

$$f(t) = \frac{\Omega(t)}{\sqrt{R(t)}}.$$

242. M. B. Demtchenko établit que si l'on connaît la partie réelle $\varphi(t')$ de $f(t')$ sur l'axe réel t' du demi-plan (T), on a à partir du théorème de Cauchy

$$(1) \quad \tilde{f}(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t') dt'}{t'-t} + i\psi_{\infty} \quad (\text{valeur principale de Cauchy}).$$

Il indique également comment on peut passer du cercle au demi-plan.

243. On obtient ⁽¹⁾ ici

$$(1) \quad \frac{\Omega(t)}{\sqrt{R(t)}} = i\psi_{\infty} + \frac{1}{i\pi} \left[\int_{-1}^a \frac{\Phi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{dt'}{t'-t} + \int_b^{+\infty} \frac{\Psi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{dt'}{t'-t} \right].$$

[On verra plus loin que $\psi_{\infty} = 0$ (263).]

$\sqrt{R(t')} = o(t'^2)$ de sorte qu'il n'est pas nécessaire de parler de valeur principale de Cauchy dans le cas présent. Rappelons la convention de signe (2412).

(1) $\int_{-\infty}^a \int_b^{+\infty}$ signifie qu'on intègre de $-\infty$ à a et de b à ∞ .

244. La formule (213. 1) est remplacée par

$$(1) \quad z = \int_{t_0}^t e^{i\Omega} \frac{df}{dt} dt \quad \text{avec (14.8).}$$

25. EXPRESSIONS VALABLES JUSQU'À L'OBSTACLE OU JUSQU'AUX PAROIS.

250. La formule (243. 1) est valable pour t complexe et pour t réel sur $(a, -1)$ et $(1, b)$.

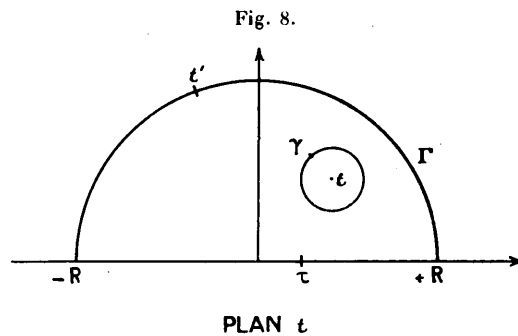
L'artifice classique appliqué à (242. 1) donne (τ étant réel)

$$(1) \quad f(t) = i\psi_\infty + \varphi(\tau) + \frac{1}{i\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\varphi(t') - \varphi(\tau)}{t' - t} dt'.$$

251. On a, en effet,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dt'}{t' - t} = i\pi,$$

comme nous allons le démontrer.



Considérons la figure 8. Nous avons

$$\int_{-R}^{+R} = \int_\gamma - \int_\Gamma.$$

Pour γ , en posant $t' - t = \rho e^{i\varphi}$, il vient

$$\int_\gamma \frac{dt'}{t' - t} = 2i\pi.$$

Pour Γ , en posant $t' = R e^{i\psi}$, il vient

$$\int_\Gamma \frac{dt'}{t' - t} = i \int_0^\pi \frac{t'}{t' - t} d\psi = i\pi + it \int_0^\pi \frac{d\psi}{t' - t};$$

mais

$$|t'| = R, \quad |t| = r \quad \text{et} \quad |t' - t| > R - r,$$

d'où

$$\left| t \int_0^\pi \frac{d\psi}{t'-t} \right| < \frac{r\pi}{R-r} \rightarrow 0 \quad \text{pour } R \rightarrow \infty,$$

r restant fixe.

252. Nous obtenons alors la formule

$$f(t) = i\psi_\infty + \varphi(\tau) + \frac{1}{i\pi} \text{val. princ.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t') - \varphi(\tau)}{t' - t} dt'.$$

Cette formule conserve un sens si $t \rightarrow \tau$, et l'on obtient

$$(1) \quad f(\tau) = i\psi_\infty + \varphi(\tau) + \frac{1}{i\pi} \text{val. princ.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t') - \varphi(\tau)}{t' - \tau} dt'$$

qui a pour partie réelle $\varphi(\tau)$ pour τ réel.

Ceci suppose naturellement que $\varphi(t')$ a un module de continuité convenable.

253. (252. 1) permet de donner à (243. 1) une forme valable jusqu'à l'obstacle et aux parois.

Répétons qu'il n'y a pas de difficultés sur les lignes libres.

26. CONDITION DE RÉGULARITÉ.

260. Nous référant à M. B. Demtchenko (*loc. cit.*), nous allons montrer que la condition de régularité se réduit à $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t') dt' = 0$ parce que $\lim_{t \rightarrow \infty} t f(t) = 0$.

261. Ceci nous conduit à étudier le comportement de $\Omega(t)$ à l'infini. On montre (A. 33) que pour $t = R e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), on a

$$\Omega(t) = \theta'_1 \frac{\pi - \varphi}{\pi} + \theta'_2 \frac{\varphi}{\pi} + \frac{i}{\pi} (\theta'_1 - \theta'_2) \log R + iB + \dots$$

de sorte que :

2611. $\frac{\Omega(t)}{t} \rightarrow 0$ pour $R \rightarrow \infty$, donc $t f(t) \rightarrow 0$ et *a fortiori*.

2612. $\frac{\Omega(t)}{t^2} \rightarrow 0$ pour $R \rightarrow \infty$, donc $\frac{\Omega(t)}{\sqrt{R(t)}} = f(t) \rightarrow 0$.

262. De (2611), on tire, d'après (260), la *condition de régularité*

$$(1) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{R(t)}} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi(t)}{\sqrt{R(t)}} dt = 0.$$

263. De (2612), on tire que $\psi_\infty = 0$, ce qui simplifie les formules (242. 1), (243. 1), 252. 1), et celles qu'on en peut tirer par (253), en particulier

$$(1) \quad \frac{\Omega(t)}{\sqrt{R(t)}} = \frac{1}{i\pi} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{dt'}{t-t} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{dt'}{t'-t} \right].$$

27. EXPRESSIONS DE $T = \log V$ SUR L'OBSTACLE ET SUR LES PAROIS.

271. Cas de la solution de M. H. Villat.

2711. Posons $Z = e^{is}$. Il vient par (2213. 1), sur l'obstacle,

$$(1) \quad \Theta_1(s) = \Phi(s) \quad (\text{cf. 2225}),$$

$$(2) \quad T_1(s) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \left\{ \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] \left[\zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right] d\varepsilon + 2\eta_1 s \Phi(s) \right. \\ \left. - \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) \left[\zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right] d\varepsilon \right\}.$$

2711. Posons

$$Z = q e^{is}, \quad \left(\log Z = i\pi \frac{\omega_3}{\omega_1} + is \right).$$

Il vient, par (2213. 2), sur les parois,

$$\Omega(q e^{is}) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \left\{ \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \omega_3 \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) + \omega_3 \right) \right] d\varepsilon \right. \\ \left. - 2\eta_1 \left(\pi \frac{\omega_3}{\omega_1} + s \right) \Psi(s) \right. \\ \left. - \int_0^\pi [\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)] \left[\zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \omega_3 \right) + \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) + \omega_3 \right) \right] d\varepsilon \right\}.$$

Compte tenu de (T. M., XI, 2) et (T. M., VI, 3), il vient

$$\Omega(q e^{is}) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \left\{ \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left[\zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right] d\varepsilon + 2\eta_3 \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon - 2\eta_1 \left(\pi \frac{\omega_3}{\omega_1} + s \right) \Psi(s) \right. \\ \left. - \int_0^\pi [\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)] \left[\zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right] d\varepsilon - 2\eta_3 \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon + 2\eta_3 \pi \Psi(s) \right\}.$$

Compte tenu de

$$\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{et de} \quad \eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = i \frac{\pi}{2},$$

nous obtenons

$$(1) \quad \Theta_q(s) = \Psi(s) \quad (\text{cf. 2225}),$$

$$(2) \quad T_q(s) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \left\{ - \int_0^\pi [\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)] \left[\zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right] d\varepsilon - 2\eta_1 s \Psi(s) \right. \\ \left. + \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left[\zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right] d\varepsilon \right\}.$$

2713. Observer la symétrie entre $T_1(s)$ et $T_q(s)$. Ces formules peuvent être établies à partir de *Scientia*, n° 38, p. 18.

2714. On obtient également, soit à partir des formules précédentes, soit à partir de (2223),

$$(1) \quad \frac{\pi^2}{\omega_1} T_1(s) = p' \frac{\omega_1}{\pi} s \int_0^\pi \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} d\varepsilon - p' \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \omega_3 \right) \int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) d\varepsilon}{p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} \\ - \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} s}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3} \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon + 2\pi \left[\eta_1 \frac{s}{\pi} - \zeta \frac{\omega_1}{\pi} s \right] \Phi(s).$$

Une expression identique pour $T_q(s)$ en changeant

(2) Φ en $-\Psi$ et Ψ en $-\Phi$.

272. Cas de la solution de M. J. Kravtchenko.

2721. Nous emploierons une variante de la méthode, pour obtenir une formule valable jusqu'à la frontière du domaine.

Sur l'obstacle, l'élément gênant de la formule (263. 1) est la première intégrale.

Nous écrirons

$$\sqrt{R(t)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{dt'}{t'-t} = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\frac{R(t)}{R(t')}} \Phi(t) - \Phi(\tau)}{t'-t} dt' + \Phi(\tau) \int_{-1}^{+1} \frac{dt'}{t'-t}.$$

On a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt'}{t'-t} = [\log(t'-t)]_{-1}^{+1} = \log \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + i[\arg(1-t) - \arg(-1-t)], \log(t'-t)$$

étant suivi par continuité (fig. 8). Quand t devient réel $= \tau$, on voit facilement que

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt'}{t'-\tau} = \log \frac{1-\tau}{1+\tau} + i\pi.$$

On obtient dans ces conditions

(1) $\Theta(\tau) = \Phi(\tau)$,

ce qui montre que $\Omega(\tau)$ a bien $\Phi(\tau)$ pour partie réelle,

$$(2) \quad T(\tau) = \frac{i}{\pi} \left[\Phi(\tau) \log \frac{1+\tau}{1-\tau} - \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\frac{R(\tau)}{R(t')}} \Phi(t') - \Phi(\tau)}{t'-\tau} dt' - \int_b^{+\infty} \sqrt{R(\tau)} \frac{\Psi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{dt'}{t'-\tau} \right].$$

2722. Considérons maintenant les parois; nous pouvons écrire :

$$\int_b^{+\infty} \sqrt{\frac{R(t)}{R(t')}} \Psi(t') \frac{dt'}{t'-t} = \lim_{-R} \int_b^{+R} \frac{\sqrt{\frac{R(t)}{R(t')}} \Psi(t') - \Psi(\tau)}{t'-t} dt' \\ + \Psi(\tau) \lim_{-R} \int_b^{+R} \frac{dt'}{t'-t}.$$

On établit aisément, en suivant $\log(t' - t)$ par continuité, que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^a \frac{dt'}{t' - t} = \lim_{R \rightarrow \infty} \log \frac{a - t}{b - t} \frac{R - t}{-R - t} = \log \frac{a - t}{b - t} + i\pi,$$

où nous ferons $t = \tau$, d'où

$$(1) \quad \Theta(\tau) = \Psi(\tau) \quad (\text{même remarque}).$$

$$(2) \quad T(\tau) = \frac{1}{\pi} \left[\Psi(\tau) \log \frac{b - \tau}{a - \tau} - \int_{-1}^{-1} \sqrt{R(\tau)} \frac{\Phi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{dt'}{t' - \tau} - \text{val. princ.} \int_{-\infty}^{a+\infty} \frac{\sqrt{\frac{R(\tau)}{R(t')}} \Psi(t') - \Psi(\tau)}{t' - \tau} dt' \right].$$

28. MODULE DE CONTINUITÉ.

280. Nous allons généraliser les résultats obtenus par M. J. Kravtchenko, pour les parois rectilignes (*J. K.*, § 11, *Corollaire*, p. 68) au cas des parois curvilignes.

281. *Cas de la solution de M. H. Villat.*

2811. On peut écrire (*cf.* 2711. 2)

$$[\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right] = \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\varepsilon - s} \Lambda(s, \varepsilon)$$

avec

$$\Lambda(s, \varepsilon) = (\varepsilon - s) \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + (\varepsilon - s) \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon).$$

Soit un point ε^{is} ($s \neq s_0$ ou d'une discontinuité plus généralement).

Pour appliquer la théorie exposée en Annexe II, nous supposons ω_1 , et $\omega_3 \neq 0$ [c'est-à-dire $a \neq -1$ et $b \neq 1$ (*cf.* 15, 4 et 15, 5) (1)], ce qui permettra de développer $\zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon)$ dans un cercle Δ de rayon égal à $|2\omega_3|$ ou $|2\omega_1|$ et de choisir un intervalle E contenant s et s_1 , à son intérieur, lui-même contenu dans le cercle Δ et plus petit qu'un demi-intervalle dans lequel $\Phi(\varepsilon)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(\varepsilon)$ ($n > 1$).

Considérant l'intervalle d'intégration, celui-ci est divisé en 3 : E' , E , E'' . La fonction $\Lambda(s, \varepsilon)$ est continue par rapport à s et ε dans E' et E'' , et sa présence ne modifie en rien les raisonnements de (A 23). Dans le cercle Δ , on a

$$\Lambda(s, \varepsilon) = -\frac{\pi}{\omega_1} + (s - \varepsilon) B(s, \varepsilon),$$

où B est une fonction continue, d'où

$$[\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] \left[\zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right] = -\frac{\pi}{\omega_1} \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\varepsilon - s} + C(s, \varepsilon),$$

où C est continue.

(1) a et b sont ici les quantités qui entrent dans $R(t)$.

Le théorème de M. J. Kravtchenko, appliqué à la première partie (A. 21) pour les valeurs s et s_1 , pour l'intégration, montre que cette contribution appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(s)$.

Quant à la deuxième partie, $\int [C(s_1, \varepsilon) - C(s, \varepsilon)] d\varepsilon$, elle satisfait à une condition $\mathcal{L}_n(s)$, car $C(s, \varepsilon)$ satisfait à une condition $\mathcal{L}_n(s)$ comme $\Phi(s)$, c'est dire que l'on a

$$|C(s_1, \varepsilon) - C(s, \varepsilon)| \leq \frac{A}{|\log|s_1 - s||^n}, \text{ donc } \left| \int [C(s_1, \varepsilon) - C(s, \varepsilon)] d\varepsilon \right| \leq \frac{AE}{|\log|s_1 - s||^n}.$$

Au total la première intégrale de $T_1(s)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(s)$, $\Phi(s)$ appartenant à l'espace $\mathcal{L}_n(s)$.

2812. La fonction s est Lipschitzienne; $\Phi(s)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(s)$, donc $s\Phi(s)$ satisfait à une condition $\gamma_n(s)$, donc à une condition $\gamma_{n-1}(s)$ (cf. J. K., p. 69).

2813. Quant à la deuxième intégrale, que $\Psi(\varepsilon)$ soit continue ou non (les discontinuités étant de première espèce, car nous écartons le cas saugernu où Ψ serait infini), nous pouvons la dériver par rapport à s , et sa contribution est Lipschitzienne.

2814. Ainsi $T_1(s)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(s)$, si $\Phi(s)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(s)$. De même $T_2(s)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(s)$, si $\Psi(s)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(s)$.

2815. Considérons $\Omega(Z)$ [(211.1), (2213.1) et (2213.2)], fonction continue et dérivable dans (d) . Elle appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(s)$ pour les points des cercles de rayon r ou q où $\Phi(s)$ ou $\Psi(s)$ appartiennent à l'espace $\mathcal{L}_n(s)$. Nous voulons montrer qu'elle appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$.

2816. Explicitons la définition : On dit que $U(Z)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_q(Z)$ si elle est continue et satisfait à la condition

$$|U(Z_1) - U(Z)| \leq \gamma_q(Z_1 - Z) \quad \text{avec } \gamma_q(x) = \frac{A}{|\log|x||^q}.$$

2817. D'après (2815), $\Omega(Z)$ satisfait à la condition $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ dans (d) et sur les frontières. Il reste à montrer que ceci reste vrai quand on voisine les frontières de la couronne, par exemple la circonférence de rayon r .

Le seul terme gênant (1) est

$$U(Z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\frac{\log Z}{i} - \varepsilon} d\varepsilon = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{s - \varepsilon} \frac{s - \varepsilon}{\frac{\log Z}{i} - \varepsilon} d\varepsilon.$$

(1) Pour $\varepsilon = \pi$, on prendrait $\int_0^{2\pi}$.

On a

$$U(Z) - U(e^{is}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{s - \varepsilon} \frac{\log \frac{Z}{i} - s}{\log \frac{Z}{i} - \varepsilon} d\varepsilon.$$

Soit

$$Z = e^{is} \left[1 + \rho e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \right],$$

il vient

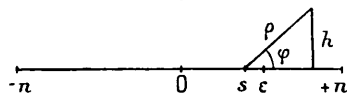
$$\log Z = is + \log \left[1 + \rho e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \right] \cong is + i\rho e^{i\varphi},$$

d'où

$$\left| \frac{\log \frac{Z}{i} - s}{\log \frac{Z}{i} - \varepsilon} \right| \cong \left| \frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi} + s - \varepsilon} \right| < \frac{\rho}{h} = \frac{1}{\sin \varphi} \quad (\text{cf. fig. 9}).$$

Divisons maintenant l'intervalle en trois par $s - 2\rho$, $s + 2\rho$.

Fig. 9.



Dans l'intervalle $(s - \rho, s + \rho)$, la contribution est

$$< \int_{-s}^{+s} \frac{1}{\sin \varphi} \left| \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\varepsilon - s} \right| d\varepsilon,$$

donc

$$< \frac{A}{\sin \varphi} \int_{-s}^{+s} \frac{1}{|\log |\varepsilon - s||^n} \frac{d\varepsilon}{|\varepsilon - s|},$$

qui est de l'ordre de $\frac{B}{\sin \varphi} \frac{1}{|\log \rho|^{n-1}}$.

Pour l'intervalle $-\pi, s - \rho$, nous sommes ramenés à (A. 22) [intervalle E_1] et à (A. 23) [intervalle E'] avec ε_1 complexe et égal à $\frac{\log Z}{i}$. On voit facilement, que, moyennant quelques légères retouches, les raisonnements restent valables.

2818. Même raisonnement près de la circonférence de rayon η .

2819. Conclusion. — Si la fonction $\Phi(s)$ satisfait à une condition $\mathcal{L}_n(s)$ excepté en s_0 et $\Psi(s)$ excepté en s_1 ($n > 1$), la fonction $\Omega(Z)$ [(211. 1), (2213. 1), (2213. 2)] vérifiera une condition $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ dans tout son domaine d'existence, sauf aux points $e^{\pm is_0}$ et $qe^{\pm is_1}$.

Scolie 1. — Si $\Psi(s)$ satisfait à une condition $\mathcal{L}_n(s)$ même en $s = s_1$, les exceptions $Z = qe^{\pm is_1}$ s'évanouissent.

Scolie 2. — Si $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ admettent d'autres discontinuités (de première espèce), on doit naturellement excepter les points correspondants.

Remarque. — Pour le canal divergent, on est assuré de la continuité de $\Psi(s)$ en s_1 , mais non du module de continuité suffisant.

282. *Cas de la solution de M. J. Kravtchenko.*

2821. Considérons les formules (263. 1), (2721. 2), (2722. 2), nous pouvons, dans les deux premières, considérer que $\int_{-x}^{a+\infty}$ sont des valeurs principales de Cauchy ou non, à volonté (243).

Les extensions (A. 24) et (A. 25) permettent d'appliquer le théorème de M. Kravtchenko immédiatement en prenant pour fonction $\Psi(\varepsilon)$, la fonction $\frac{\Phi(t)}{\sqrt{R(t)}}$ ou $\frac{\Psi(t)}{\sqrt{R(t)}}$ avec t au lieu de ε , ainsi que les raisonnements de (281) en exceptant ici les valeurs de t suivantes : $t_0, \infty, a, -1, +1$ et b (et toutes autres discontinuités de première espèce éventuelles), les discontinuités de deuxième espèce étant d'ordre $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Excepté pour ces valeurs de t (et leurs voisinages) peut-être, $\Omega(t)$ satisfera à $\mathcal{E}_{n-1}(t)$ si $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ satisfont à une condition $\mathcal{E}_n(t)$ ($n > 1$).

2822. Aux points $a, -1, 1, b$ on ne peut appliquer directement le théorème invoqué. On peut se ramener au plan (Z).

On montre en effet facilement qu'en ces points, on a, par exemple,

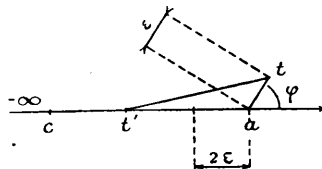
$$\frac{dt}{dZ} \cong A(t-a)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta Z} \right| = B|t-a|^{\frac{1}{2}} = B|\Delta t|^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \log |\Delta t| = 2 \log |\Delta Z| + 2 \log B \quad (B \neq 0),$$

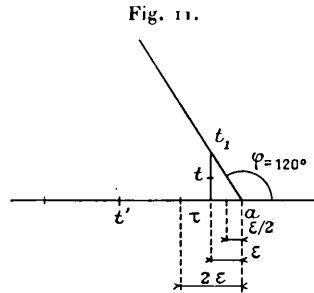
de sorte que les conditions \mathcal{E}_q pour $\Omega(Z), \Phi(s), \Psi(s)$ entraînent des conditions \mathcal{E}_q pour $\Omega(t), \Phi(t)$ et $\Psi(t)$ même en ces 4 points et leurs voisinages.

Fig. 10.



2823. On peut établir ces résultats directement, sans passer par le plan Z , d'abord pour $t \rightarrow a$ par un chemin oblique sur la direction $(a, -\infty)$ (fig 10).

2824. Puis pour un chemin confondu avec cette direction ($\tau \rightarrow a$) (fig. 11).



2825. Donc pour un chemin quelconque.

2826. En ce qui concerne le point à l'infini du plan t , l'inversion ramène ce point à distance finie :

$$t = \frac{1}{u}, \quad |\log |\Delta u|| = |\log |u|| = |\log t|.$$

Nous convenons de dire qu'une fonction est continue pour $t = \infty$ et y satisfait à une condition $\mathcal{L}_n(t)$, si l'on a

$$|\Psi(t) - \Psi(\infty)| < \gamma_n(t) = \frac{A}{|\log |t||^n}.$$

Par un raisonnement calqué sur celui de la couronne, on montrerait que : $|\Psi(u) - \Psi(o)| < \gamma_n(u)$ conduit à $|\Omega(u) - \Omega(o)| < \gamma_{n-1}(u)$, donc $|\Omega(t) - \Omega(\infty)| < \gamma_{n-1}(t)$.

2827. Il y a lieu d'observer, qu'au voisinage de l'obstacle (des parois), seule l'intégrale en Φ (en Ψ) qui entre dans la formule (263. 1) est en cause, et que l'intégrale en Ψ en (Φ) n'intervient pas par la continuité de $\Psi(\Phi)$, mais par son bornage (A. 23).

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE L'OBSTACLE, DES PAROIS ET DES LIGNES DE JET.

30. HYPOTHÈSES SUR L'OBSTACLE ET SUR LES PAROIS. DÉFINITIONS.

301. Hypothèse (12) d'une direction asymptotique ou de deux directions asymptotiques distinctes faisant un angle aigu avec la direction Ox à l'infini amont

$$\Psi(s_1 - 0) - \Psi(s_1 + 0) = \Psi(-\infty) - \Psi(+\infty) = 2x\beta = \Theta'_2 - \Theta'_1 \quad \left(0 \leq \beta < \frac{1}{2}\right).$$

302. Obstacle anguleux ou continu au point de bifurcation

$$\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0) = \Phi(t_0 + 0) - \Phi(t_0 - 0) = 2\pi\alpha = \Theta_1'' - \Theta_2'' \quad (0 \leq \alpha < 1),$$

$\alpha = 0$, rebroussement en pointe vers le fluide vif;

$\alpha = \frac{1}{2}$, obstacle continu;

$\alpha = 1$, rebroussement en pointe vers le fluide mort, cas éliminé pour les raisons données par M. J. Kravtchenko dans sa Thèse (J. K., p. 73, ligne 9).

303. On vérifie aisément que Θ possède le même module de continuité par rapport à z (plan du schéma) que Φ et Ψ par rapport à s ou t (sauf aux points à l'infini, point de bifurcation et points de détachement) : l'obstacle et les parois sont donc en particulier à tangente continue.

Nous admettrons à l'avenir que Φ et Ψ satisfont à une condition $\mathcal{L}_n(s)$ ou $\mathcal{L}_n(t)$, sauf en s_0 et s_1 , éventuellement.

304. A l'infini aval, il faut $\Theta_1 \geq \Theta_2$, c'est-à-dire

$$\Psi(\pi) - \Psi(0) = \Psi(b) - \Psi(a) = 2\pi\gamma = \Theta_1 - \Theta_2 \quad \left(0 \leq \gamma < \frac{1}{2}\right).$$

Nous supposons d'ailleurs que ces directions font un angle aigu avec Ox .

305. *Définitions.* — *Obstacle tranchant* par rapport à un axe de référence : obstacle rencontré en un seul point par une parallèle à cet axe, angle $\neq 0$ et de π .

Obstacle monotone par rapport à un axe de référence : obstacle dont la tangente conserve un angle de signe constant (sauf au point de bifurcation).

Paroi tranchante ou monotone, mêmes définitions.

Canal [ou sillage] tranchant (ou monotone) et divergent {ou convergent} : si les parois [ou lignes libres] sont tranchantes (ou monotones) et s'écartent {ou se rapprochent} de l'axe de référence.

306. *Traduction analytique dans le plan Z ou le plan t .*

3061. Obstacle monotone

$$\begin{array}{ll} 0 \leq \Phi \leq \pi \text{ sur } \varpi_1 : s_0 \leq s \leq \pi & \text{ou} \quad t_0 \leq t \leq 1, \\ -\pi \leq \Phi \leq 0 \text{ sur } \varpi_2 : 0 \leq s \leq s_0 & \text{ou} \quad -1 \leq t \leq t_0. \end{array}$$

3062. Canal monotone et divergent

$$\begin{array}{ll} 0 \leq \Psi \leq \pi \text{ sur } \mu_1 : s_1 \leq s \leq \pi & \text{ou} \quad b \leq t \leq \infty, \\ -\pi \leq \Psi \leq 0 \text{ sur } \mu_2 : 0 \leq s \leq s_1 & \text{ou} \quad -\infty \leq t \leq a. \end{array}$$

3063. Canal monotone et convergent

$$-\pi \leq \Psi \leq 0 \text{ sur } \mu_1 : s_1 \leq s \leq \pi \quad \text{ou} \quad b \leq t \leq +\infty,$$

$$0 \leq \Psi \leq \pi \text{ sur } \mu_2 : 0 \leq s \leq s_1 \quad \text{ou} \quad -\infty \leq t \leq a.$$

A noter les conditions nécessaires suivantes :

Canal divergent

$$\beta = 0, \quad \text{donc} \quad \Psi'(s_1 + 0) = \Psi'(s_1 - 0) = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi' \pm \infty = 0.$$

Canal convergent

$$\gamma = 0, \quad \text{donc} \quad \Psi'(a) = \Psi'(b) = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi'(a) = \Psi'(b) = 0.$$

A noter que si l'obstacle ou le canal sont tranchants : $|\Phi|$ ou $|\Psi| < \pi$. Si tous deux sont tranchants, il en sera de même de $|\Theta|$ dans tout le fluide (propriété bien connue des fonctions harmoniques).

51. NATURE DES SINGULARITÉS : ∞ AMONT, POINT DE BIFURCATION.

311. Considérons

$$U(Z) = \Omega(Z) + \frac{2\alpha}{i} \log \frac{Z - Z_0}{Z - \bar{Z}_0} + \frac{2\beta}{i} \log \frac{Z - Z_1}{Z - \bar{Z}_1}.$$

Cette fonction est réelle sur l'axe réel, car il en est ainsi de $\Omega(Z)$ puisque $T = 0$ et que l'on a

$$\log \frac{Z - Z_0}{Z - \bar{Z}_0} = \log \left| \frac{Z - Z_0}{Z - \bar{Z}_0} \right| + i\varphi, \quad \text{avec } \varphi = \widehat{\bar{Z}_0 Z Z_0},$$

les deux logarithmes étant rendus uniformes dans tout le plan par les coupures circulaires $Z_0 \bar{Z}_0$ et $Z_1 \bar{Z}_1$, $U(Z)$ est uniforme dans la couronne (C). La partie réelle est visiblement continue en $Z_0, \bar{Z}_0, Z_1, \bar{Z}_1$ et $U(Z)$ est régulière dans la couronne (C), frontières comprises.

Il en résulte, en appelant λ l'angle de $Z - Z_0$ ou $Z - Z_1$ avec la tangente au cercle correspondant pour $Z = Z_0$

$$\frac{\Omega(Z)}{i} \cong 2\alpha \log(Z - Z_0) \quad \text{et} \quad T(Z) \cong 2\alpha \log |Z - Z_0|, \quad \Theta_\lambda = \Phi(s_0 + 0) - 2\alpha\lambda,$$

pour $Z = Z_1$

$$\frac{\Omega(Z)}{i} \cong 2\beta \log(Z - Z_1) \quad \text{et} \quad T(Z) \cong 2\beta \log |Z - Z_1|, \quad \Theta_\lambda = \Psi'(s_1 - 0) - 2\beta\lambda.$$

Vitesse nulle à l'infini amont si $\beta \neq 0$, et au point de bifurcation si $\alpha \neq 0$.

On ne peut rien dire si $\beta = 0$, parois parallèle set si $\alpha = 0$, rebroussement de l'obstacle vers le fluide vif.

Ces résultats s'établissent immédiatement par la méthode de l'Annexe 3.

312. De même dans le plan t , nous considérerons

$$U(t) = \Omega(t) + \frac{2\alpha}{i} \log \frac{t-t_0}{t+i} - \frac{2\beta}{i} \log(t+i) \quad \text{par exemple.}$$

$U(t)$ est uniforme et régulière dans le demi-plan T . Conclusions analogues.

32. LIGNES DE JET.

321. La continuité de Φ et Ψ pour $s=0$ et π , pour $t=-1, +1, a$ et b nous indique que $\Theta(X, Y)$ ou $\Theta(t)$ a une valeur unique quelle que soit la direction de la courbe du plan Z ou t . (*Application de la théorie de l'intégrale de Poisson* ou Annexe 3).

D'où ces résultats : 1° l'obstacle et la ligne de jet se raccordent tangentiellement; 2° la vitesse est parallèle à la paroi à l'infini aval, et toutes les lignes de courant, y compris la ligne de jet correspondante, ont même direction asymptotique que la paroi à l'infini aval.

Les théorèmes établis sur la continuité de $\Omega(Z)$ (2819) et $\Omega(t)$ (282) nous assurent que la ligne de jet est à tangente continue (c'est-à-dire Θ varie continûment). De plus Θ est dérivable par rapport à X ou à t , sauf peut-être aux extrémités des lignes de jet et est d'ailleurs analytique. Remontant au plan (z), on en conclut que : les lignes de jet sont analytiques, sauf peut-être à leurs extrémités.

322. Si l'obstacle est *tranchant* ainsi que les parois, nous avons déjà dit que $|\Theta|$ est partout inférieure à π : c'est là un caractère commun à toutes les lignes de courant.

323. En appliquant à $\frac{\Omega}{i}$ les principes établis en Annexe 3, nous voyons que T est bien définie aux points $-1, +1, a$ et b du plan t (par exemple), donc de V , qui est alors égal à 1 : à l'extrémité de l'obstacle d'une part, dans tout le jet à l'infini aval d'autre part.

33. OBSTACLE.

331. *Plan Z.* — On a

$$(1) \quad z = \int_{s_0}^z e^{i\Omega(e^{i\alpha})} df$$

(213.1) qui fournit les coordonnées x et y des arcs σ_1 et σ_2 , sous forme paramétrique. Soit l l'abscisse curviligne sur l'obstacle, on a encore

$$(2) \quad \frac{dl}{ds} = j e^{-\tau(e^{i\alpha})} \frac{df}{ds},$$

avec $j = \mp 1$ pour $s \leq s_0 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$. Relation de M. Villat (*J. K.*, 1.31, p. 72) $\frac{df}{dt}$ et $\frac{dt}{dZ}$ étant donnés par (14.8), (17.6) avec $\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z = \frac{\omega_1}{\pi} s$ et $\frac{dZ}{iZ} = ds$.

La fonction $l(s)$ est donc continue et dérivable, et sa dérivée possède le même module de continuité que $T(e^{is})$ et appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(s)$, sauf en s_0 et $-s_0$.

D'après (311), au voisinage de $s = s_0$, on voit que $T(e^{is})$ se comporte comme

$$(3) \quad 2\alpha \log |e^{is} - e^{is_0}| + \text{fonction continue de } (s - s_0).$$

D'autre part $\frac{df}{ds}$ s'annule comme $(t - t_0)$ et, comme $\frac{dt}{ds} \neq 0$, $\frac{df}{ds}$ s'annule comme $s - s_0$.

D'où (*J. K.*, p. 73)

$$(4) \quad \frac{dl}{ds} = K(s)(s - s_0)^{1-2\alpha} + K_1(s),$$

avec K, K_1 continues $\neq 0$.

On voit encore que $\frac{dl}{ds}$ est 0, infini ou fini au point de bifurcation selon que $\alpha \leq \frac{1}{2}$ ou $= \frac{1}{2}$, c'est-à-dire selon que l'obstacle présente en O un angle saillant vers le courant, ou rentrant ou est continu.

L'intégrale (1) conserve un sens puisqu'on suppose $\alpha < 1$ (302); de sorte que $l(s)$ est continue et croissante même en O. Par ailleurs, aux points de détachement, $\frac{dl}{ds}$ est nul comme s ou $\pi - s$.

On a enfin

$$(5) \quad L = \int_0^\pi e^{-\tau} \left| \frac{df}{ds} \right| ds.$$

332. *Plan t.* — On aura

$$z = \int_{t_0}^t e^{i\Omega} df \quad \text{et} \quad \frac{dl}{dt} = j e^{-\tau} \frac{df}{dt} \quad j = \mp 1, \quad \text{pour } t \geq t_0 \quad (-1 \leq t \leq +1),$$

avec

$$\frac{df}{dt} = - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t - a)(t - b)}.$$

La fonction $l(t)$ est donc continue et dérivable, sa dérivée appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(t)$ (2821) comme $e^{-\tau}$, sauf pour $t = t_0$. Mais $T(t)$ se comporte alors comme $2\alpha \log(t - t_0)$ (312), d'où $\frac{dl}{dt} = K(t)(t - t_0)^{1-2\alpha} + K_2(t)$: mêmes conclusions.

Mais ici $\frac{dl}{dt}$ ne s'annule pas aux points de détachement.

On a

$$L = \int_{-1}^{+1} e^{-\tau} \frac{df}{dt} dt.$$

34. PAROIS.

3410. *Plan Z.* — Nous avons montré (281) que $\Omega(Z)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$. Partant d'un point de l'obstacle pour aboutir à un point z' de la paroi μ_1 en suivant sur le plan Z un chemin analytique et borné, nous sommes certains que z' sera à distance finie. Partant de ce point, que va-t-il se passer à l'infini amont et à l'infini aval?

Nous avons encore

$$(1) \quad \frac{dl_1}{ds} = e^{-T(qe^{is})} \frac{df}{ds},$$

l_1 étant l'arc de paroi μ_1 , $\frac{dl_1}{ds}$ est infini pour $s = s_1$, 0 et π ($t = \infty, a, b$).

Nous avons posé nos conditions (12) (301) pour que $f \rightarrow -\infty$ pour $s \rightarrow s_1$. Nous vérifions aisément que $\frac{dl_1}{ds}$ conserve un signe constant convenable (1).

Considérons

$$(2) \quad z - z' = \int_{s'}^t e^{i\Omega} df = \int_{s'}^t e^{i\Omega} d\varphi \quad \text{et} \quad \begin{cases} y - y' = \int_{s'}^t e^{-T} \sin \Psi \frac{d\varphi}{ds} ds, \\ x - x' = \int_{s'}^t e^{-T} \cos \Psi \frac{d\varphi}{ds} ds. \end{cases}$$

Si $\theta_1, \theta_2, \theta'_1, \theta'_2 \neq 0, \gamma \neq \infty$. Si au contraire $\theta_1, (\theta_2)$ et $\theta'_1, (\theta'_2) = 0$, alors y peut ou non augmenter indéfiniment (parois paraboliques).

Dans le *problème inverse* cherchons des conditions pour que le canal construit reste d'ouverture bornée, c'est-à-dire pour que les parois aient des asymptotes. Il faut et il suffit que l'on ait, pour $s = s_1, 0$ et π

$$(3) \quad \lim |y - y'| < A \quad \text{et} \quad \lim |x - x'| \rightarrow \infty.$$

3411. *Infini amont.*

34111. $V = e^T$ ne doit pas être nul (sinon épanouissement indéfini). Il faut donc $-T_q(s_1)$ bornée supérieurement. D'après (2712.2), il suffit que $\int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s_1)}{\varepsilon - s_1}$ reste bornée. La continuité de $\Psi(s_1)$ est déjà assurée en s_1 . Cette autre condition sera en particulier satisfaite en vertu du théorème de M. J. Kravtchenko (A. 22 ou J. K., p. 66) si $\Psi(s)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(s)$

(1) On a

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t - a)(t - \gamma)} \sqrt{R(t)} \frac{\omega_1}{i\pi} \frac{1}{Z} \frac{dZ}{ds} = \omega_1 \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi^2} (t - t_0) \sqrt{\frac{t^2 - 1}{(t - a)(t - b)}},$$

aussi bien pour $Z = e^{is}$ que pour $Z = qe^{is}$, car $\frac{dZ}{Z} = i ds$ dans les deux cas.

même en s_1 (en particulier si $\Psi(s)$ y est dérivable). [On peut d'ailleurs ne faire appel qu'à (A. 314. 1) et l'égalité $\Psi(s_1 + 0) = \Psi(s_1 - 0)$ suffirait.]

34112. Ceci posé, je dis que la première égalité (3410. 3) est satisfaite.

On a, en effet,

$$\left| \int e^{-\tau} \sin \Psi \frac{d\varphi}{ds} ds \right| < B \int \left| \sin \Psi \frac{d\varphi}{ds} \right| ds,$$

B étant le maximum de $e^{-\tau}$ qui existe en vertu de (303) (34111) et des propriétés du module de continuité.

Mais $\left| \frac{\sin \Psi}{\Psi} \right|$ reste borné quel que soit Ψ , et il suffit d'examiner $\Psi \frac{d\varphi}{ds}$.

Or

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds} \quad \text{avec} \quad \frac{dt}{ds} = -\frac{\omega_1}{\pi} \frac{p' \frac{\gamma}{2} p' \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} \alpha \right)}{\left[p \frac{\gamma}{2} - p \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} \alpha \right) \right]^2},$$

où l'on a posé $s = s_1 + \alpha$.

Mais

$$p \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} \alpha \right) = p \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} \alpha p' \frac{\gamma}{2} + \dots \quad \text{et} \quad \frac{dt}{ds} \cong -\frac{\pi}{\omega_1} \frac{1}{(s - s_1)^2} \dots$$

D'autre part

$$\frac{df}{dt} \cong -\frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{1}{t} \cong k \frac{p \frac{\omega_1}{\pi} \alpha}{p' \frac{\omega_1}{\pi} \alpha} = k'(s - s_1),$$

k' étant une quantité bornée, car

$$\psi_1 + \psi_2 = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{-\tau} \cos \theta dy$$

depuis un point de μ_1 à un point arbitraire de μ_2 , qui sont à distances finies (cf. 3410), est bornée. En définitive $\frac{d\varphi}{ds}$ est de l'ordre de $\frac{1}{s - s_1}$. On est donc

ramené à $\int \frac{\Psi(\varepsilon)}{\varepsilon - s_1} d\varepsilon$, ou puisque

$$\Psi(s_1) = 0 \quad \text{à} \quad \int \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s_1)}{\varepsilon - s_1} d\varepsilon,$$

la condition $\mathcal{L}_n(s_1)$ suffit donc, et le point à l'infini amont reste à une distance bornée de l'axe Ox .

34113. Quant à $x - x' = \int e^{-\tau} \cos \Psi \frac{d\varphi}{ds} ds$ comme $e^{-\tau}$ et $\cos \Psi$ ne s'annulent pas, et que $\frac{d\varphi}{ds}$ devient infini comme $\frac{1}{s - s_1}$, $x - x'$ devient bien infini.

3412. *Infini aval.*

34121. Soit le point $-q$ correspondant à l'infini aval sur μ_1 et à $t=b$.
 $\frac{df}{dt} \rightarrow \infty$ comme $\frac{1}{t-b}$, mais

$$t-b = \frac{1}{2} \left[\frac{p' \left(\omega_1 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - p'^{\gamma}}{p \left(\omega_1 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - p^{\gamma}} - \frac{p' \left(\omega_1 - \frac{\gamma}{2} \right) - p'^{\gamma}}{p \left(\omega_1 - \frac{\gamma}{2} \right) - p^{\gamma}} \right]$$

et

$$\frac{dt}{ds} = - \frac{\omega_1}{\pi} \frac{p' \frac{\gamma}{2} + p' \left(\omega_1 - \frac{\omega_1}{\pi} s \right)}{\left[p \frac{\gamma}{2} - p \left(\omega_1 - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right]^2}$$

Pour $s = \pi$, $\frac{dt}{ds}$ s'annule comme $\pi - s$ (pour $s = 0$, comme s , raisonnement différent), et $t-b$ s'annule comme $(\pi - s)^2$ (pour $s = 0$ comme s^2). Il suffit d'intégrer pour le voir (remarquer que $t-a$ a une forme différente $dt-b$). De sorte que $\frac{df}{ds}$ est infini comme $\frac{1}{\pi-s}$ ou $\frac{1}{s}$, et comme $e^{-t} \rightarrow 1$ et $\theta \rightarrow 0$, l'intégrale en cause se ramène à la même forme et la condition $\mathcal{L}_n(\pi)$ où $\mathcal{L}_n(0)$ suffit encore.

34122. On vérifie aisément que le domaine (A) du plan z s'étend bien à l'infini vers Ox .

3413. On a donc le *théorème* suivant (1) :

a. Pour assurer au canal une même direction asymptotique unique Ox , il est nécessaire que $\Psi(s_1 + 0) = \Psi(s_1 - 0) = \Psi(0) = \Psi(\pi) = 0$, mais cela est insuffisant.

b. Une condition suffisante pour que le canal soit à tangente continue et admette des asymptotes parallèles à Ox en amont et en aval est alors que $\Psi(s)$ vérifie en outre une condition $\mathcal{L}_n(s)$ [$n > 1$] partout, même pour $s_1, 0$ et π .

3420. *Plan t.*

Nous avons montré (282) que $\Omega(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(t)$.

Le chemin est donc borné dans le plan z entre deux points appartenant l'un à l'obstacle, l'autre à une paroi [même raisonnement que (3410)].

Nous avons

$$(1) \quad \frac{dl_1}{dt} = e^{-t} \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t-a)(t-b)} > 0, \quad \text{pour } -\infty < t < a,$$

c'est-à-dire sur μ_1 .

(1) *Comptes rendus*, 214, 1942, p. 149 à 151.

Journ. de Math., tome XXII. — Fasc. 4, 1943.

De même

$$\frac{dl_2}{dt} \text{ est } < 0 \text{ sur } \mu_2.$$

Nous voulons vérifier les inégalités (3410.3).

3421. *Infini amont.*

34211. Condition nécessaire : — $T(\infty)$ bornée supérieurement.

Nous avons vu (2826) que l'inégalité $|\Psi(t) - \Psi(\infty)| < \gamma_n(t)$ conduit à $|\Omega(t) - \Omega(\infty)| < \gamma_{n-1}(t)$, donc à $|T(t) - T(\infty)| < \gamma_{n-1}(t)$ et $|-T(\infty)|$ reste borné comme $|T(t)|$. En faisant appel à (A. 33.2), on voit d'ailleurs que l'égalité $\Psi(-\infty) = \Psi(+\infty)$ suffit.

34212. Ceci posé, $\frac{df}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$ est de l'ordre de $\frac{1}{t}$. Il suffit d'examiner $\int \Psi \frac{d\varphi}{dt} dt$ ou $\int \frac{\Psi}{t} dt$. Si Ψ satisfait à une condition $\mathcal{L}_n(t)$ [$n > 1$], $\int \frac{\Psi}{t} dt$ sera de l'ordre de $\gamma_{n-1}(t)$ et satisfera à une condition $\mathcal{L}_{n-1}(t)$.

• 34213. $|x - x'| \rightarrow \infty$, car $\frac{d\varphi}{dt}$ est de l'ordre de $\frac{1}{t}$ et $e^{-T} \cos \Psi \neq 0$.

3422. *Infini aval.*

Pour $t = a$, $\frac{dl_1}{dt}$ est infini comme $\frac{1}{t-a}$ (3420.1). Il suffit d'examiner $\int^a \frac{\Psi(t)}{t-a} dt$. Il suffira donc que $\Psi(t)$ vérifie une condition $\mathcal{L}_n(t)$ en a .

3423. On a donc le même théorème :

a. Pour assurer une direction asymptotique unique, il est nécessaire que

$$\Psi(+\infty) = \Psi(-\infty) = \Psi(a) = \Psi(b) = 0.$$

b. Pour que le canal soit à tangente continue et admette des asymptotes parallèles à Ox en amont et en aval, il suffit en outre que $\Psi(t)$ vérifie une condition $\mathcal{L}_n(t)$ [$n > 1$] partout, même pour ∞ , a et b .

Le canal reste alors de largeur bornée.

35. ASYMPTOTES (cf. J. K., p. 74).

351. La distance des asymptotes à λ_1 et à μ_1 reste Ψ_1 ; à λ_2 et μ_2 reste Ψ_2 .

352. Si le canal reste de largeur bornée, l'asymptote à λ_1 a pour ordonnée $y_1 = \int_a^b \sin \Theta d\varphi$, la distance du point de détachement à l'asymptote est $d_1 = \int_1^b \sin \Theta d\varphi$.

56. POINTS DE DETACHEMENT. PROUE.

360. L'examen de l'allure de $z(f)$ aux points de détachement n'est pas sensiblement modifié; nous ne reproduisons ici les raisonnements, qui emboîtent ceux de M. J. Kravtchenko (*J. K.*, § 13, p. 77 et suiv.), que dans la mesure où ils sont nécessaires pour fixer les résultats.

361. *Plan Z.*

3611. Considérons le sillage correspondant aux données $a, b, \psi_1, \psi_2, \Phi(s)$ et $\Psi(s)$. La fonction $z(f)$ est analytique, exception faite des points de bifurcation, de détachement et à l'infini.

3612. Supposons (toujours) que $\Phi(s)$ vérifie une condition $\mathcal{L}_n(s)$, sauf pour $s = s_0$, alors $\frac{ds}{dl}$ existe et vérifie une condition $\mathcal{L}_{n-1}(l)$ sur l'obstacle, sauf pour $s_0, 0, \pi$.

Supposons maintenant que $\Phi'(l)$ existe (courbure) et appartienne à l'espace $\mathcal{L}_n(l)$, sauf pour $l_0 = l(s_0)$ où elle peut être discontinue mais bornée. Alors $\frac{d\Phi}{ds}$ existe, sauf pour $s = s_0$ et appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(s)$. Remarquons que $\frac{d\Phi}{ds}$ est alors nul pour $s = 0$ et π , ce qui implique que pour obtenir une courbure bornée de l'obstacle aux points de détachement, il est nécessaire que $\Phi(s)$ satisfasse à ces conditions. Nous y reviendrons.

L'inégalité (*J. K.*, 1.34', p. 78)

$$(1) \quad \Omega'(Z) - \Omega'(\pm 1) \leq \gamma_{n-1}(Z \mp 1)$$

reste valable, la participation de la fonction de parois étant lipschitzienne. On est alors conduit à l'inégalité suivante (*J. K.*, 1.34', p. 79) où $\frac{d\Omega}{df}$ est la courbure de λ_2 ou λ_1

$$(2) \quad \left| \frac{d\Omega}{df} - \frac{\Omega'(\pm 1)}{2N} \frac{Z \mp 1}{Z \mp 1} \right| \leq \frac{\gamma_{n-1}(Z \mp 1)}{|Z \mp 1|} \quad \text{où } N = \lim_{Z \rightarrow \pm 1} \frac{df}{dt} \frac{dt}{dZ} \frac{1}{Z \mp 1} > 0.$$

Posant (*J. K.*, 1.35, p. 79)

$$(3) \quad \frac{d\Omega}{df} = U + iV,$$

il vient (*J. K.*, 1.35', p. 80)

$$(4) \quad U(e^{i\alpha}) + iV(e^{i\alpha}) = j \frac{d\Phi}{dl} e^{-\Gamma} + ij e^{-\Gamma} \frac{d\Gamma}{dl}, \quad j = \pm 1 \quad \text{pour } \begin{cases} \pi \geq s \geq s_0, \\ 0 \leq s \leq s_0. \end{cases}$$

En introduisant la double fonction $W(Z)$ définie comme suit (*J. K.*, p. 80) : $W(Z)$ est analytique pour $q \leq |Z| < 1$, vérifie $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ pour $|Z| = 1$, est réelle pour Z réel, égale à U au voisinage de $Z = \pm 1$, quelconque mais continue et

suffisamment régulière sur le reste de la frontière de (C); et en examinant

$$P(Z) = \frac{d\Omega}{df} - \frac{\Omega'(\pm 1)}{2N} \frac{Z \pm 1}{Z \mp 1} - W(Z) \quad [P(Z) \text{ est une double fonction}];$$

on voit que $P(Z)$ est holomorphe pour la valeur $Z = \pm 1$ [signe convenable].
Compte tenu de

$$W(\pm 1) = \left(\mp \frac{d\Phi}{dt} \right)_{s=\frac{\pi}{2}},$$

il vient (*J. K.*, 1.36, p. 80)

$$(5) \quad \left| \frac{d\Omega}{df} - \frac{\Omega'(\pm 1)}{2N} \frac{Z \pm 1}{Z \mp 1} \pm \frac{d\Phi}{dt} \right|_{s=\frac{\pi}{2}} \leq \gamma_{n-1}(Z \mp 1).$$

3613. On en conclut encore que les résultats fondamentaux de M. H. Villat se retrouvent; les lignes libres ont un rayon de courbure nul si $\Omega'(\pm 1) \neq 0$; elles sont convexes vers l'amont ou l'aval selon que $\Omega'(\pm 1)$ est $-$ ou $+$. [Notons que le cas $\Omega'(\mp 1) < 0$ répond seul à la condition de validité totale $V \leq 1$.]

Si $\Omega'(\pm 1) = 0$, la ligne libre est osculatrice à l'obstacle qui peut alors être prolongé dans le sillage par un arc σ_2 ou σ' , à courbure non nulle sans troubler le régime hydrodynamique : détachement en proue.

3614. *Digression.* — Dans le cas de l'obstacle et du canal symétrique à parois parallèles et si l'obstacle monotone se termine par une tangente parallèle à Ox , le détachement doit avoir lieu vers l'amont (courbure vers le fluide vif plus correctement). Par application des formules (*J. K.*, B 54, p. 88), on vérifie aisément que $\Omega'(\pm 1) > 0$.

Il faut observer que, physiquement, on aurait un détachement en proue en amont.

En tout cas, cette digression montre que l'on ne peut pas partir de l'unique courbure pour décider si le détachement sera vers l'aval ou l'amont. Cependant, on connaît quelques cas où cela est possible (*J. K.*, p. 88).

3615. Revenons au cas de la proue dans les conditions soulignées en (3612). La condition de non-recoupement des lignes libres et de l'obstacle se traduit encore par la condition due à M. J. Leray

$$(1) \quad c_2 = \frac{d}{dZ} \left(\frac{d\Omega}{df} \right)_{Z=1} > 0 \quad (\text{J. K.}, \text{p. 85}).$$

La deuxième condition de M. M. Brillouin $V \leq 1$ ne peut être satisfaite dans tout le voisinage de $P_2(f = \varphi_2)$ que moyennant les deux conditions

$$(2) \quad c_2 \leq 0, \quad c'_2 \geq 0 \quad (\text{J. K.}, \text{p. 86}),$$

dont la première est la condition de convexité vers l'amont : la condition c'_2 est une condition suffisante (mais non nécessaire) de validité locale pour les proues convexes.

Les remarques des pages (J. K., 86) et suivantes restent valables, mais les formules (A), (A'), (B) et (B') doivent être modifiées :

1° Dans leurs notations : la fonction Ψ pour nous est la fonction de parois (notation introduite déjà par M. H. Villat); la fonction Ψ introduite par M. J. Kravtchenko sera notée par nous différemment en posant

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{\Phi}(s) = \Phi(s) + \pi, & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \quad (1), \\ \bar{\Phi}(s) = \Phi(s), & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi; \end{cases}$$

2° Par adjonction d'un terme provenant de la fonction de parois; on obtient (2) aisément (par dérivation) par exemple

$$(B) \quad \Omega'(1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi [\Phi(0) - \Phi(\varepsilon)] p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon d\varepsilon + \frac{2\eta_2\omega_1}{\pi^2} \Phi(0) + \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_3 \right) d\varepsilon.$$

$$(B') \quad \Omega'(-1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\pi)] p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_1 \right) d\varepsilon - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Phi(\pi) - \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_1 + \omega_3 \right) d\varepsilon.$$

3616. Nous allons examiner des cas où la nature du détachement peut être précisée en application de (3613).

36160. Pour des obstacles tels que $\Phi(0) \leq \Phi(s) \leq \Phi(\pi)$ avec $\Phi(0) < 0 < \Phi(\pi)$, les deux premières parties des seconds membres de (B) et (B') sont négatifs sous réserve de la condition $\eta_1 > 0$ (J. K., p. 88-89).

36161. Si l'on considère $p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_3 \right)$ et $p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_1 + \omega_3 \right)$, la première de ces fonctions est croissante et la deuxième décroissante. Nous pouvons donc appliquer le « lemme de Leray » (3) sous la condition restrictive

$$(R) \quad \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0.$$

(1) Rectifier le signe à la page 70 de la Thèse de M. J. Kravtchenko.

(2) $\Omega'(\mp 1)$ sont finis si $\frac{d\Phi}{d\varepsilon} = 0$ pour $\varepsilon = 0$ ou π .

(3) J. KRAVTCHENKO, *Thèse*, p. 107.

Soit un canal monotone convergent (306) ou plus généralement les conditions

$$\Psi(\varepsilon) \geq 0 \text{ pour } 0 \leq \varepsilon \leq s_1, \quad \text{et} \quad \Psi(\varepsilon) \leq 0 \text{ pour } s_1 \leq \varepsilon \leq \pi;$$

en vertu du lemme de Leray, $\int_0^\pi \Psi(\varepsilon) p\left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_3\right) d\varepsilon$ est négative; de même, en est-il pour $-\int_0^\pi \Psi(\varepsilon) p\left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_1 + \omega_3\right)$, de sorte que (B) et (B') sont certainement négatifs.

Pour ces obstacles et parois, le détachement n'est pas en proue mais est cependant convexe vers l'amont (3613).

36162. Si la condition (R) n'est pas remplie, les deux intégrales en Ψ peuvent ou non avoir des signes convenables. Soit $|\Psi|_M$ le maximum du module de $\Psi(s)$; on voit facilement qu'il suffit de satisfaire à

$$|\Psi|_M < \frac{\eta_1}{\omega_1 e_1} |\Phi|_0 \text{ et } |\Phi|_\pi \text{ où } \eta_1 > 0 \quad (36160).$$

36163. On sait que $\eta_1 > 0$ pour

$$q^2 < \frac{1}{27} \quad \text{et} \quad \eta_1 < 0 \text{ pour } q^2 > \frac{1}{26} \quad (J. K., \text{notule 43, p. 89}).$$

36164. La minoration de $\frac{\eta_1}{\omega_1 e_1}$ à partir de (T. M., X, 3) conduit facilement à l'inégalité

$$\frac{\eta_1}{\omega_1 e_1} > \varphi(q) \quad \text{où } \varphi(q) = \frac{1}{2} [1 - 27q^2 + 3q^4 - q^6]^2,$$

avec le tableau

q	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$
q^2	0	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{27}$
$\varphi(q)$	0,5	0,48	0,28	0,07	0,0018

36165 On a alors la *proposition* suivante (1). Soit $\Phi(s)$ telle que

$$\Phi(0) \leq \Phi(s) \leq \Phi(\pi) \quad \text{et} \quad \Phi(0) < 0 < \Phi(\pi),$$

la fonction d'obstacle (ce qui est en particulier le cas de l'obstacle concave).

Si $\eta_1 = \zeta \omega_1$ est > 0 (en particulier si $q \leq q' \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$), on peut affirmer que le

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 679. Nous avons écourté la démonstration.

détachement n'est pas en proue, tout en étant convexe vers l'amont (donc $V < 1$) dans les deux cas suivants :

a. Canal monotone convergent avec la restriction

$$R : \int_0^{\pi} \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\pi} \Psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0.$$

C'est en particulier le cas du schéma symétrique.

b. Canal quelconque satisfaisant à

$$|\Psi| < \frac{\eta'}{e_1 \omega_1} |\Phi|_0 \quad \text{et} \quad |\Phi|_{\pi}.$$

c'est-à-dire tel que l'angle de pente des parois en valeur absolue soit plus faible que la fraction $\frac{\eta'}{e_1 \omega_1}$ des angles de pente aux deux extrémités de l'obstacle (en valeurs absolues), lesquelles sont des maximums.

3617. *Condition de courbure de l'obstacle aux points de détachement.* — On a

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{dl} \frac{dl}{ds}.$$

Si l'on veut que l'obstacle ait une courbure $\frac{d\Phi}{dl}$ bornée, c'est-à-dire un rayon de courbure non nul aux points de détachement, il faut que $\frac{d\Phi}{ds} = 0$, car $\frac{dl}{ds} = 0$.

Si $\frac{d\Phi}{ds} \neq 0$, l'obstacle possédera un rayon de courbure nul au détachement.

Si $\frac{d\Phi}{ds}$ est nul et lipschitzien, $\frac{dl}{ds}$ étant nul et d'infinitude $= 1$, comme on le vérifie aisément, $\frac{d\Phi}{dl}$ reste fini et le rayon de courbure n'est pas nul (résultat déjà remarqué par M. J. Kravtchenko). La condition de Lipschitz est d'ailleurs nécessaire : $\frac{d\Phi}{ds} = 0$ ne suffisant pas. Si $\frac{d\Phi}{ds}$ s'annule comme s^α [ou $(\pi - s)^\alpha$] avec $\alpha < 1$ rayon de courbure nul, $\alpha > 1$ rayon de courbure infini.

362. *Plan t.* — Nous avons tenté de discuter l'allure des points de détachement dans le plan t . Nous avons été amené à tourner les difficultés en passant par le plan Z qui est plus commode, donc à interpréter les résultats de (361).

En particulier, (3613) conduit au résultat suivant :

Si $\frac{d\Omega}{dt} \sqrt{1-t^2}$ a une limite finie ou infinie pour $t = \pm 1$, et est positive, la convexité se présente vers l'aval, ou est négative, la convexité se présente vers l'amont. Si cette limite est nulle, le détachement est en proue.

37. POINTS A L'INFINI AVAL.

370. Valeur de $\frac{d\Psi}{ds}$. — Nous considérerons la paroi μ_2 pour fixer les idées et lui supposerons une asymptote parallèle à Ox en aval.

371. Supposons alors un développement, où la série entre crochet est supposée convergente

$$(1) \quad \Psi(l_2) = \frac{1}{l_2^\alpha} \left[A_0 + A_1 \frac{1}{l_2} + A_2 \frac{1}{l_2^2} + \dots \right];$$

on aura alors (ce qui suppose que $l_2^{\alpha+1} \frac{d\Psi}{dl_2}$ a une limite $\neq 0$)

$$\frac{d\Psi}{dl_2} = \frac{1}{l_2^{\alpha+1}} \left[-A_0 \alpha - A_1 (\alpha + 1) \frac{1}{l_2} - A_2 (\alpha + 2) \frac{1}{l_2^2} + \dots \right].$$

Considérons $\frac{d\Psi}{ds} = \frac{d\Psi}{dl_2} \frac{dl_2}{ds}$ et cherchons la valeur asymptotique de $\frac{dl_2}{ds}$ pour $s = o(t = a)$

$$\frac{dl_2}{ds} = - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} e^{-\Gamma} \frac{t - t_0}{(t - a)(t - b)} \frac{dt}{ds}$$

et

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{(t - a)(t^2 - 1)(t - b)} \frac{du}{ds}, \quad \frac{du}{ds} = - \frac{\omega_1}{\pi},$$

d'où

$$\frac{dt}{ds} = - \frac{\omega_1}{\pi} \sqrt{(a^2 - 1)(b - a)} \sqrt{a - t} [1 + H(t)] \quad \text{avec } H(a) = 0.$$

Posons

$$a - t = z^2,$$

il vient

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\omega_1}{2\pi} \sqrt{(a^2 - 1)(b - a)} [1 + O_1(z)],$$

d'où l'on tire

$$z [1 + O_2(z)] = \frac{\omega_1}{2\pi} \sqrt{(a^2 - 1)(b - a)} s$$

et

$$\sqrt{a - t} = \frac{\omega_1}{2\pi} \sqrt{(a^2 - 1)(b - a)} s [1 + O_4(s)].$$

Il s'ensuit

$$\frac{dl_2}{ds} = - \frac{K_0}{s} + K + K_1 s + \dots \quad \text{avec } K_0 > 0,$$

$$l_2 = -K_0 \log s + H(s) \quad \text{et} \quad s = A e^{-\frac{l}{K_0}} \left[1 + O_5\left(\frac{1}{l}\right) \right],$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{\alpha A_0 K_0}{s l_2^{\alpha+1}} [1 + \dots] [1 + \dots] = \frac{\alpha A_0 K_0^{-\alpha}}{s \left[\log \frac{1}{s} \right]^{\alpha+1}} [1 + \dots].$$

Le développement (1) correspond donc à une fonction $\Psi(s)$ dont la dérivée devient infinie pour $s = 0$, de sorte que si $\frac{d\Psi}{ds}$ est finie ou nulle, le contact sera infini.

372. Soit maintenant

$$(1) \quad \Psi(l_2) = e^{-\alpha l_2} \left[A_0 + A_1 \frac{1}{l_2} + A_2 \frac{1}{l_2^2} + \dots \right],$$

$$\frac{d\Psi}{dl_2} = -\alpha e^{-\alpha l_2} A_0 [1 + \dots] \quad \text{et} \quad \frac{d\Psi}{ds} = -\frac{\alpha K_0 A_0}{s e^{\alpha l_2}} [1 + \dots],$$

$\frac{d\Psi}{ds}$ aura une limite ($\neq 0$) si $s e^{\alpha l_2}$ a une limite ($\neq 0$), c'est-à-dire si $\alpha l_2 + \log s$ a une limite. Or,

$$\alpha l_2 + \log s = (1 - \alpha K_0) \log s + \alpha H(s),$$

d'où la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{d\Psi}{ds}$ ait une limite est

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{K_0};}$$

on a alors

$$\lim \frac{d\Psi}{ds} = -\alpha A_0 K_0.$$

Si $0 < \alpha < \frac{1}{K_0}$, $\frac{d\Psi}{ds} \rightarrow \infty$ comme $-\frac{\alpha A_0 K_0}{s^{1-\alpha K_0}}$;

Si $\frac{1}{K_0} < \alpha$, $\frac{d\Psi}{ds} \rightarrow 0$ comme $-\alpha A_0 K_0 s^{2\alpha K_0 - 1}$.

373. Les résultats ci-dessus montrent ce qu'il y a d'artificiel dans la représentation sur le plan Z , puisque pour être certain d'avoir une asymptote élémentaire on est amené à donner à $\frac{d\Psi}{ds}$ une valeur ∞ . Il y aurait intérêt à voir ce qui se passe dans le plan t .

374. On voit aisément que K_0 est un nombre qui dépend de ψ_1, ψ_2, a et b ou ω_1, ω_2, s_0 et s_1 .

375. Considérons réciproquement le cas suivant :

$$\frac{d\Psi}{ds} = B s^\gamma + \dots \quad \text{d'où} \quad \Psi = \frac{B}{\gamma + 1} s^{\gamma+1} + \dots$$

et comme

$$l_2 = -K_0 \log s - \dots \quad \Psi = \frac{B}{\gamma + 1} \frac{1}{e^{\frac{\gamma+1}{K_0} l_2}} + \dots$$

Nous supposons $\gamma > -1$ (puisque Ψ est borné). On voit alors que $\Psi \rightarrow 0$, mais le contact est infini, alors que $\frac{d\Psi}{ds}$ peut être fini nul ou infini.

376. Considérons

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{B}{s \left(\log \frac{1}{s}\right)^{\alpha+1}} + \dots \quad \text{d'où} \quad \Psi = \frac{B}{\alpha \left(\log \frac{1}{s}\right)^{\alpha}} + \dots = \frac{B}{\alpha \left(\frac{l}{K_0}\right)^{\alpha}} + \dots$$

le contact est alors fini pourvu que $\alpha > 1$ (cf. 3413).

Si $\alpha \leq 0$, $\Psi(0)$ est alors infini, ce qui est saugrenu.

377. On a ainsi les théorèmes suivants (1) :

Soit un canal de direction asymptotique Ox en aval [$\Psi(0) = \Psi(\pi) = 0$] :

a. Si $\frac{d\Psi}{ds}$ reste fini ou s'annule ou est infini comme Bs^{γ} ($\gamma > -1$), le contact est infini avec l'asymptote et l'on a,

$$\text{partie principale } \Psi = \frac{B}{\gamma+1} \frac{1}{e^{\frac{\gamma+1}{K_0} l_2}}$$

C'est le cas d'une bonne fonction $\Psi(s)$ dont la dérivée reste finie.

b. Il est nécessaire (non suffisant) que $\frac{d\Psi}{ds}$ soit ∞ pour avoir un contact d'ordre fini.

c. Il est suffisant que $\frac{d\Psi}{ds}$ soit de la forme $\frac{B}{s \left(\log \frac{1}{s}\right)^{\alpha+1}} + \dots$ ($\alpha > 1$) et la partie principale est

$$\Psi = \frac{B}{\alpha} \left(\frac{K_0}{l_2}\right)^{\alpha} \quad [s \text{ ou } \pi - s \text{ selon } \mu_2 \text{ ou } \mu_1].$$

378. Si le canal se termine par une partie rectiligne, on est dans le cas a.

379. Étude de $\Omega'(Z)$.

3790. On a

$$\begin{aligned} \Omega'(Z) = & -\frac{\omega_1^2}{\pi^3} \frac{1}{Z} \int_0^{\pi} \Phi(\varepsilon) \left[p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) + p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) \right] d\varepsilon \\ & + \frac{\omega_1^2}{\pi^3} \frac{1}{Z} \int_0^{\pi} \Psi(\varepsilon) \left[p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_3 \right) + p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_3 \right) \right] d\varepsilon. \end{aligned}$$

3791. En introduisant $\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)$, on retrouve $\Omega'(\pm 1)$.

3792. En introduisant $\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)$, on aura

$$\begin{aligned} \Omega'(Z) = & \frac{\omega_1^2}{\pi^3} \frac{1}{Z} \left\{ \int_0^{\pi} [\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)] \left[p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_3 + \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \right] d\varepsilon \right. \\ & \left. - 2\gamma_1 \frac{\pi}{\omega_1} \Psi(s) - \int_0^{\pi} \Phi(\varepsilon) \left[p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) + p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \right] d\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

(1) C. R. Acad. Sc., 214, 1942, p. 150.

3793. Si l'on fait $Z = qe^{is}$, il vient dans $\Omega'(qe^{is})$ un terme en

$$\int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)}{(\varepsilon - s)^2} d\varepsilon.$$

ce qui est incommode

3794. Faisons

$$Z = \rho e^{is} \quad \text{et} \quad \rho = q e^{\alpha z} z \geq 0, \quad \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z = \omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi} s + \frac{\omega_1}{i\pi} \alpha,$$

il vient

$$\begin{aligned} \Omega'(\rho e^{is}) = \frac{\omega_1^2}{\rho \pi^3} e^{-is} \left\{ \int_0^\pi [\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)] \left[p \left(\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon + s) + \frac{\omega_1}{i\pi} \alpha \right) + p \left(\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) - \frac{\omega_1}{i\pi} \alpha \right) \right] d\varepsilon - 2\eta_1 \frac{\pi}{\omega_1} \Psi(s) \right. \\ \left. - \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left[p \left(\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon + s) + \frac{\omega_1}{i\pi} \alpha + \omega_3 \right) + p \left(\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) - \frac{\omega_1}{i\pi} \alpha + \omega_3 \right) \right] d\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

3795. Sur OX nous avons alors [$\Psi(0)$ étant nul], avec $\alpha = \log \frac{X}{q}$,

$$\begin{aligned} \Omega'(X) = \frac{\omega_1^2}{X \pi^3} \left\{ \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) \left[p \frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - i\alpha) + p \frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon + i\alpha) \right] d\varepsilon \right. \\ \left. - \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left[p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - i\alpha - \omega_3 \right) + p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + i\alpha + \omega_3 \right) \right] d\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Mais sur OX, nous avons

$$T = 0, \quad \text{donc} \quad \frac{d\Omega}{dZ} = \frac{d\Omega}{dX} = \frac{d\theta}{dX}.$$

(Nous vérifions immédiatement que le second membre est réel.)

Si $\alpha \rightarrow 0$, ce deuxième membre augmente en général indéfiniment, avec la partie principale du crochet

$$2 \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) d\varepsilon.$$

37951. Canal divergent : $\Psi(+0)$ est négatif, donc $\frac{d\theta}{dX}$ est négatif et θ décroît sur λ_2 à partir de zéro, donc est négatif : la courbure des lignes libres est concave vers le village à l'infini aval.

37952. Canal convergent : conclusion contraire, et en particulier, il y a des points pour lesquels V est > 1 .

37953. Dans les deux cas, le canal et le sillage ont même allure; pour y échapper, il faut que $\int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon)}{\varepsilon^2} d\varepsilon$ reste borné, donc que $\Psi(\varepsilon)$ ait un module de continuité convenable pour $\varepsilon = 0$ et en particulier que $\Psi'(\varepsilon) = 0$.

3796. Nous avons vu que pour obtenir un canal ayant un contact d'ordre fini avec ses asymptotes en aval, il faut $\frac{d\Psi}{d\varepsilon} = \infty$. Nous avons vu que pour obtenir une allure différente, il faut $\frac{d\Psi}{d\varepsilon} = 0$. Il faut donc un contact extrêmement étroit du canal avec ses asymptotes pour que les lignes libres puissent être concaves vers le sillage dans le cas du canal convergent. Cette remarque nous sera utile.

38. POINTS A L'INFINI AMONT.

380. Plaçons-nous sur μ_1 , toujours dans l'hypothèse d'une seule direction asymptotique $\Psi(s_1) = 0$.

381. Soit un développement de la forme

$$(1) \quad \Psi(l_1) = \frac{1}{(-l_1)^2} \left[A_0 + A_1 \frac{1}{l_1} + \dots \right], \quad \frac{d\Psi}{dl_1} = \frac{1}{(-l_1)^{2+1}} \left[A_0 \alpha + A_1 (\alpha - 1) \frac{1}{l_1} + \dots \right],$$

$$\frac{dl_1}{ds} = e^{-\tau} \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{\omega_1}{\pi} \frac{t - t_0}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \sqrt{t^2 - 1} \quad \text{avec} \quad \frac{dt}{ds} = -\frac{\omega_1}{\pi} \sqrt{(t-a)(t^2-1)(t-b)}.$$

Posons

$$t = \frac{1}{\tau}; \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{\omega_1}{\pi} [1 + O_1(\tau)],$$

d'où

$$\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_1) = \tau [1 + O_2(\tau)] \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_1) [1 + O_3(s - s_1)].$$

De là

$$\frac{dl_1}{ds} = e^{-\tau(qe^{i\alpha_1})} \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{\omega_1}{\pi} \frac{1}{\tau} [1 + \Theta_1(\tau)] = e^{-\tau(qe^{i\alpha_1})} \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \left[\frac{1 + O_3(s - s_1)}{s - s_1} \right]$$

et

$$l_1 = e^{-\tau(qe^{i\alpha_1})} \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \log(s - s_1) - H(s - s_1)$$

ou

$$-l_1 = K_1 \log \frac{1}{s - s_1} + H(s - s_1) \quad \text{et} \quad \frac{d\Psi}{ds} = \frac{A_0 \alpha K_1^{-\alpha}}{(s - s_1) \left[\log \frac{1}{s - s_1} \right]^{2+1}} + \dots$$

Mêmes conclusions que (371).

382. Soit

$$\Psi(l_1) = e^{\alpha l_1} \left[A_0 + A_1 \frac{1}{l_1} + \dots \right], \quad \frac{d\Psi}{dl_1} = \alpha e^{\alpha l_1} A_0 [1 + \dots];$$

il vient

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{\alpha A_0 K_1}{(s - s_1)^{(1 - \alpha K_1)}}.$$

Mêmes conclusions que (372).

383. *Remarque.* — Reprenons la condition suffisante du bornage (3413) : $|\Psi(s) - \Psi(s_1)| < \gamma_n(s - s_1)$. On voit aisément que les cas envisagés en (381) et (382) comme en (371) et (372) donnent satisfaction à cette condition; car $\Psi(s)$ y prend la forme $\frac{\Lambda}{\left(\log \frac{1}{s - s_1}\right)^\alpha}$ ou $A(s - s_1)^{\alpha k_1}$. Et l'on sait que le module de Hölder est plus fort que le module γ_n ; vérifions-le d'ailleurs.

Jedis que $(s - s_1)^{\alpha k_1} < \frac{1}{\left(\log \frac{1}{s - s_1}\right)^\alpha}$ quel que soit n ; ce $(s - s_1)^{\frac{\alpha k_1}{n}} \log \left(\frac{1}{s - s_1}\right) < 1$ pour $|s - s_1|$ assez petit, ce qui justifie notre assertion.

384. *Conclusion* (théorème analogue à 377). — Soit un canal de direction asymptotique unique $(-Ox)$ en amont $[\Psi(s_1) = 0]$:

a. Si $\frac{d\Psi}{ds}$ reste fini ou est infini comme $B|s - s_1|^\gamma$ ($\gamma > -1$) ou s'annule, le contact est infini avec l'asymptote et l'on a

$$\text{partie principale } \Psi = \frac{B}{\gamma + 1} \frac{1}{e^{\frac{\gamma+1}{k_1} |l_1|}}.$$

C'est le cas d'une bonne fonction $\Psi(s)$ dont la dérivée reste finie.

b. Il est nécessaire (non suffisant) que $\frac{d\Psi}{ds}$ soit infini pour avoir un contact d'ordre fini.

c. Il est suffisant que $\frac{d\Psi}{ds}$ soit de la forme $\frac{B}{(s - s_1) \left(\log \frac{1}{|s - s_1|}\right)^{\alpha+1}} + \dots$ ($\alpha > 1$)

et la partie principale est $\Psi = \frac{B}{\alpha} \left| \frac{k_1}{l_1} \right|^\alpha$.

CHAPITRE IV.

CONDITIONS DE VALIDITÉ.

40. RAPPEL DES DEUX CONDITIONS DE VALIDITÉ DE M. M. BRILLOUIN.

400. Nous avons eu l'occasion d'invoquer (3613), (36165), (3794) la première condition de validité de Brillouin

$$(1) \quad V \leq 1 \quad \text{ou} \quad T \leq 0.$$

La deuxième condition de validité consiste dans la nécessité d'obtenir un domaine (A) d'un seul tenant (fig. 1) sans recoupement des lignes de jet et de l'obstacle, non plus que des lignes de jet entre elles ou avec les parois.

Cette deuxième condition est nettement impérative.

Nous avons vu (3613, dernier alinéa) que ce qui caractérise le détachement en proue, c'est la possibilité de prolonger l'obstacle dans le sillage par un rayon de courbure non nul et satisfaisant à cette condition.

401. Il est indispensable de remarquer le caractère restrictif, et que d'aucuns jugent exorbitant, de cette première condition. C'est ce qu'avait déjà observé M. H. Villat dans son Mémoire *Sur la validité des solutions de certains problèmes d'Hydrodynamique* ⁽¹⁾; mais « si l'on veut que la configuration soit générale, c'est-à-dire indépendante de la pression p_0 à l'infini, il est nécessaire et suffisant (pour ce qui concerne les pressions) que la vitesse V soit partout au plus égale à l'unité » ⁽²⁾.

L'inégalité à satisfaire est strictement (11.4)

$$V^2 < 1 + 2p_0.$$

En prenant le problème sous cet angle, il faudrait chercher la valeur maximum de V (laquelle a lieu sur le squelette du schéma) et déterminer alors si la solution est acceptable ou s'il se produit des cavitations. On pourrait également chercher quelle pression p_0 il faut exercer pour valider un schéma donné ou calculé; on trouve dans le Mémoire précité un exemple de cette méthode.

C'est pourquoi nous considérons la première condition de validité $T \leq 0$ comme étant une « condition de validité totale ».

402. *Convexité des lignes libres.* — Citons encore M. H. Villat ⁽³⁾ : « Comme M. Brillouin l'a montré (*Journal de Chimie et de Physique*, 1911, p. 145), il résulte de là ⁽⁴⁾ que les lignes de glissement λ_1 et λ_2 doivent être constamment convexes vers le fluide en mouvement... Il est intéressant de remarquer ici en passant, que, si l'on envisage les cas où la pression p_0 (nécessairement positive ou nulle) ne serait pas nulle, cette convexité des lignes de glissement n'est plus indispensable. » M. H. Villat donne d'ailleurs un cas simple qui met le fait en évidence.

403. Nous nous trouvons alors devant les problèmes suivants :

4031. Trouver deux domaines de fonctions $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ qui permettent de vérifier $V < 1$.

4032. Étant donné un squelette, dire si cette condition sera vérifiée par le schéma.

⁽¹⁾ *Journal de Math. pures et appliquées*, 6^e série, 10, 1914, p. 231.

⁽²⁾ H. VILLAT, *loc. cit.*, p. 234.

⁽³⁾ i. e. : la condition $V \leq 1$.

4041. Nous avons rencontré (3796) un cas intrinsèque pour lequel la première condition de validité ne peut être satisfaite : c'est le cas du canal convergent pour lequel, en général, les lignes libres sont concaves vers le fluide vif à l'infini aval et la vitesse > 1 sur la paroi et au voisinage de la ligne de jet vers l'infini aval.

4042. De même si l'obstacle est plus large que le canal à l'infini aval, il ne sera pas possible d'obtenir des lignes de jets toujours convexes vers le fluide vif, d'où $V \geq 1$.

4043. Si le canal (ou l'obstacle) forme un saillant vif vers le fluide vif, la vitesse y devient infinie : il y a là une *condition nécessaire* de validité : le squelette ne doit pas présenter d'angle vif vers le fluide en mouvement.

405. En vertu de $\frac{d\Theta}{dl} = \frac{dT}{dn}$, T est maximum sur le contour du schéma, lorsque l'élément est convexe vers le fluide vif.

Il suffira de vérifier l'inégalité $T \leq 0$ sur les parties convexes.

406. *Remarque.* — La largeur du canal est donnée par $V_\infty L = \psi_1 + \psi_2$; la condition $V_\infty < 1$ conduit à $L > \psi_1 + \psi_2$. Cette condition est nécessaire, sinon nous aurions $p_\infty < p_0$ et l'on ne voit pas comment le courant fluide pourrait s'établir des basses pressions vers les fortes pressions.

407. *Remarque fondamentale.*

4070. Nous devons nous demander si une ligne de jet en une paroi ne peut pas ne pas se recouper elle-même.

Considérons la bande cisailée (F) du plan f (fig. 2); l'égalité classique $\frac{d\varphi}{dl} = \frac{d\psi}{dn}$ appliquée le long de deux lignes de courant dans le plan f et dans le plan z montre que chaque ligne de courant longe sa voisine toujours du même côté ($\frac{dl}{d\varphi} = V$ est essentiellement positif).

4071. Si la paroi fait une boucle, la ligne de jet suivra dès lors la même boucle, à quelque distance; plus exactement la ligne $\lambda\omega_2\lambda_2$ par exemple, suivra μ_2 : notons qu'une telle solution mathématique n'est pas exclue a priori du problème général.

4072. Mais plaçons-nous dans des cas particuliers et rappelons d'abord que

$$\Delta x + i \Delta y = \Delta z = \int e^{i\Omega} df = \int e^{-\Gamma} (\cos \Theta + i \sin \Theta) (d\varphi + i d\psi),$$

d'où, pour $\Psi = \text{const.}$,

$$\Delta x = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{-\Gamma} \cos \Theta d\varphi \quad \text{et} \quad \Delta y = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{-\Gamma} \sin \Theta d\varphi.$$

Supposons un *obstacle tranchant et un canal monotone*.

Le long de μ_2 on aura $|\Theta| < \pi$ et $\text{signe}(\Theta) = \text{const.}$, de sorte que Δy est monotone et la difficulté ne peut se produire pour la paroi.

(4070) montre alors que la ligne de jet ou l'obstacle ne coupe pas « sa » paroi et ne peut faire de boucle.

41. THÉORÈMES FONDAMENTAUX (*Propriétés intrinsèques*).

410. Rappelons que si la condition $V \leq 1$ est satisfaite, les lignes de jet sont convexes vers le courant. A ce sujet, il est impossible (3794) de chercher à satisfaire à cette condition pour le canal convergent, à moins que $\frac{d\Psi}{ds}$ soit nul à l'infini aval (contact d'ordre infini des parois et de leurs asymptotes en aval).

411. THÉORÈME 1 (1). — *Si la vitesse sur l'obstacle et les parois, supposées quelconques, est inférieure à l'unité, les deux conditions de Brillouin sont satisfaites (2), le sillage est monotone et divergent et les lignes de jet concaves vers le sillage.*

4111. Puisque $T \leq 0$ sur $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ et égal à 0 sur λ_1 et λ_2 , il est négatif partout dans la demi-couronne (d) : la fonction harmonique T ayant son maximum sur le contour.

La première condition est satisfaite et les lignes de jet sont concaves vers le sillage.

Le long de OX , $\frac{\partial T}{\partial Y}$ est négatif et sur λ_2 , on a alors $\frac{\partial \Theta}{\partial X} = \frac{\partial T}{\partial Y} < 0$: Θ décroît donc lorsque X croît de q (infini aval) à 1 (obstacle) où nous savons qu'il y a raccordement.

Supposons Ox choisi de telle sorte que $\Theta_2 \leq 0 \leq \Theta_1$, ce qui est mon droit : Θ reste négatif sur λ_2 .

Sur λ_1 , Θ décroît du point -1 (obstacle) au point $(-q)$ infini aval et par suite : Θ reste positif sur λ_1 .

Les lignes libres λ_2 et λ_1 ne pourront donc se recouper à l'arrière de l'obstacle, puisqu'il faudrait que Θ devienne négatif sur λ_1 ou positif sur λ_2 , ou les deux.

Nous ne pouvons supposer qu'elles se recoupent en avant de l'obstacle, sinon il existerait un domaine fermé (A') de (A) compris entre l'obstacle et les lignes de jet pour la frontière duquel on aurait $\psi = 0$, de sorte que ψ serait nul partout dans (A') et par suite dans (A), et l'on ne pourrait avoir $\psi_1, \psi_2 \neq 0$, ce qui est absurde.

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 208, 1939, p. 721.

(2) Dans le cas de la proue, il faut vérifier que les lignes de jet ne recoupent pas l'obstacle.

4112. COROLLAIRE (1). — Pour satisfaire à $V \leq 1$, il est nécessaire que la tangente à l'obstacle aux points de détachement, orientée dans le sens de l'écoulement, fasse avec l'asymptote à la paroi voisine un angle positif au point P_1 et négatif au point P_2 . De plus, les asymptotes ne doivent pas recouper l'obstacle (fig. 1).

D'où les conditions analytiques

$$\Phi(0) < \Psi(0) \leq 0 \leq \Psi(\pi) < \Phi(\pi),$$

qui traduisent la première partie de cet énoncé.

412. THÉOREME 2 (2). — Généralisant le théorème 1 du paragraphe 16 de la Thèse de M. J. Kravtchenko (J. K., p. 108) :

Si l'obstacle est tranchant et le canal monotone et divergent (par rapport à la vitesse à l'infini amont), le sillage est monotone et divergent, les lignes de jet ne se recouperont pas.

4120. Nous avons déjà remarqué (306) que Θ reste compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Il s'agit de montrer que Θ est négatif sur λ_2 et positif sur λ_1 .

4121. Nous allons d'abord démontrer cette proposition dans le plan (Z) sous la restriction (R)

$$\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0.$$

La formule (212.1) nous donne, compte tenu de la condition d'uniformité (211.2) et en vertu de l'identité : $\frac{1}{A-a} = \frac{1}{A-z} - \frac{a-\alpha}{(A-a)(A-\alpha)}$ appliquée deux fois

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\pi^2}{\omega_1} \Omega(Z) &= \frac{i p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_0} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon \\ &+ i p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \int_0^\pi \frac{\Phi(\varepsilon) \left[p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right] d\varepsilon}{\left[p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right] \left[p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right]} \\ &- \frac{i p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - e_3} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{i p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right)}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_1} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon \\ &- i p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) \int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) \left[p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - p \frac{\omega_1}{\pi} s_1 \right] d\varepsilon}{\left[p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_1 \right] \left[p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right]} \end{aligned}$$

(1) C. R. Acad. Sc., 213, 1941, p. 680.

(2) C. R. Acad. Sc., 208, 1939, p. 721 et 213, 1941, p. 679.

4122. On a sur λ_2 : $q < Z < 1$, d'où $\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z$ compris entre ω_3 et 0 et imaginaire pure, $p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)$ est donc réel et négatif et $ip'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)$ est réel et positif.

D'autre part, $p\frac{\omega_1}{\pi} s_0$ et $p\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon$ sont réels et positifs, de sorte que la deuxième intégrale a son dénominateur et son coefficient positifs.

Comme par ailleurs (306. 1)

$$\Phi(\varepsilon) \lesssim 0 \quad \text{pour } \varepsilon \lesssim s_0$$

et que la fonction p de Weierstrass donne

$$p\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \gtrsim p\frac{\omega_1}{\pi} s_0 \quad \text{pour } \varepsilon \lesssim s_0,$$

le numérateur est négatif; le deuxième terme de (4121. 1) est donc *négatif* sur λ_2 .

4123. De même $\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3\right)$ sera compris entre $-\omega_3$ et 0, de sorte que $p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3\right)$ sera négatif et $-ip'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3\right)$ est positif.

D'autre part, $p\frac{\omega_1}{\pi} s_1$ et $p\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon$ sont positifs et la cinquième intégrale a dénominateur et coefficient positifs.

Comme par ailleurs (3062)

$$\Psi(\varepsilon) \lesssim 0 \quad \text{pour } \varepsilon \lesssim s_1$$

et que

$$p\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \gtrsim p\frac{\omega_1}{\pi} s_1 \quad \text{pour } \varepsilon \lesssim s_1,$$

le numérateur est négatif; le cinquième terme de (4121. 1) est donc *négatif* sur λ_2 .

4124. On a sur λ_1

$$q < -Z < 1, \quad \text{d'où} \quad i\omega\frac{\omega_3}{\omega_1} < \log(-Z) < 0 \quad \text{et} \quad i\pi\frac{\omega_3}{\omega_1} < \log Z + (2k-1)i\pi < 0,$$

la valeur de k est sans intérêt.

On en tire

$$\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + 2k\omega_1 = \omega_1 + \lambda\omega_3 \quad \text{avec } 0 < \lambda < 1,$$

de sorte que

$$e_2 < p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) < e_1 < p\frac{\omega_1}{\pi} s_1;$$

$ip'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)$ aura le signe négatif, d'où le deuxième terme de (4121. 1) est *positif* sur λ_1 .

4125. De même

$$\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 + 2k\omega_1 = \omega_1 + \mu\omega_3 \quad \text{avec } 0 < \mu < 1,$$

de sorte que

$$ip' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) > 0,$$

et le cinquième terme de (4121. 1) est positif sur λ_1 .

4126. De sorte que sous la condition restrictive (R), Θ sera positif sur λ_1 , et négatif sur λ_2 .
C. Q. F. D.

4130. Nous allons chercher à nous débarrasser de la restriction (R) (4121), et pour cela, compenser la somme des trois termes en $\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon$ de la formule (4121. 1) par son deuxième terme.

4131. Calculons d'abord le coefficient Δ de $\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon$. — Nous poserons

$$\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z = iv, \quad p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = p_0, \quad p \frac{\omega_1}{\pi} s_1 = p_1$$

pour simplifier les écritures, et nous aurons

$$\Delta = i \frac{p'iv}{piv - p_0} - i \frac{p'iv}{piv - e_3} - i \frac{p'(iv - \omega_3)}{p(iv - \omega_3) - p_1}.$$

Or (T. M., VII, 9) nous donne

$$p(iv - \omega_3) - e_3 = \frac{(e_3 - e_2)(e_3 - e_1)}{piv - e_3},$$

et en dérivant les logarithmes

$$\frac{i p'(iv - \omega_3)}{p(iv - \omega_3) - e_3} = - \frac{i p'iv}{piv - e_3},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{i p'iv}{piv - e_3} \left[\frac{p_0 - e_3}{piv - p_0} + \frac{p(iv - \omega_3) - e_3}{p(iv - \omega_3) - p_1} \right] \\ &= \frac{i p'iv}{piv - e_3} \left\{ \frac{[p(iv - \omega_3) - p_1][p_0 - e_3] + [piv - p_0][p(iv - \omega_3) - e_3]}{(piv - p_0)[p(iv - \omega_3) - p_1]} \right\}. \end{aligned}$$

Le numérateur s'écrit

$$[p(iv - \omega_3) - p_1][p_0 - e_3] + [piv - e_3][p(iv - \omega_3) - e_3] - [p_0 - e_3][p(iv - \omega_3) - e_3],$$

Les deux termes extrêmes donnent $-(p_0 - e_3)(p_1 - e_3)$.

Le terme médian vaut (T. M., VII, 9)

$$(e_1 - e_3)(e_2 - e_3),$$

$$\Delta = i \frac{p'iv}{piv - p_0} \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3) - (p_0 - e_3)(p_1 - e_3)}{(piv - e_3)[p(iv - \omega_3) - p_1]}$$

4132. La condition suffisante que nous voulons satisfaire est donc

$$i \frac{p'iv}{piv - p_0} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - p \frac{\omega_1}{\pi} s_0}{piv - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} d\varepsilon \leq -\Delta \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{sur } \begin{cases} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{cases}$$

Mais comme $i \frac{p'iv}{piv - p_0}$ est négatif sur λ_2 et positif sur λ_1 (4122) (4124), nous sommes ramenés à une seule inégalité

$$(1) \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - p \frac{\omega_1}{\pi} s_0}{piv - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} d\varepsilon > \frac{(p_0 - e_3)(p_1 - e_3) - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{(piv - e_3)[p(iv - \omega_3) - p_1]} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

4133. p_0 et p_1 étant $> e_1$ et e_2 , le numérateur du second membre est positif; v étant réel, piv est $< e_3$ et $p(iv - \omega_3) < e_3 < p_1$, le dénominateur est positif. En ce qui concerne le premier membre, piv est $< p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon$, donc le dénominateur est négatif, mais le produit $\Phi(\varepsilon) \left(p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)$ est toujours négatif, car $\Phi(\varepsilon) \leq$ selon que $\varepsilon \leq s_0$ et $p \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) \geq p \frac{\omega_1}{\pi} s_0$, selon que $\varepsilon \leq s_0$ dans le premier membre est négatif.

4134. L'inégalité (4132. 1) est alors satisfaite si $\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon$ est négatif.

4135. Si $\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon$ est positif, nous considérerons le squelette symétrique du squelette donné, lequel sera encore caractérisé par l'obstacle tranchant et le canal divergent.

Nous devons prendre $s_0^* = \pi - s_0$,

$$\Phi^*(\varepsilon^*) = -\Phi(\pi - \varepsilon^*)$$

et nous aurons alors

$$\int_0^\pi \Phi^*(\varepsilon^*) d\varepsilon^* = -\int_0^\pi \Phi(\pi - \varepsilon^*) d\varepsilon^*.$$

Posant alors $\varepsilon = \pi - \varepsilon^*$, il viendra

$$\int_0^\pi \Phi^*(\varepsilon^*) d\varepsilon^* = -\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon < 0.$$

Le théorème sera donc vrai pour le squelette symétrique du squelette donné.

4136. Le théorème est donc démontré sans aucune restriction sur le signe de $\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon$.

Remarque. — Dans ma note des *Comptes rendus* de 1941 (*loc. cit.*), j'avais introduit la condition (R), la démonstration faite à l'origine étant étayée sur la formule incorrecte signalée au numéro (212). J'avais établi des cas où la restriction pouvait être levée. J'ai pu, depuis, améliorer le résultat obtenu, en levant complètement cette restriction; c'est la démonstration retenue ci-dessus.

414. *Méthode du plan t.*

4141. THÉORÈME 1. — Sans différence essentielle.

4142. THÉORÈME 2. — La restriction (R) introduite en (412) devient

$$\int_{-1}^{a-1} \frac{\Phi(t')}{\sqrt{R(t')}} dt' = - \int_b^{+\infty} \frac{\Psi(t')}{\sqrt{R(t')}} dt' = 0.$$

La première partie de la démonstration est ici plus simple que par le plan Z. Nous avons (243. 1) sur les lignes libres

$$\Omega(t) = \Theta(t) = \frac{\sqrt{R(t)}}{i\pi} \left[\int_{-1}^{a-1} \frac{\Phi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{dt'}{t'-t} + \int_b^{+\infty} \frac{\Psi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{dt'}{t'-t} \right].$$

Les radicaux étant pris avec le signe + sur $-\infty$, a et b , $+\infty$, avec le signe — sur -1 , 1 (2412).

Sur les lignes libres $|\sqrt{R(t)}|$ doit être multiplié par $e^{\mp t \frac{\pi}{2}} = \mp i$, d'où l'on a

$$\frac{\sqrt{R(t)}}{i\pi} = \mp \sqrt{|R(t)|} \text{ sur } \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} \quad (\text{résultats obtenus par continuité}).$$

La condition restrictive rend la première intégrale tributaire du lemme de Leray (1), $\frac{1}{t'-t}$ étant décroissante, la première intégrale est positive.

Pour $-\infty \leq t' \leq a$, $b \leq t' \leq +\infty$,

$$t'-t \lesssim 0, \quad \Psi(t') \lesssim 0, \quad \sqrt{R(t')} > 0$$

et on a le signe +. La deuxième intégrale est donc positive.

Θ est donc négatif sur λ_2 , positif sur λ_1 .

C. Q. F. D.

4143. La restriction (R) n'est pas, par contre, aussi simple à lever et nous nous contenterons de la première démonstration (413).

(1) *J. K.*, p. 107.

415. Variation de Θ dans la demi-couronne.

4151. *Cas symétrique.* — $\Theta = 0$ pour $Z = \rho e^{i\frac{\pi}{2}}$ (OY). Θ est donc négatif au-dessous de O*x* et positif au-dessus de O*y* (plan *z*) : les lignes de courant sont divergentes.

Le long de O*y* (OY) $\frac{\partial\Theta}{\partial X}$ est négatif, donc $\frac{\partial T}{\partial y}$ aussi et T, donc V décroît de V, à l'infini amont à O au point d'arrêt.

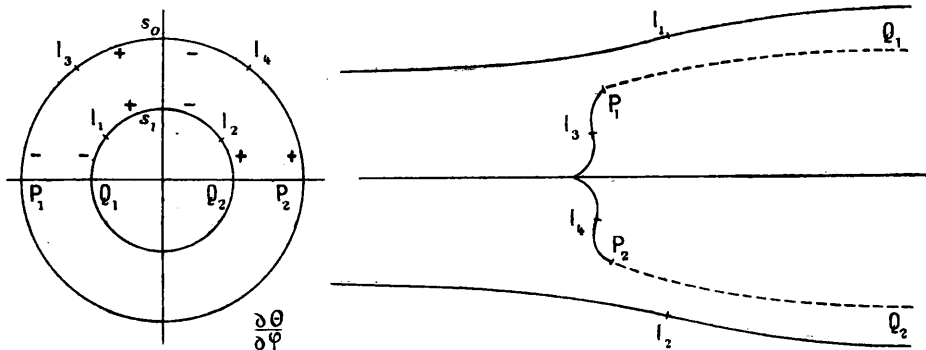
4152. *Cas dissymétrique.* — En vertu du théorème 2 (412), il part de s_0 une courbe $\Theta = 0$ qui aboutit en s_1 sans atteindre l'axe des X, à laquelle correspond une ligne allant de l'infini amont au point de bifurcation, sur laquelle les lignes de courant changent de pente et passent d'une à l'autre des régions délimitées. Les lignes de courant finissent toutes par être divergentes (par rapport à O*x*).

42. INFLEXIONS DES LIGNES LIBRES.

421. Canal divergent à parois une fois infléchies.

4210. Considérons un obstacle en *accolade généralisée* (j'entends ici une accolade qui, à l'inverse de celle de M. Leray ⁽¹⁾, ne suppose aucune condition spéciale de courbure) formée (fig. 12) de deux coquilles concaves vers l'amont, puis de deux coquilles convexes.

Fig. 12.



4211. Nous indiquons sur la demi-couronne (*d*) le signe de $\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}$.

Nous ne pouvons pas savoir *a priori* dans le cas général si du point s_0 part une courbe aboutissant directement en s_1 et sur laquelle $\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} = 0$; mais, dans le cas symétrique, au contraire, $s_0 = s_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} = 0$ sur OY; aux points

⁽¹⁾ *Comm. Math. Helvetici*, 8, 1936, p. 201.

infinis aval $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = 0$, car Θ varie infiniment peu pour une valeur finie de l , donc de φ .

En P_2 , on ne peut rien dire *a priori*.

4212. La ligne des inflexions issue de I_1 pourra aboutir directement en I_2 en rejoignant ou non OY : aucune inflexion sur λ_2 .

4213. Elle pourra partir de I_2 et aboutir à Q_2 [généralement $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$ est positif, près de Q_2 sur λ_2 , comme cela ressort de (3794)], ou plus souvent recoupera $P_2 Q_2$ normalement ou atteindra P_2 . En même temps une autre ligne d'inflexions pourra partir de I_1 et aboutir en P_2 , ou plus souvent recouper $P_2 Q_2$ normalement.

4214. On en conclut (1) que : *Le nombre des inflexions des lignes libres est de deux au maximum pour un obstacle en accolade généralisée (ou formé de deux coquilles convexes ou concaves) et un canal divergent à parois une seule fois infléchies ayant un axe de symétrie commun.*

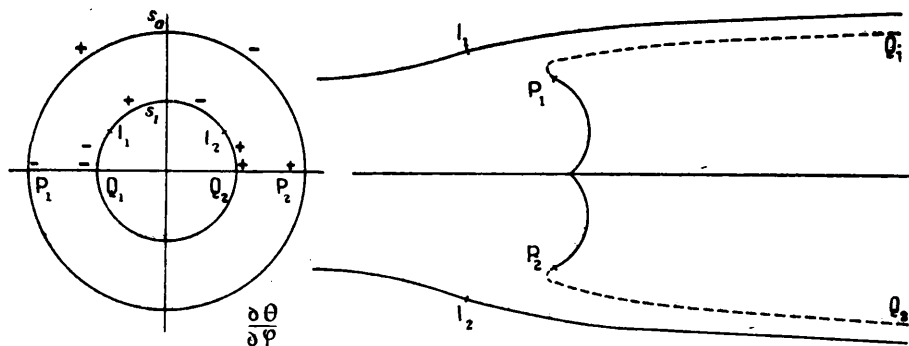
422. *Première extension du Théorème de Boggio.*

4220. Canal divergent à parois une seule fois infléchies et obstacle formé de deux coquilles concaves vers le fluide vif et tel que la pente en bout de l'obstacle Φ soit plus forte en valeur absolue que la pente des parois. On aura

$$\Phi_{P_2} \leq \Theta \leq \Phi_{P_1}.$$

4221. En P_1 , par exemple, Θ est maximum, donc décroît vers l'aval; $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$ est donc négatif sur OX en P_1 , de même il est positif sur OX en P_2 . Pour la même

Fig. 13.



raison que tout à l'heure (4211), nous nous plaçons dans le *cas symétrique* (fig. 13).

(1) *C. R. Acad. Sci.*, 213, 1941, p. 680.

Sur OY, on a $\Theta = 0$ ainsi que ψ , de sorte que $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = 0$. Sur OX, en Q_2 , $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$ est > 0 puisque Θ y est négatif et s'annule.

4222. La ligne d'inflexion issue de I_1 pourra aboutir en un point de $s_1 s_0$ et celle issue de P_2 également : pas d'inflexion de λ_2 .

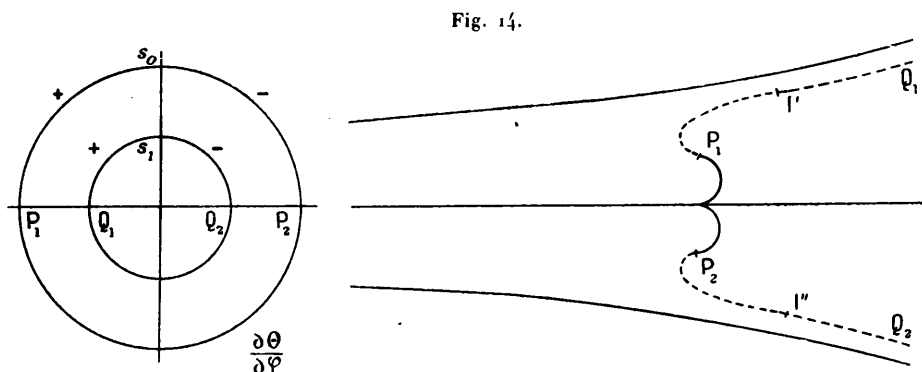
4223. La ligne d'inflexion issue de P_2 ne peut aboutir en un point de $P_2 Q_2$, sinon en se fermant par symétrie suivant OX, la fonction $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$ serait identiquement nulle.

4224. Cette ligne d'inflexion peut enfin aboutir en P_2 : pas d'inflexion de λ_2 .

4225. On en conclut ⁽¹⁾ que : *Le nombre des inflexions des lignes libres est nul pour un obstacle formé de deux coquilles concaves vers le fluide vif et un canal divergent à parois une seule fois infléchies ayant un axe de symétrie commun, la pente des parois étant plus faible que la pente en bout d'obstacle.*

423. *Canal divergent sans inflexion.*

4230. Considérons un obstacle formé de deux coquilles concaves vers le fluide vif et tel que la pente des parois soit plus faible que la pente en bout de l'obstacle et supposons encore un axe de symétrie commun (fig. 14).



4231. En Q_2 , on ne peut rien dire *a priori* par le raisonnement précédent. On a seulement la certitude du signe + en P_2 .

De P_2 , on ne peut aboutir à Q_2 , ni entre P_2 et Q_2 , donc on aboutit sur $s_0 s_1$ et il est nécessaire d'en repartir pour aboutir soit en Q_2 , soit entre Q_2 et P_2 .

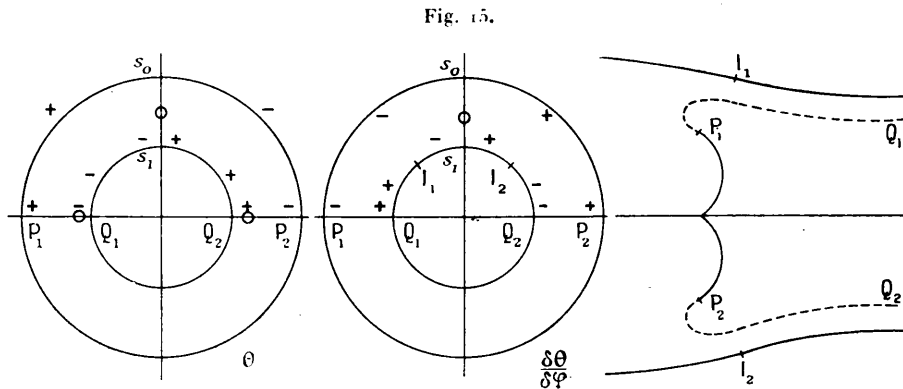
4232. Ceci nous donne la certitude d'une *inflexion au plus*.

⁽¹⁾ *C. R. Acad. Sci.*, 213, 1941, p. 680.

4233. L'allure du sillage sera donc en général la même que celle du canal à l'infini aval.

424. Canal convergent avec 1 ou 0 inflexion.

4240. Toujours dans le cas symétrique et deux coquilles concaves vers l'amont, la pente du canal étant plus faible que la pente de l'obstacle en bout (fig. 15).



4241. Nous avons déjà vu (3794) que le sillage a en général même allure que le canal à l'infini aval, de sorte que θ s'annule en général entre P_2 et Q_2 .

4242. $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0$ sur $s_0 s_1$; ≥ 0 sur $s_1 I_2$ (qui peut se réduire à s_1); ≤ 0 sur $I_2 Q_2$.

θ a son minimum absolu en P_2 ; $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}$ est > 0 sur OX en P_2 (exactement au voisinage). La ligne des inflexions qui part de I_2 pourra ou non aller toucher $s_0 s_1$, pour en repartir et venir rencontrer $P_2 Q_2$ normalement entre P_2 et Q_2 en général, on atteindra éventuellement Q_2 .

4243. Il y aura donc (1) au maximum, une inflexion sur la ligne libre et danger de recouplement des lignes libres entre elles.

425. Remarque. Les résultats ci-dessus sont des résultats intrinsèques.

426. Digression.

4260. Étant donné l'intérêt du théorème du n° 3794, nous allons démontrer à nouveau que :

Pour un canal monotone à direction asymptotique unique à l'aval, GÉNÉRALEMENT le signe de θ est le même sur la ligne libre que sur la paroi : même allure.

(1) C. R. Acad. Sci., 213, 1941, p. 680.

4261. Reprenons la formule (212. 1)

$$\Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \left[p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \int_0^\pi \frac{\Phi(\varepsilon) d\varepsilon}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} - \frac{p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - e_3} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ \left. - p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) \int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) d\varepsilon}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} \right].$$

Posons

$$\frac{\omega_1}{i\pi \log Z} = i\nu.$$

La formule

$$[p(u + \omega_3) - e_3][pu - e_3] = (e_1 - e_3)(e_2 - e_3),$$

dérivée logarithmiquement, conduit à

$$\Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} p'(i\nu) \left\{ \int_0^\pi \frac{\Phi(\varepsilon) d\varepsilon}{p i\nu - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} + \frac{1}{p i\nu - e_3} \int_0^\pi \left[\frac{p(i\nu + \omega_3) - e_3}{p(i\nu + \omega_3) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} - 1 \right] \Psi(\varepsilon) d\varepsilon \right\}.$$

La deuxième partie du crochet s'écrit

$$I_2 = \frac{1}{p i\nu - e_3} \int_0^\pi \frac{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - e_3}{p(i\nu + \omega_3) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} \Psi(\varepsilon) d\varepsilon \\ = \frac{1}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} \int_0^\pi \left(p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - e_3 \right) \frac{p(i\nu + \omega_3) - e_3}{p(i\nu + \omega_3) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} \Psi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Soit pour $\varepsilon \rightarrow 0$, $\frac{\Psi(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow \lambda$ ou est de la forme $\frac{\mu}{\varepsilon^\nu}$ ($\nu < 1$) (cf. n° 377); on sait que le contact est exponentiel entre la paroi et son asymptote. Cette condition entraîne que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ on aura

$$|\Psi(\varepsilon)| > k\varepsilon \quad (k \neq 0 \text{ positif})$$

et

$$p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \Psi(\varepsilon) \geq k \frac{\pi^2}{\omega_1^2} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{k_1}{\varepsilon}.$$

Soit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Choisissons ν réel assez voisin de $|\omega_3|$, donc X assez voisin de q , de façon que $|p(i\nu + \omega_3)| > p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon_1$, donc que $p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon$ pour $\varepsilon_1 \leq s \leq s_1$, et divisons l'intervalle d'intégration en 2 : $(0, s_1)$ et (s_1, π) .

I_2 reste finie dans (s_1, π) . Pour $(0, s_1)$ le terme conserve un signe constant, celui de Ψ et $\left| \int_0^{s_1} \right|$ est donc $> \left| \int_{\varepsilon_1}^{s_1} \right|$. Mais nous avons

$$\frac{p(i\nu + \omega_3) - e_3}{p(i\nu + \omega_3) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} = \frac{1 - \frac{e_3}{p(i\nu + \omega_3)}}{1 + \frac{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{p(i\nu + \omega_3)}}$$

Choisissons ν , de sorte que $\left| \frac{e_3}{p(i\nu + \omega_3)} \right| < \frac{1}{2}$; il viendra

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon_1}^{s_1} \right| &> \frac{1}{2} \left| \int_{\varepsilon_1}^{s_1} \frac{\left(p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - e_3 \right) \Psi(\varepsilon) d\varepsilon}{1 + \frac{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{p(i\nu + \omega_3)}} \right| > \frac{1}{2} \left| \int_{\varepsilon_1}^{s_1} \frac{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \Psi(\varepsilon) d\varepsilon}{1 + \frac{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{p(i\nu + \omega_3)}} \right| \\ &> \frac{1}{4} \left| \int_{\varepsilon_1}^{s_1} p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \Psi(\varepsilon) d\varepsilon \right|. \end{aligned}$$

De ε_1 à ε_2 on a

$$|\Psi(\varepsilon)| > k\varepsilon.$$

donc

$$\left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \Psi(\varepsilon) p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon d\varepsilon \right| > \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{k}{\varepsilon} d\varepsilon = k \log \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

que l'on peut rendre aussi grand que l'on veut.

Ainsi I_2 , donc le crochet tout entier aura le signe de Ψ aux environs de $\varepsilon = 0$. Quant à $ip'iv \rightarrow ip'\omega_3$ et s'annule en restant > 0 , comme le montrent les tableaux ci-dessous :

ν	$0 \nearrow \frac{\omega_3}{i}$	X	q	i
$pi\nu$	$-\infty \nearrow e_3$	$\log X$	$i\pi \frac{\omega_3}{\omega}$	0
$ip'iv$	$+$	$\frac{\omega_1}{i\pi} \log X = i\nu$	$\omega_3 \quad \lambda\omega_3 \left(\lambda' \searrow \theta \right)$	0
		$pi\nu$	e_3	$-\infty$
		ν	$\frac{\omega_3}{i}$	0

Dès lors $\Omega(X) = \Theta(X)$ aura le signe de $\Psi(+0)$ pour $X \neq q$.

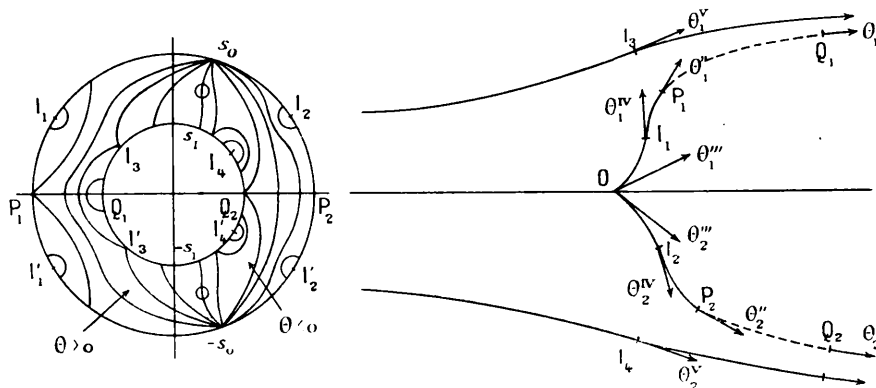
C. Q. F. D.

4262. Nous voyons donc qu'il faudra un contact plus intime que le contact exponentiel envisagé, si nous voulons obtenir, dans le cas du canal convergent, un sillage concave, donc sans inflexion. Nous retrouvons le résultat énoncé en fin du n° 3794.

427. Cas dissymétrique. Nouvelle généralisation du Théorème de Boggio.

4270. Obstacle tranchant en accolade généralisée, divergent à une inflexion par paroi (fig. 16). Nous supposons naturellement (4112) que la

Fig. 16.



tangente à l'obstacle Θ_1'' est plus relevée que l'asymptote à la paroi correspondante Θ_1 , et de même pour l'autre paroi, c'est-à-dire

$$-\pi < \Phi(0) < \Psi(0) \leq 0 \leq \Psi(\pi) < \Phi(\pi) < \pi.$$

4271. Nous savons, d'après le théorème 2 (4120) et le deuxième alinéa du n° 415, qu'il existe une courbe s_0s_1 , sur laquelle $\Theta = 0$ et complètement intérieure à la demi-couronne (d). En s_0 quand on tourne à partir de $\widehat{s_0s_1}$ jusqu'à $\widehat{s_0P_2}$ dans le sens sinistrorsum, Θ décroît de $\Theta = 0$ à Θ_2'' . Sur s_0P_2 , Θ décroît de Θ_2'' à Θ_2^v quand on passe de s_0 à I_2 puis croît de Θ_2^v à Θ_2^u de I_2 à P_2 .

En s_1 , $\Theta = 0$ et décroît de zéro à Θ_2^v jusqu'en I_4 , puis croît de Θ_2^v à Θ_2 en Q_2 . Complétons le domaine $s_0s_1Q_2P_2$ par le domaine symétrique par rapport à OX .

4272. Supposons maintenant $|\Psi'| < |\Phi|$ sur μ_2, ω_2 .

En I_2, I_2' Θ est minimum et il n'y a pas de courbe $\Theta = \Theta_2''$.

En s_0 il existe une direction pour laquelle $\Theta = \Theta_2^v - \epsilon$ (ϵ petit); la courbe issue ne peut atteindre $\widehat{s_0P_2 - s_0}$ sur lequel $\Theta < \Theta_2''$ ou $\Theta_2'' < \Theta_2^v - \epsilon$; elle ne peut non plus atteindre $\widehat{s_1Q_2 - s_1}$ sur lequel $\Theta \geq \Theta_2^v > \Theta_2^v - \epsilon$, donc la courbe va directement de s_0 à $-s_0$ en coupant Q_2P_2 normalement.

De s_0 part une courbe $\Theta = \Theta_2^v$ qui peut :

- 1° atteindre directement $-s_0$, et alors I_4 est isolé et il n'y a pas d'inflexion sur λ_2 ;
- 2° atteindre I_4 , rebondir en I_4' pour rejoindre $-s_0$ et il n'y a pas davantage d'inflexions sur λ_2 , Θ étant encore monotone.

4273. Si $I_1 \rightarrow Q_2$, rien n'est changé au raisonnement qui s'applique donc au canal divergent sans inflexions dans les conditions envisagées.

4274. On en conclut :

Dans le cas dissymétrique de l'accolade généralisée et du divergent avec une ou zéro inflexion par paroi, si chaque paroi est moins inclinée que la partie d'obstacle correspondant, il n'y a pas d'inflexion et le sillage est convexe vers le fluide vif.

4275. Si l'obstacle a une pente plus forte que chaque paroi, nous ne sommes pas gênés par la non-connaissance du point de bifurcation, et nous avons un cas intrinsèque pour lequel le sillage est satisfaisant vis-à-vis des deux conditions de Brillouin.

De même pour le cas symétrique, l'énoncé (4274) est une proposition intrinsèque.

4276. Ceci ne veut pas dire qu'il ne pourra pas exister des points (du squelette) où l'on ait $V > 1$: il suffit d'un saillant à angle vif par exemple.

4277. Si $|\Psi'|$ peut être $> |\Phi|$, on ne peut rien dire.

43. RECHERCHES DE PAROIS ET D'OBSTACLES SATISFAISANT A $V \leq 1$. PLAN Z.

430. *Généralités.* — Nous ne donnerons ici qu'un résumé de ces recherches⁽¹⁾.

Il s'agit de rechercher des fonctions $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ telles que la vitesse V soit maximum sur les lignes de jet et qui donneront des schémas tributaires du théorème 1 (4110). On se sert des formules (2711.2) et (2712.2) qui donnent $T_1(s)$ et $T_q(s)$, que l'on modifie grâce à (*T. M.*, CVI, 2₁) et (*T. M.*, CVI, 2₂). On obtient :

$$(1) \quad \begin{cases} \pi T_1(s) = I_1(s) + I_2(s) - I_4(s) & (\text{condition } < 0), \\ \pi T_q(s) = -I_1(s) - I_3(s) + I_5(s) & (\text{cond. } < 0) \text{ avec :} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} I_1(s) = \sin s \int_0^\pi \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\cos \varepsilon - \cos s} d\varepsilon; & I_4(s) = \sin s \int_0^\pi \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)}{\cos \varepsilon - \cos s} d\varepsilon; \\ I_2(s) = 4 \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) I(s, \varepsilon) d\varepsilon; & I_5(s) = 4 \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) I(s, \varepsilon) d\varepsilon; \\ I_3(s) = 4 \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) J(s, \varepsilon) d\varepsilon; & I_6(s) = 4 \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) J(s, \varepsilon) d\varepsilon. \end{cases}$$

$$(3) \quad I(s, \varepsilon) = \sum_1^\infty \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin rs \cos r\varepsilon; \quad J(s, \varepsilon) = \sum_1^\infty \frac{q^r}{1 - q^{2r}} \sin rs \cos r\varepsilon.$$

⁽¹⁾ *C. R. Acad. Sc.*, 213, 1941, p. 681.

M. J. Kravtchenko a montré ⁽¹⁾ que $I(s, \varepsilon)$ est décroissante par rapport à s pour $q < \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,517$. J'ai démontré que $J(s, \varepsilon)$ est décroissante sans limitation de q (je ne reproduirais pas ici la démonstration).

En passant rappelons le *lemme de Leray* sous la forme suivante :

Soit $\chi(\varepsilon)$ telle que $\chi(\varepsilon)(\varepsilon - s_0)$ ait un signe α ,

Soit $\varphi(s, \varepsilon)$ telle que $[\varphi(s, \varepsilon) - \varphi(s, s_0)](\varepsilon - s_0)$ ait un signe α' , l'intégrale $\int_a^b \chi(\varepsilon)[\varphi(s, \varepsilon) - \varphi(s, s_0)] d\varepsilon$ a le signe $\alpha\alpha'$ ($a < \frac{s}{s_0} < b$).

431. Premières recherches.

4311. Terme $I_1(s)$. — Les fonctions dites de M. Villat définies dans son Mémoire ⁽²⁾ de 1914, page 235, rendent ce terme négatif. En ajoutant une constante additive, on ne changera pas $I_1(s)$ et l'on aura $\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon \neq 0$. Noter que la même fonction Φ ne donne pas le même obstacle en fluide limité ou en fluide illimité, à cause de la présence de Ψ .

4312. Terme $I_4(s)$. — Ce terme n'a généralement pas le signe convenable.

4313. L'application du lemme de Leray aux intégrales I_2, I_3, I_5 et I_6 montre que si $\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0$ et :

A_a. si le canal est convergent et $q \leq q_1$, $I_2(s)$ est > 0 , signe satisfaisant; q quelconque $I_4(s)$ est > 0 , signe satisfaisant.

A_b. si le canal est divergent (quel que soit q), $I_5(s)$ et $I_6(s)$ sont < 0 ; non satisfaisant.

A_c. si le canal est quelconque, il y a doute.

B. si l'obstacle est tranchant et $q \leq q_1$, $I_2(s)$ est < 0 ; signe satisfaisant. q quelconque $I_3(s)$ est < 0 ; signe satisfaisant.

4314. Si $\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon \neq 0$; on ne peut rien dire.

4315. Application.

43151. On retrouve les théorèmes I et III (*J. K.*, p. 115 et 116) de M. J. Kravtchenko en faisant $\Psi(\varepsilon) = 0$.

⁽¹⁾ *J. K.*, 108 et 119. La fonction $I(s, \varepsilon) \equiv \frac{\pi}{4} \varphi(s, \varepsilon)$.

⁽²⁾ H. VILLAT, *Journ. de Math.*, 6^e série, 10, 1914, p. 231 avec $I_1(s) \equiv \tau(s)$.

43152. THÉORÈME. — *Dans le cas du canal convergent monotone et de l'obstacle tranchant satisfaisant aux conditions*

$$(R) \quad \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad q \leq 0,517, \quad I_4(s) < 0,$$

fonctions de M. Villat par exemple, *les vitesses sont toujours acceptables sur l'obstacle.*

Cela découle de (4311) et (4313) et généralise le théorème III (*J. K.*, p. 119) et son corollaire (*J. K.*, p. 122) aux canaux convergents.

43153. La condition $q \leq q_1 = 0,517$ signifie que les parois du canal se trouvent éloignées de l'obstacle. Des précisions quantitatives en Annexe 4 sont données, qui supposent que la divergence du sillage ait été démontrée (1).

432. Compte tenu d'un récent mémoire de M. J. Kravtchenko (2), la condition $q < 0,517$ peut être supprimée pour certains cas tributaires du théorème (43152).

4321. Vu la formule (430.1) : $\pi T_1(s) = I_1(s) - I_2(s) - I_3(s)$, on peut dire :

THÉORÈME. — *Si la condition $T < 0$ est satisfaite sur l'obstacle pour une fonction $\Phi(s)$ et un canal rectiligne, elle sera satisfaite sur l'obstacle, a fortiori, par la même fonction $\Phi(s)$ et la fonction $\Psi(s)$ d'un canal monotone convergent (3063).*

La condition $\int_0^\pi \Phi(s) ds = 0$ est satisfaite a priori. Il faut donc que $\int_0^\pi \Psi(s) ds = 0$ pour satisfaire à la condition de régularité.

La démonstration est immédiate puisque $I_3(s)$ est > 0 (4313, A_a).

4322. Or M. J. Kravtchenko, dans le Mémoire précité, nous apprend que :

Les sillages construits en fluide illimité ou limité par une ou deux parois planes à partir d'une fonction « $\Psi(s)$ » (3) assujettie à satisfaire aux inégalités (1) et (2) (ci-dessous) vérifient la deuxième condition de validité de M. A. Brillouin (loc. cit., p. 2).

$$(1) \quad 0 \leq \Psi(s) \leq \pi \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \pi,$$

$$(2) \quad \underline{[\Psi(s) - \Psi(s')][s - s'] \geq 0} \quad \text{pour } 0 \leq s < \pi, 0 \leq s' \leq \pi.$$

(1) *C. R. Acad. Sci.*, 208, 1939, p. 721.

(2) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 63, 1936, 1939, p. 1 à 10 (publié en 1941).

(3) Ce que nous notons $\overline{\Phi(s)}$ (cf. 3615).

En particulier la condition $T < 0$ est satisfaite sur l'obstacle. Rappelons que « $\Psi(s)$ » alias $\bar{\Phi}(s)$ est définie par

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(s) &= \Phi(s) + \pi && \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \\ \bar{\Phi}(s) &= \Phi(s) && \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi.\end{aligned}$$

4323. La présence de parois non rectilignes ne changera pas les conclusions de la page 6, paragraphe 5 : de tels obstacles sont des « obstacles non convexes vers le courant ».

Compte tenu du théorème (4321), la proposition de M. J. Kravtchenko rappelée ci-dessus (4322) conduit donc au théorème suivant, qui est encore une *extension du théorème de Boggio*.

Dans le cas d'un canal convergent monotone et d'un obstacle tranchant non convexe vers le courant et sous la seule condition $R : \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon$, les vitesses sont toujours acceptables sur l'obstacle.

4324. Rappelons que la condition R est satisfaite d'office pour le cas symétrique et doit être satisfaite nécessairement, si l'on prend une fonction $\Phi(s)$ provenant d'un schéma limité par deux parois planes ou illimité.

433. *Recherches par majorations d'intégrales.*

4331. Nous nous placerons dans le cas de la restriction R

$$\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0 \quad (4324)$$

et de

$$q < q_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,517.$$

4332. Nous supposons l'*obstacle tranchant* et satisfaisant à $I_1(s) < 0$ (4311). La condition $q \leq q_1$ entraîne $I_2(s) < 0$, d'autre part $I_3(s)$ est < 0 , quel que soit q . Nous allons donner un exemple d'application de la méthode de majorations d'intégrales dans le cas du *canal convergent*.

Nous résumerons fortement l'exposé et les démonstrations ne seront qu'esquissées dans le présent Mémoire.

I_5 et I_6 étant positifs, il suffira de satisfaire à l'une des inégalités

$$(1) \quad I_3(s) > -I_4(s), \quad \text{condition à imposer à } \Psi(s),$$

ou

$$(2) \quad -I_3(s) > -I_4(s), \quad \text{liaison à imposer entre } \Phi(s) \text{ et } \Psi(s).$$

Il est évident que quelle que soit la fonction d'obstacle tranchant, il suffit pour satisfaire à $V < 1$ de prendre une fonction de paroi Ψ correspondant à un

canal très peu convergent ou très peu divergent, mais assez régulière, car la courbure intervient.

4333. Majoration de $-I_1(s) = \int_0^\pi \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{\cos \varepsilon - \cos s} d\varepsilon \times \sin s$.

43330. Dans une première méthode, nous avons calculé une minoration de $D(\varepsilon) = \frac{\cos \varepsilon - \cos s}{s - \varepsilon}$ (fig. 17), et une majoration de $N(\varepsilon) = \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{s - \varepsilon}$ (fig. 18).

Fig. 17.

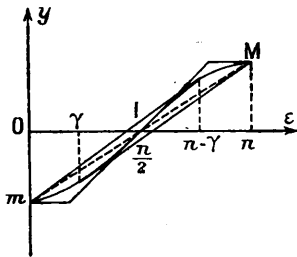
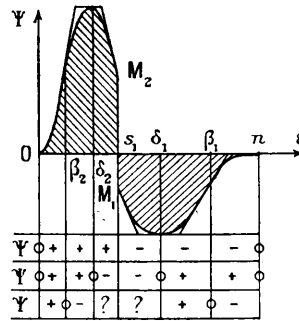


Fig. 18.



Nous ne donnerons pas cette méthode ici. Dans une deuxième méthode, nous considérons le rapport $\frac{N(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} = \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{\cos \varepsilon - \cos s}$ lui-même.

43331. Nous avons $\Psi(s) \geq 0$ pour $s < s_1$ avec

$$\Psi(s) \geq 0 \text{ pour } s \leq s_1 \text{ avec } \Psi(0) = \Psi(\pi) = 0.$$

Nous nous contenterons de « bonnes fonctions » ayant toutes les dérivées nécessaires, et de plus nous supposons que $\frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{\cos \varepsilon - \cos s}$ reste bornée et conserve un sens pour $s = \varepsilon$ quels que soient s et ε ($s = s_1$ excepté).

Ceci nécessite que pour $s = 0$ et $s = \pi$, $\frac{\Psi(\varepsilon)}{\pm 1 - \cos \varepsilon}$ conserve un sens, de sorte que $\Psi'(0)$ devra être du deuxième ordre en ε et positif, et $\Psi'(\pi)$ du deuxième ordre en $\pi - \varepsilon$ et négatif, d'où

(2) $\Psi'(0) = \Psi'(\pi) = 0$

et

(3) $\Psi''(0) > 0, \quad \Psi''(\pi) < 0.$

Nous considérerons une fonction $\Psi(\varepsilon)$ ayant l'allure de la figure 18, donc soumise à certaines conditions de contact. Noter que l'allure entre δ_2 et δ_1 est uniquement fixée par la condition d'être décroissante ou monotone décroissante et que les points M_2 et M_1 peuvent se trouver en s_1 sur l'axe des ε . Les aires de chaque tronçon (aires hachurées) devront être égales.

43332. Considérons donc le rapport $\frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{\cos \varepsilon - \cos s}$.

Si $0 < s < s_1$ et $\varepsilon > s_1$, ce rapport est négatif et il y a lieu d'envisager seulement

$$\int_0^{s_1} \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{\cos \varepsilon - \cos s} d\varepsilon = \int_0^{s_1} \frac{\Psi'(\sigma)}{\sin \sigma} d\varepsilon,$$

où σ est une fonction de s et ε comprise entre s et ε .

Si $s_1 < s < \pi$ et $\varepsilon < s_1$, ce rapport est négatif; il suffit d'envisager $\int_{s_1}^{\pi} \frac{\Psi'(\sigma)}{\sin \sigma} d\varepsilon$.

Le maximum de $\frac{\Psi'(\sigma)}{\sin \sigma}$ est de 0 à $s_1 < \frac{\Psi'(\beta_2)}{\sin s_1}$ et de s_1 à $\pi < \frac{\Psi'(\beta_1)}{\sin s_1}$ la majorante de $-I_3(s)$ sera alors

$$\frac{\pi \sin s}{\sin s_1} M \quad [M, \text{maximum de } \Psi'(\varepsilon)].$$

On voit que c'est $\Psi'(\varepsilon)$ qui intervient, cela ne peut être autrement car la courbure des parois doit nécessairement intervenir.

4334. *Minoration de* $-I_3(s) = -4 \int_0^{\pi} \Phi(\varepsilon) J(s, \varepsilon) d\varepsilon$.

43340. Nous prendrons $4 J(s, \varepsilon)$ sous la forme

$$\frac{\omega_1}{\pi} \left[\zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) - \frac{2\eta_1}{\pi} s \right]$$

que l'on établit facilement.

Comme $\int_0^{\pi} \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = 0$, il n'y a pas lieu de s'inquiéter du terme en s .

Posons

$$J_1(s, \varepsilon) = \frac{\omega_1}{\pi} \left[\zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right]$$

et

$$-\Phi(\varepsilon) = \chi(\varepsilon), \quad J(s) = -I_3(s, \varepsilon).$$

Il s'agit de minorer

$$-I_3(s) = J(s) = \int_0^{\pi} \chi(\varepsilon) [J_1(s, \varepsilon) - J_1(s, s_0)] d\varepsilon \quad \text{avec} \quad \int_0^{\pi} \chi(\varepsilon) d\varepsilon = 0.$$

Nous pouvons essayer de comparer à $\int_0^{\pi} \chi(\varepsilon) (\cos \varepsilon - \cos s_0) d\varepsilon$ où $\cos \varepsilon$ a la même croissance que $J_1(s, \varepsilon)$. De plus, la présence de $\sin s$ dans la majorante ci-dessus conduit à introduire le facteur $\sin s$, d'autant plus que l'on vérifie facilement que $J_1(0, \varepsilon) = J_1(\pi, \varepsilon) = 0$.

D'où la recherche d'une minorante du rapport

$$\frac{\int_0^\pi \chi(\varepsilon) [J_1(s, \varepsilon) - J_1(s, s_0)] d\varepsilon}{\int_0^\pi \chi(\varepsilon) [J_2(s, \varepsilon) - J_2(s, s_0)] d\varepsilon}, \quad \text{où } J_2(s, \varepsilon) = \sin s \cos \varepsilon = \frac{\sin(s - \varepsilon) + \sin(s + \varepsilon)}{2}.$$

L'identité des signes montre qu'il suffit pour chaque valeur de ε de minorer le rapport

$$K(s | \varepsilon, s_0) = \frac{J_1(s, \varepsilon) - J_1(s, s_0)}{J_2(s, \varepsilon) - J_2(s, s_0)}.$$

43341. L'application de la formule des accroissements finis généralisée [Goursat, 1, 3^e édit., 1917, p. 37, formule (1)] conduit, en appelant σ une certaine valeur comprise entre ε et s_0 , à

$$K(s | \varepsilon, s_0) = \frac{\frac{dJ_1}{d\varepsilon}(s, \sigma)}{\frac{dJ_2}{d\varepsilon}(s, \sigma)},$$

d'où, après quelques calculs,

$$K(s | \varepsilon, s_0) = \frac{\omega_1^2}{\pi^2} (e_1 - e_3)(e_2 - e_3) \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} s}{\sin s \left(p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3 \right)^2} \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} \sigma}{\sin \sigma \left[p \frac{\omega_1}{\pi} \sigma - p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) \right]^2}.$$

Et comme

$$e_3 < p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) < e_2 < p \frac{\omega_1}{\pi} \sigma,$$

donc

$$0 < p \frac{\omega_1}{\pi} \sigma - p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) < p \frac{\omega_1}{\pi} \sigma - e_3,$$

$$K(s | \varepsilon, s_0) > \frac{\omega_1^2}{\pi^2} (e_1 - e_3)(e_2 - e_3) \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} s}{\sin s \left[p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3 \right]^2} \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} \sigma}{\sin \sigma \left[p \frac{\omega_1}{\pi} \sigma - e_3 \right]^2}.$$

43342. La minoration du second membre doit être recherchée quels que soient ε et s , donc s et σ compris entre 0 et π . Il suffit de minorer

$$K_1(u) = \frac{\omega_1^2}{\pi^2} (e_1 - e_3)(e_2 - e_3) \frac{p'^2 u}{(pu - e_3)^2 \sin^2 \frac{\pi u}{\omega_1}} \quad \text{pour } 0 < u < \omega_1.$$

La plus petite valeur de $\frac{pu - e_2}{pu - e_3}$ étant $\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$, il vient

$$K_1(u) > K_2(u) = \frac{4\omega_1^2}{\pi^2} (e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \frac{pu - e_1}{\sin^2 \frac{\pi u}{\omega_1} (pu - e_3)^2}.$$

43343. Pour conduire le calcul jusqu'aux valeurs numériques, on passe aux fonctions sn cn dn (*T. M.*, LXVII. 4 et LXVII. 5), et en posant

$$u\sqrt{e_1 - e_3} = \nu \quad \text{et} \quad \omega_1\sqrt{e_1 - e_3} = K,$$

il vient

$$K_2 u = K_3 \nu = 4 \frac{\omega_1^2}{\pi^2} \frac{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}{e_1 - e_3} \left[\frac{\text{sn}(\nu, k) \text{cn}(\nu, k)}{\sin \pi \frac{\nu}{k}} \right]^2 \quad \text{avec } 0 \leq \nu \leq K.$$

En introduisant avec Legendre (1)

$$\begin{aligned} x = \text{sn } \nu &= \sin \varphi, & \text{cn } \nu &= \cos \varphi, & k &= \sin \theta, & k' &= \cos \theta; \\ \nu &= F(\theta, \varphi); & K &= F\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right); & K' &= F\left(\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

avec

$$F(\theta, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}}.$$

il vient alors

$$K_3(\nu) = \frac{4K^2 k^2 k'^2}{\pi^2} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin \pi \frac{\nu}{K}} \right)^2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\sin 2\varphi \sin \theta \cos \theta \cdot K}{\sin \frac{\pi \nu}{K}} \right)^2.$$

43344. L'étude de $y = K \cos \theta$ montre que y est une fonction décroissante de θ dont le minimum est $= 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

On vérifie aisément que $\frac{\sin \theta}{\theta}$ est toujours > 1 .

On établit que $\frac{\nu}{K}$ est une fonction décroissante de θ (ou $\sin^2 \theta$) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ en établissant que sa dérivée logarithmique est négative, et l'on en conclut que $\frac{\pi \nu}{K} < 2\varphi$.

Si l'on construit la courbe $x = \sin 2\varphi$ (*fig. 19*) et considère la fonction

$$y = \sin \frac{\pi \nu}{K},$$

pour avoir la même valeur de y , il faut la même valeur de $\frac{\pi \nu}{K}$ et une valeur de φ plus grande : la courbe $y = \sin \frac{\pi \nu}{K}$ est à droite de la courbe $x = \sin 2\varphi$. Pour $\varphi = \pi$,

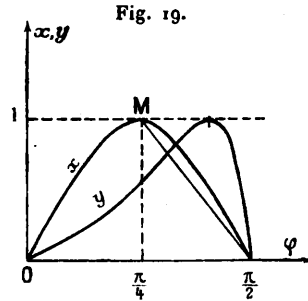
$$\frac{\nu}{K} = 1, \quad \frac{\pi \nu}{K} = \pi.$$

On montre alors que le rapport $\frac{x}{y} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \frac{\pi \nu}{K}}$ est borné inférieurement par

(1) L. POTIN, *Formules et Tables numériques*, p. 753.

le rapport de la pente de la sécante qui joint M au sommet de la courbe au point $\frac{\pi}{2}$, à la pente de la tangente à la courbe y au point $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire par

$$\frac{4}{\pi^2} K \cos \theta \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{y} > \frac{4}{\pi^2} K \cos \theta.$$



43345. Ceci posé, il vient

$$K_2(\nu) = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{\sin 2\varphi}{\sin \frac{\pi\nu}{K}} q \frac{\sin \theta}{q} K \cos \theta \right]^2 > \frac{16}{\pi^6} q^2 (K \cos \theta)^4,$$

et nous référant à (43342), puis à (43341), il vient *a fortiori* :

$$K(s | \varepsilon, s_0) > \frac{16}{\pi^6} q^2 (K \cos \theta)^4,$$

d'où

$$\frac{J(s)}{\sin s \int_0^\pi \chi(\varepsilon) (\cos \varepsilon - \cos s_0) d\varepsilon} > \frac{16}{\pi^6} q^2 (K \cos \theta)^4 = M' = Nq^2$$

et

$$-I_2(s) > Nq^2 \sin s \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) (\cos s_0 - \cos \varepsilon) d\varepsilon,$$

où

$$N = \frac{16}{\pi^6} (K \cos \theta)^4 = N(q).$$

Les tables de L. Potin (*loc. cit.*) permettent de calculer le tableau ci-dessous :

θ	0..	30.	60.	80.	89.	"	90.
q	0	0,018	0,091	0,209	0,408	0,517	1
$K \cos \theta$	1,57	1,46	1,08	0,45	0,095	"	0
$N(q)$	0,1	0,072	0,021	0,64.10 ⁻³	0,13.10 ⁻³	"	0
q^2	0	0,324.10 ⁻³	0,0083	0,0435	0,166	"	1
$M' = Nq^2$	0	0,231.10 ⁻⁴	0,17.10 ⁻³	0,278.10 ⁻⁴	0,216.10 ⁻⁶	"	0

43346. On trouve sans difficulté

$$\int_0^\pi |\cos \varepsilon - \cos s_0| d\varepsilon = (\pi - 2s_0) \cos s_0 + 2 \sin s_0.$$

4335. *Conclusions.* — En écrivant que la majorante de $-I_1(s)$ est $<$ la minorante de $-I_3(s)$, on est conduit à la propriété suivante, qui malheureusement est peu maniable.

THÉORÈME. — Soit (fig. 18) un canal convergent monotone et un obstacle tranchant, tels que

$$\begin{aligned} a. \quad (R) \quad & \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\pi \Psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad q < 0,517. \\ b. \quad & \begin{cases} \Psi(\varepsilon) > 0 & \text{pour } 0 < \varepsilon < s_1 \\ \Psi(\varepsilon) < 0 & \text{pour } s_1 < \varepsilon < \pi \end{cases} \quad \Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi(\pi) = \Psi'(\pi) = 0; \\ c. \quad & \begin{cases} \Psi'(\varepsilon) > 0 & \text{pour } 0 < \varepsilon < \delta_2 \text{ et } \delta_1 < \varepsilon < \pi, \\ \Psi'(\varepsilon) \leq 0 & \text{pour } \delta_2 \leq \varepsilon \leq \delta_1; \end{cases} \\ d. \quad & \begin{cases} \Psi''(\varepsilon) \geq 0 & \text{pour } 0 \leq \varepsilon \leq \beta_2 \text{ et } \delta_1 < \varepsilon < \beta_1 \\ \Psi''(\varepsilon) \leq 0 & \text{pour } \beta_2 \leq \varepsilon \leq \delta_2 \text{ et } \beta_1 < \varepsilon < \pi \end{cases} \quad \Psi''(\beta_2) = \Psi''(\beta_1) = 0. \end{aligned}$$

Noter que $0 < \beta_2 < \delta_2 < s_1 < \delta_1 < \beta_1 < \pi$ et que δ_2 et δ_1 peuvent ainsi que β_2 et β_1 être confondus avec s_1 .

Si, de plus, on a

$$\Psi'(\varepsilon)_{\max} < |\Phi|_{\min} \frac{q^2 N(q)}{\pi} \sin s_1 [2 \sin s_0 + (\pi - 2s_0) \cos s_0],$$

la condition $V \leq 1$ est satisfaite sur les parois du canal.

434. Si le canal et l'obstacle satisfont aux conditions ci-dessus et à la condition $I_1(s) < 0$ (cf. 4311), la condition $V \leq 1$ sera satisfaite partout et le sillage sera divergent et convexe vers le fluide vif.

44. CONDITION $V \leq 1$. CANAL A PAROIS RECTILIGNES. PLAN t .

440. Nous avons démontré les théorèmes 1 et 2 (414) dans le demi-plan t . (La restriction étant satisfaite d'office.)

Nous avons établi d'autre part les formules (2721.2) et (2722.2) valables sur l'obstacle et sur les parois. Dans le cas actuel ces formules deviennent :

Obstacle :

$$(1) \quad T(\tau) = \frac{1}{\pi} \left[\Phi(\tau) \log \frac{1+\tau}{1-\tau} - \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\frac{R(\tau)}{R(t')}} \Phi(t') - \Phi(\tau)}{t' - \tau} dt' \right];$$

Parois :

$$(2) \quad T(\tau) = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^{+1} \Phi(t') \sqrt{\frac{R(\tau)}{R(t')}} \frac{dt'}{t' - \tau} \right].$$

441. Le théorème I, page 116 de la Thèse de M. J. Kravtchenko (1), découle immédiatement de la formule (440.2), qu'on peut écrire en vertu de la condition d'uniformité

$$T(\tau) = \frac{\sqrt{R(\tau)}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')}{\sqrt{R(t')}} \frac{t' - t_0}{(t' - \tau)(t_0 - \tau)} dt';$$

$\Phi(t')(t' - t_0)$ conserve un signe constant et positif.

$(t' - \tau)(t_0 - \tau)$ est positif puisque τ est en dehors de l'intervalle $(-1, +1)$, donc (t', t_0) . Mais $\sqrt{R(\tau)}$ et $\sqrt{R(t')}$ sont de signes opposés (d'après les conventions de signe (2412), donc $T < 0$.

C. Q. F. D.

4421. Considérons maintenant le cas des schémas de Helmholtz-Kirchhoff construits à partir d'une fonction $\Phi(t)$ satisfaisant à une double condition de régularité (449 infra) :

- 1° en fluide illimité (indice 1);
- 2° entre parois rectilignes (indice 2).

Nous savons, d'après le paragraphe 14 de la thèse de M. J. Kravtchenko (ou en Annexe 5 présente), que cela correspond à $a = b = \infty$ ou à $g = 0$ pour le premier cas.

Avec les mêmes conventions de signe et compte tenu de ce que $\sqrt{\frac{R(\tau)}{R(t'')}}$ devient $\sqrt{\frac{1 - \tau^2}{1 - t'^2}}$ pour $T_1(\tau)$, il vient, en prenant maintenant le signe positif pour tous les radicaux,

$$T_2(\tau) - T_1(\tau) = \frac{\sqrt{1 - \tau^2}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{(t' - a)(b - t')} - \sqrt{(\tau - a)(b - \tau)}}{t - \tau} \frac{\Phi(t') dt'}{\sqrt{R(t')}}.$$

La fonction

$$R(t', \tau) = \frac{\sqrt{(t' - a)(b - t')} - \sqrt{(\tau - a)(b - \tau)}}{t - \tau}$$

n'est pas autre chose que la tangente de l'angle que fait la direction $\overrightarrow{\mu M'}$ avec \overrightarrow{Ot} , μ et M' étant deux points du demi-cercle $y = \sqrt{(t - a)(b - t)}$ dont le convexité est tournée vers les y positifs; de sorte que si μ donc τ reste fixe et que M donc t' varie en croissant, cette direction tournant dans le sens dextrorsum, $R(t', \tau)$ est une fonction décroissante de t' .

4423. Mais l'on a $\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{R(t)}} dt = 0$ par hypothèse (et aussi $\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt = 0$) et $\Phi(t') \leq 0$ pour $t' \geq t_0$ (2) (signe + devant les radicaux).

(1) La première condition de M. Brillouin est satisfaite le long des parois du canal.

(2) En fait, il n'est pas nécessaire que l'obstacle soit tranchant, il suffit que l'on ait ces inégalités.

Le lemme de Leray nous montre alors que $T_2(\tau) - T_1(\tau)$ est négatif.

Le théorème III et le corollaire (*J. K.*, p. 119) ont donc les répliques ⁽¹⁾ suivantes :

La différence $T_2(\tau) - T_1(\tau)$ est négative.

Une condition suffisante pour que l'inégalité de M. Brillouin $V \leq 1$ soit vérifiée s'écrit

$$\underline{T_1(\tau) < 0.}$$

Ainsi, si une fonction $\Phi(t')$ satisfaisant à la double condition de régularité (449) est telle que Φ soit ≤ 0 selon que l'on se trouve sur la lèvre inférieure ou supérieure, et que $V \leq 1$ en fluide illimité, il en est de même pour l'obstacle construit à partir de cette même fonction $\Phi(t')$ entre parois rectilignes, et les paramètres a et b choisis. L'obstacle sera d'ailleurs différent du premier.

4431. *Théorème de Boggio* (résultat intrinsèque).

On sait que pour un obstacle concave vers le courant en fluide illimité, on a $\frac{d\Theta}{dl} = \frac{dT}{dn} > 0$, donc T a son maximum sur les lignes de jet et est ≤ 1 .

Le théorème de Boggio est alors démontré *ipso facto* pour le cas de deux parois rectilignes :

Pour un obstacle concave en fluide limité par un canal rectiligne, les conditions de M. Brillouin sont satisfaites.

4432. Dans le cas présent, le résultat obtenu est commun au théorème III de M. Kravtchenko (*cf.* 4423) et au théorème dans le plan t : la démonstration par t assure la démonstration par Z . Mais, comme nous l'avons déjà observé aux *Comptes rendus* (*loc. cit.*, 4423, notule 2), les deux méthodes peuvent conduire à des domaines différents de résultats : les deux théorèmes cités ci-dessus ne sont pas équivalents, car se donner la même fonction $\Phi(s)$, ce n'est pas la même chose que se donner la même fonction $\Phi(t)$.

4433. *Erratum.* — Dans ma note des *Comptes rendus* précitée (*loc. cit.*, 4423, notule 2), p. 151, le paragraphe IV_b est inexact, le reste du paragraphe IV reste valable.

Si $\frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est fonction croissante de t , on est assuré que la seconde partie $T_1(\tau)$ est négative, mais la première partie n'a pas le signe convenable, en particulier est positive pour $t_0 = 0$: car on a alors $\Phi(\tau) \leq 0$ pour $\tau \leq 0$ et $\log \frac{1+\tau}{1-\tau} \leq 0$ pour $\tau \leq 0$, de sorte que leur produit est toujours positif.

⁽¹⁾ *C. R. Acad. Sci.*, 214, 1942, p. 151.

444. La proposition du n° 4423 est un cas particulier de la proposition (1) plus générale suivante :

4441. Soit une fonction $\Phi(t)$ [$-1 \leq t \leq 1$], telle que l'obstacle et le canal rectiligne construits à partir de t et des paramètres a, b [$a < -1 < 1 < b$] satisfassent à $V \leq 1$, il en sera de même pour l'obstacle et le canal rectiligne construits avec la même (2) fonction $\Phi(t)$ et les paramètres a_1, b_1 tels que $a < a_1 < -1 < 1 < b_1 < b$.

4442. Démonstration. — Formons la différence $T_1(\tau) - T(\tau)$:

$$\begin{aligned} T_1(\tau) - T(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\frac{R(\tau)}{R(t')}} - \sqrt{\frac{R_1(\tau)}{R_1(t')}}}{t' - \tau} \Phi(t') dt' \\ &= \frac{\sqrt{R(\tau)}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\frac{R_1(t')}{R(t')}} - \sqrt{\frac{R_1(\tau)}{R(\tau)}}}{t' - \tau} \frac{\Phi(t') dt'}{\sqrt{R_1(t')}} \end{aligned}$$

tous radicaux arithmétiques.

4443. Posons

$$y = \sqrt{\frac{R_1(t)}{R(t)}} = \sqrt{\frac{t - a_1}{t - a} \frac{t - b_1}{t - b}}$$

La dérivée logarithmique donne

$$\begin{aligned} 2 \frac{y'}{y} &= \frac{1}{t - a_1} - \frac{1}{t - a} + \frac{1}{t - b_1} - \frac{1}{t - b} \\ 2 \left[\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y} \right)^2 \right] &= \frac{1}{(t - a)^2} - \frac{1}{(t - a_1)^2} + \frac{1}{(t - b)^2} - \frac{1}{(t - b_1)^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 4 \frac{y''}{y} &= \frac{1}{(t - a_1)^2} - \frac{2}{(t - a_1)(t - a)} + \frac{1}{(t - a)^2} \\ &+ \frac{1}{(t - b_1)^2} - \frac{2}{(t - b_1)(t - b)} + \frac{1}{(t - b)^2} + 2 \left(\frac{1}{t - a_1} - \frac{1}{t - a} \right) \left(\frac{1}{t - b_1} - \frac{1}{t - b} \right) \\ &+ \frac{2}{(t - a)^2} - \frac{2}{(t - a_1)^2} + \frac{2}{(t - b)^2} - \frac{2}{(t - b_1)^2} \\ &= 2 \left[\frac{1}{t - a} - \frac{1}{t - a_1} \right] \left[\frac{1}{b_1 - t} - \frac{1}{b - t} \right] + \frac{2}{t - a} \left[\frac{1}{t - a} - \frac{1}{t - a_1} \right] \\ &+ \frac{2}{b - t} \left[\frac{1}{b - t} - \frac{1}{b_1 - t} \right] + \left[\frac{1}{(t - a)^2} - \frac{1}{(t - a_1)^2} \right] + \left[\frac{1}{(b - t)^2} - \frac{1}{(b_1 - t)^2} \right]. \end{aligned}$$

(1) C. R. Acad. Sc., 214, 1942, p. 151.

(2) Naturellement même valeur de t_0 et double condition de régularité (449).

Or

$$a < a_1 < t \text{ entraîne } 0 < t - a_1 < t - a, \quad \text{donc } 0 < \frac{1}{t-a} < \frac{1}{t-a_1}$$

et

$$t < b_1 < b \text{ entraîne } 0 < b_1 - t < b - t, \quad \text{donc } 0 < \frac{1}{b-t} < \frac{1}{b_1-t}.$$

Tous les termes de $\frac{y''}{y}$ sont alors négatifs et y'' est négatif, y' est décroissant. La courbe $y(t)$ a donc sa convexité tournée vers les y positifs et la fonction $z(t', \tau) = \frac{y(t') - y(\tau)}{t' - \tau}$, qui représente la pente de $\overrightarrow{\mu M'}$, est décroissante, $\overrightarrow{\mu M'}$ tournant dans le sens dextrorsum quand μ est fixe et quand M' décrit la courbe de $\tau = -1$ à $\tau = +1$.

444. Les mêmes raisons qu'en (4423) conduisent au théorème énoncé.

445. *Application.* — Comme exemple d'application on peut partir du cas symétrique ($t_0 = 0$). Nous obtiendrons alors des solutions dans le cas dissymétrique, qui jouiront des mêmes propriétés $V \leq 1$ par rapport aux conditions de M. M. Brillouin.

446. *Réciproquement.* — Par ailleurs, on est assuré que si la solution n'est pas satisfaisante pour le couple a, b_1 , elle ne saurait l'être pour le couple a, b ($a < a_1 < -1 < +1 < b_1 < b$), ou en fluide illimité (si $a = b = \pm \infty$).

447. L'intérêt de la proposition (4441) ci-dessus est multiple :

1° Nous ne faisons aucune hypothèse de limitation sur a et b , alors que l'emploi du plan Z oblige, tout au moins dans l'état actuel de la question, à une majoration de q . Par contre nous avons une double condition de régularité (449).

2° La signification de $q < 0,517$ est $D > k\delta_1$: D largeur du canal, δ_1 de l'obstacle, de sorte qu'on ne peut rapprocher indéfiniment les parois de l'obstacle.

Ici, au contraire, malgré la double condition de régularité, on a le moyen de construire des régimes de sillages qui échappent à cette restriction; il existe en conséquence des sillages qui échappent à toute difficulté, et cela quelque petite que soit la largeur de la veine étranglée entre l'obstacle et chaque paroi. Ceci résulte immédiatement des résultats du paragraphe 27 de la Thèse de M. J. Kravtchenko (*J. K.*, p. 196 et suite).

3° Notre proposition met en évidence la tendance des parois rectilignes à améliorer la validité, comme il ressort de (446).

448. Il serait intéressant de voir si l'on peut construire des obstacles tels que la condition $V \leq 1$ ne soit pas satisfaite en fluide illimité, alors que la même fonction d'obstacle donnerait en fluide limité, un obstacle pour lequel cette condition serait satisfaite.

449. Double condition de régularité de $\Phi(t)$:

4491. La fonction $\Phi(t)$ doit satisfaire à $\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{R(t)}} dt$ dans chaque cas; d'où une double condition est apparue en (441), (442), (443) [excepté (4433) et (444)]; d'où quelque complication pour choisir $\Phi(t)$.

4492. Pour le cas symétrique, et ceci est très rassurant, aucune complication puisque l'inégalité $\int_{-1}^{+1} P(t) \cdot \Phi(t) dt = 0$ est satisfaite d'office, quelles que soient les fonctions paire $P(t)$ et impaire $\Phi(t)$. On peut alors énoncer.

Soit une fonction impaire $\Phi(t)$ et un paramètre b . Si le canal et l'obstacle construits à partir de là satisfont à $V \leq 1$, il en sera de même pour le canal et l'obstacle construits avec cette même fonction $\Phi(t)$ et un paramètre $b_1 < b$ ABSOLUMENT ARBITRAIRE (mais > 1).

4493. On peut constater qu'avec le plan Z on n'a pas l'ennui de la double condition de régularité pour $\Phi(\varepsilon)$, le plan Z reprend l'avantage.

45. CONDITION $V \leq 1$: DEMI-PLAN t . CANAL A PAROIS CURVILIGNES.

451. Considérons le schéma I de Helmholtz-Kirchhoff construit à partir d'une fonction $\Phi(t)$ et de deux paramètres a, b [$\Phi(t)$ satisfaisant à la condition de régularité $\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{R(t)}} dt = 0$] en canal rectiligne; et le schéma II construit à partir de cette même fonction $\Phi(t)$, mais en canal curviligne avec les mêmes valeurs a, b [la fonction $\Psi(t)$ satisfaisant donc à $\int_{-a}^{+a} \frac{\Psi(t)}{\sqrt{R(t)}} dt = 0$].

On voit, en vertu de 2721.2, que sur l'obstacle, on aura

$$T_{II}(\tau) - T_I(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\Psi(t')}{t' - \tau} \sqrt{\frac{R(\tau)}{R(t')}} dt' \quad (\text{radical arithmétique}).$$

452. Considérons un canal convergent monotone et cherchons ce qui se passe sur l'obstacle.

4520. On a $\Psi(t') \geq 0$ pour $t' \begin{matrix} < a \\ > b \end{matrix}$, mais τ appartient à l'obstacle, donc

$$a < -1 < \tau < 1 < b \quad \text{et} \quad t' - \tau \geq 0,$$

selon que $t' \begin{matrix} < a \\ > b \end{matrix}$ et le produit est négatif, de sorte que $T_{II}(\tau) - T_I(\tau) < 0$.

4521. On en tire le théorème suivant :

Soit une fonction $\Phi(t)$ [$-1 \leq t \leq 1$] telle que l'obstacle et le canal à parois rectilignes construits à partir du plan t et des paramètres (a, b) satisfassent à la condition $V \leq 1$, il en sera de même SUR L'OBSTACLE pour le schéma construit avec la même fonction $\Phi(t)$, la même valeur de t_0 , la fonction de canal convergent monotone $\Psi(t)$ arbitraire et les mêmes paramètres a, b .

4522. En combinant 4521 avec 4441, on aura une nouvelle proposition que nous n'explicitons pas.

4523. En particulier (1) : *Si $\Phi(t)$ correspond à un obstacle satisfaisant à $V \leq 1$ en fluide illimité, il en est de même le long de l'obstacle construit à partir de cette même fonction $\Phi(t)$ et pour un canal monotone convergent (paramètre a_1, b_1 pour fixer les idées).*

4524. *Remarques importantes :*

1° En ce qui concerne (4522), (4523), $\Phi(t)$ doit satisfaire a priori à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{R(t)}} dt \quad \text{ou} \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0;$$

$\Psi(t)$ devra satisfaire à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{R_1(t)}} dt = \int_{-\infty}^{a+b} \frac{\Psi(t)}{\sqrt{R_1(t)}} dt \quad (\text{radicaux arithmétiques}).$$

2° On sait que la condition $V \leq 1$ ne peut pas en général être satisfaite (4041) pour le canal convergent. Il existera donc un point des parties convexes des parois pour lequel la vitesse sera maximum ($V > 1$).

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 151.



(A suivre.)